UNIVERSIDADE
EDUARDO
MONDLANE

FACULDADE DE CIÊNCIAS

Departamento de Matemática e Informática

Trabalho de Licenciatura em Matemática

Reordenamento em álgebras de representantes de relações de comutação

Autor: Artur Moniz Mário

Maputo, 20 de janeiro de 2026

UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE

FACULDADE DE CIÊNCIAS

Departamento de Matemática e Informática

Trabalho de Licenciatura em Matemática

Reordenamento em álgebras de representantes de relações de comutação

Autor: Artur Moniz Mário

Supervisor: Doutor Domingos Djinja

Maputo, 20 de janeiro de 2026

Dedicatória

Dedico este trabalho a minha mãe que não está entre nós, e ao meu pai.

Declaração de Honra

Declaro por minha honra que o presente Trabalho de Licenciatura é resultado da minha investigação e que o processo foi concebido para ser submetido apenas para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática, na Faculdade de Ciências da Universidade Eduardo Mondlane.

Maputo, 20 de janeiro de 2026

____

(Artur Moniz Mário)

Agradecimentos

• Agradeço à Deus pela dadiva que tem me concedido, especialmente pela saúde, força de vontade e a espiritualide durante a elaboração do presente trabalho.

• Agradeço a Universidade Eduardo Mondlane, em especial ao meu supervisor Doutor Domingos Djinja, pela paciência e disponibilidade na supervisão deste trabalho.

• Agradeço a todos os meus professores do DMI e de igual forma, agradeço a todos os meus colegas do curso de Licenciatura em Matemática, que incutiram conhecimento e valores morais em mim para fazer este trabalho.

• Agradeço a Instituição Yavuz Selim, em especial ao directores pela disponibilidade e atenção na minha caminhada estudantil nessa universidade e nesse trabalho. Igualmente, agradeço aos meus colegas da mesma instituição.

• Agradeço de coração a minha família, em especial aos meus pais Clara Inácio Victorino e Moniz Mário Nhenguela. Aos meus irmãos e tios Michael, Mário, Laura, Lorito, Armindo, tio Betinho e tia Gilda pelo apoio incondicional e incalculável que ofereceram, para tornar realidade este sonho.

• E para terminar, muito obrigado a todos aqueles que directa e indirectamente contribuíram para que fosse possível frequentar os anos de Licenciatura e para a realização deste trabalho.

Resumo

O presente trabalho tem como principal objectivo o estudo de relações de comutação do tipo

$$AB = B\,F(A),$$

onde A e B são operadores lineares e F é uma função polinomial através de operadores integrais lineares limitados definidos em espaços L^p. Pretende-se determinar representantes e apresentar propriedades algébricas associadas ao reordenamento de elementos que pertencem a essa álgebra de representantes. São estabelecidas condições sobre os núcleos dos operadores integrais que garantem a validade da relação de comutação para polinómios gerais F.

Palavras-chave: Relações de comutação, operadores integrais, espaços L^p, reordenamento, polinómios.

Abstract

The main objective of this work is to study commutation relations of the type

$$AB = B\,F(A),$$

where A and B are linear operators and F is a polynomial function, through bounded linear integral operators defined on L^p spaces. The aim is to determine representatives and to present algebraic properties associated with the reordering of elements belonging to this algebra of representatives. Conditions are established on the kernels of the integral operators that ensure the validity of the commutation relation for general polynomials F.

Keywords: Commutation relations, integral operators, L^p spaces, reordering, polynomials.

Simbologia

Neste trabalho, são utilizados os seguintes símbolos e convenções:

- $\square$ significa fim da demontração;
- $\emptyset$ designa conjunto vazio;
- $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais;
- $\mathbb{Z}$ é conjunto dos números inteiros;
- $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais;
- $X \times Y$ é o produto directo dos conjuntos X e Y
- $|\cdot|$ designa alguma norma em $\mathbb{R}$;
- $||\cdot||_X$ designa norma no espaço normado X;
- $N : X \to Y$, significa que o operador N actua do espaço X para o espaço Y;
- $f(\cdot, u)$ é uma função do primeiro argumento em que o segundo argumento não varia;
- $\mathcal{P}(X)$ é conjunto das partes de X;
- (S, Σ) designa um espaço mensurável;
- $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ é σ-álgebra de Borel em $\mathbb{R}$;
- $A \setminus B$ é diferença entre os conjuntos A e B;
- $A \triangle B$ é diferença simétrica entre A e B;
- $A \sqcup B$ é união disjunta dos conjuntos A e B;
- $f^{-1}(B)$ pré-imagem do conjunto B pela função f;
- χ_A função característica do conjunto A;

- $\Rightarrow$ implica;
- $\Leftrightarrow$ se e somente se;
- $\forall$ para todo;
- $\exists$ existe;
- $\subseteq$ inclusão de conjuntos;
- $\cup$ união de conjuntos;
- $\cap$ intersecção de conjuntos;
- I indica o operador identidade;
- $L^p(\mathbb{R})$ representa o espaço das funções p-integráveis sobre $\mathbb{R}$;
- $k_a(t,s)$ e $k_b(t,s)$ representam núcleos integrais associados aos operadores A e B;
- $\sum\limits_{j=0}^{n} \delta_j z^j$ é o símbolo de somatório (soma dos termos com índice j de 0 a n);
- $\prod\limits_{j=1}^{n} u_j$ é o símbolo de produtório (produto dos termos u_j para $j = 1, \ldots, n$);
- Para combinações binomiais: $\binom{n}{i}$ indica o número de combinações de i elementos entre n, definido como $\displaystyle\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}, \quad n! = n(n-1)\cdots 1$;
- $\overline{A}$ é o fecho do conjunto A;
- $\mathrm{supp}(c)$ é o fecho do conjunto dos pontos de X onde a função c não se anula.

Índice

Introdução

As relações de comutação constituem um tema central no estudo de estruturas algébricas e de operadores, desempenhando um papel fundamental na análise de sistemas não comutativos[14]. Neste trabalho vamos nos focar nas relações da forma

$$AB = B\,F(A), \tag{1}$$

em que A e B pertencem a uma álgebra associativa e F é uma função polinomial. Este tipo de relação surge em diversos contextos da matemática, sendo identificado por diferentes denominações, como relações de covariância, produto cruzado, produto semidirecto e relações de anéis de polinómios enviesados([5], [6], [3], [15]).

No âmbito da matemática pura, estas relações aparecem em áreas como teoria de álgebras de Lie, q-deformações, grupos quânticos, álgebras de operadores e análise funcional. A sua importância prende-se, entre outros aspectos, com a capacidade de descrever e classificar representações de operadores, bem como de investigar propriedades espectrais e estruturais de álgebras não comutativas. A iteração da função F estabelece ainda uma ligação natural com a teoria de sistemas dinâmicos, permitindo reordenações eficientes de expressões não comutativas e favorecendo abordagens sistemáticas para o estudo de fenómenos relacionados com espectros e decomposições(veja em [3], [10], [11], [18]). Do ponto de vista físico, estas relações são igualmente relevantes. Em mecânica quântica, por exemplo, os operadores de posição e momento satisfazem as conhecidas relações canónicas de comutação de Heisenberg, cuja exponenciação conduz a operadores que obedecem a expressões do tipo (1). Em teoria quântica de campos e informação quântica, estruturas análogas descrevem interações entre observáveis e a evolução temporal de sistemas quânticos. Estes modelos evidenciam como a compreensão matemática das relações de comutação fornece a base teórica para o desenvolvimento de tecnologias quânticas emergentes, como a computação quântica e protocolos de comunicação segura([3], [15], [17] , [22]).

Vários autores estudam estas relações de comutação, utilizando ferramentas da teoria espectral e de espaços de Hilbert, considerando operadores normais, unitários ou autoadjuntos ([4], [10], [11], [18], [21], [23]). Veja, por exemplo, em [4], [11], [18], [21], [23], onde são discutidas relações importantes entre operadores, a actuação funcional de polinómios sobre operadores e a análise dos zeros destes polinómios. Tais resultados permitem caracterizar soluções possíveis destas relações, revelando propriedades estruturais relevantes dos operadores envolvidos ([3], [5], [10], [14]).

Neste trabalho, desenvolvemos métodos para a construção directa de representações das relações de comutação de covariância da forma em (1) por operadores integrais lineares limitados em espaços de funções integráveis de grau p, $p \geq 1$. Focamo-nos na construção e nas propriedades de representações não triviais (com $B \neq 0$) destas relações. Consideramos representações através de operadores integrais lineares definidos por núcleos que satisfazem diversas condições, e derivamos condições sobre tais funções de núcleo de modo que os operadores correspondentes satisfaçam as relações de comutação para polinómios gerais F e para casos especiais de interesse, como polinómios afins, quadráticos ou monómios de qualquer grau. Além disso, derivamos algumas fórmulas de composição e reordenamento para os operadores envolvidos.

O trabalho está dividido em três capítulos, logo após a introdução , no capítulo 1, apresentamos conceitos básicos e terminologias tais como álgebra e σ-álgebra, espaços mensuráveis e de medida, além de operadores lineares e do integral de Lebesgue. No capítulo 2 introduzimos relações de comutatividade e estudamos condições necessárias e suficientes para que os operadores lineares integrais satisfaçam relações de comutação da forma em (1). No capítulo 2 estudamos o reordenamento de formas envolvendo representantes de relações de comutação da forma em (1).

Objectivos

1. Objectivos Gerais:
   (a) Estudar relações de comutatividade envolvendo operadores lineares integrais.
2. Objectivos Específicos:
   (a) Revisar a teoria de medida, operadores lineares integrais em L^p e propriedades básicas da relação de comutatividade envolvendo estes operadores;
   (b) Deduzir condições necessárias e suficientes da relação de comutatividade $AB = BF(A)$ envolvolvendo operadores lineares em espaços L^p;
   (c) Deuduzir propriedades e fórmulas de reordenamento das mesmas.

Metodologia

O presente trabalho é baseado na pesquisa bibliográfica de livros, artigos de revista e outras publicações relacionadas com o tema. Exploramos os elementos da Teoria de Conjuntos, Lógica, Topologia, Algebra Linear, Teoria de Medida e Análise Funcional. O trabalho foi realizado seguindo as normas de elaboração de monografia exigidas pela instituição e para escrever o texto do trabalho usamos o software LaTeX.

Capítulo 1

Conceitos e Proposições Preliminares

1.1 Álgebras e σ-álgebras

Nesta secção, iremos apresentar os conceitos fundamentais de álgebra e σ-álgebras de conjuntos, destacando as suas propriedades básicas e exemplos ilustrativos. Pode ver com mais detalhes em [2], [12], [20].

Definição 1.1.1. *[2] Uma álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$ é uma classe de subconjuntos de um conjunto fixo X (que se chama espaço) tal que:*

(i) X e o conjunto vazio $\emptyset$ pertencem a $\mathcal{A}$;

(ii) se $A, B \in \mathcal{A}$, então $A \cap B \in \mathcal{A}$, $\quad A \cup B \in \mathcal{A} \quad$ e $\quad A \setminus B \in \mathcal{A}$.

Seja X um conjunto arbitrário e $\mathcal{E}$ contido na família de todos os subconjuntos de X.

Definição 1.1.2. *[12] Um sistema de conjuntos $\mathcal{E}$ é chamado de anel de um conjunto X se $A \cup B \in \mathcal{E}$, $A \setminus B \in \mathcal{E}$ e $A \cap B \in \mathcal{E}$, sempre que $A, B \in \mathcal{E}$*

Exemplo 1.1.1. *O sistema de todos subconjuntos $\mathcal{P}(X)$ dum conjunto não vazio X é um anel. De facto, se $A, B \in \mathcal{P}(X)$, então $A \cup B \subseteq X$, $A \setminus B \subseteq X$ e $A \cap B \subseteq X$. Logo, $A \cup B$, $A \setminus B$, $A \cap B \in \mathcal{P}(X)$. Assim, pelas condições da definição, $\mathcal{P}(X)$ é um anel de conjuntos.*

Exemplo 1.1.2. *O sistema $\{\emptyset, X\}$ é um anel. Sejam $A, B \in \{\emptyset, X\}$. De facto, se $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$, então as operações de união, intersecção e diferença dão sempre como resultado $\emptyset$ ou X. Se $A = B = X$, então $A \cup B = X$, $A \setminus B = \emptyset$ e $A \cap B = X$.*

Proposição 1.1.1. *[12, Cap1, pg7] $\mathcal{E}$ é anel se e só se $A, B \in \mathcal{E} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{E}$ e $A \triangle B \in \mathcal{E}$.*

Teorema 1.1.1. *[12, Cap1, pg8] A intersecção de qualquer conjunto de aneis é um anel*

Definição 1.1.3. *$\mathcal{E}$ chama-se semi-anel se são válidas as condições seguintes:*

1. $\emptyset \in \mathcal{E}$;

2. Se $A, B \in \mathcal{E}$, então $A \cap B \in \mathcal{E}$ (a família $\mathcal{E}$ é fechada em relação às intersecções finitas);

3. Se $A, B \in \mathcal{E}$ e $B \subseteq A$ então existem $n \in \mathbb{N}$ e $I_i \in \mathcal{E}$, $i = 1; 2; ...; n$ tal que $A \backslash B = \sqcup_{i=1}^{n} I_i$.

Observação 1.1.1. *$A \setminus B = \sqcup_{i=1}^{n} I_i$ é a união de conjuntos disjuntos I_i.*

Exemplo 1.1.3. *Seja $X = \{a; b; c\}$. As famílias de subconjuntos de X*

$$\mathcal{E}_1 = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}\} \text{ e } \mathcal{E}_2 = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{c\}; X\}$$

são semi-anéis do conjunto X. Verifiquemos as condições da definição:

• *temos o conjunto vazio em ambas famílias, isto é, $\emptyset \in \mathcal{E}_1$ e $\emptyset \in \mathcal{E}_2$;*

• *verifiquemos se as interseccões de elementos de cada uma das famílias resulta num elemento da mesma família. Em $\mathcal{E}_1$:*

$$\emptyset \cap \emptyset = \emptyset, \quad \emptyset \cap \{a\} = \emptyset, \quad \emptyset \cap \{b\} = \emptyset, \quad \{a\} \cap \{a\} = \{a\}, \quad \{b\} \cap \{b\} = \{b\}, \quad \{a\} \cap \{b\} = \emptyset.$$

Em $\mathcal{E}_2$:

$$\begin{aligned}
&\emptyset \cap \emptyset = \emptyset, \quad \emptyset \cap \{a\} = \emptyset, \quad \emptyset \cap \{b\} = \emptyset, \quad \emptyset \cap \{c\} = \emptyset, \quad \emptyset \cap X = \emptyset,\\
&\{a\} \cap \{a\} = \{a\}, \quad \{b\} \cap \{b\} = \{b\}, \quad \{c\} \cap \{c\} = \{c\},\\
&\{a\} \cap \{b\} = \emptyset, \quad \{a\} \cap \{c\} = \emptyset, \quad \{a\} \cap X = \{a\},\\
&\{b\} \cap \{c\} = \emptyset, \quad \{b\} \cap X = \{b\}, \quad \{c\} \cap X = \{c\},\\
&X \cap X = X;
\end{aligned}$$

• *verifiquemos se temos todas diferenças como uniões disjuntas. Em $\mathcal{E}_1$:*

$$\{a\} \backslash \emptyset = \{a\}, \quad \{b\} \backslash \emptyset = \{b\}, \quad \{a\} \backslash \{b\} = \{a\}, \quad \{b\} \backslash \{a\} = \{b\}, \quad \emptyset \backslash \{a\} = \emptyset, \quad \emptyset \backslash \{b\} = \emptyset.$$

Em $\mathcal{E}_2$:

$$\begin{aligned}
&X \setminus \{a\} = \{b\} \sqcup \{c\}, \quad X \setminus \{b\} = \{a\} \sqcup \{c\}, \quad X \setminus \{c\} = \{a\} \sqcup \{b\},\\
&\{a\} \setminus \emptyset = \{a\}, \quad \{b\} \setminus \emptyset = \{b\}, \quad \{c\} \setminus \emptyset = \{c\}, \quad \emptyset \setminus A = \emptyset \text{ para qualquer } A \in \mathcal{E}_2.
\end{aligned}$$

Como todas as três condições da definição são satisfeitas, concluímos que $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$ são semi-anéis do conjunto X.

Exemplo 1.1.4. *Seja $X = \mathbb{R}$. A família de intervalos abertos $I_a = \{\emptyset\} \cup \{]a; b[: a < b < \infty\}$ e a família de intervalos fechados $I_F = \{\emptyset\} \cup \{[a; b] : a < b < \infty\}$ não são semi-anéis, mas as famílias de intervalos semi-fechados à esquerda $I_e = \{\emptyset\} \cup \{[a; b[: a < b < \infty\}$ e à direita $I_d = \{\emptyset\} \cup \{]a; b] : a < b < \infty\}$ são semi-anéis. De facto, para que I_a seja semi-anel deve ser fechada relativamente à intersecção finita. Porém tomando temos $]0, 2[\in I_a$ e $]1, 3[\in I_a$:*

$$]0, 2[\backslash]1, 3[=]0, 1]$$

isto é, a diferença de dois intervalos abertos pode ser expressa como união de intervalos. No caso de intervalos fechados I_F, se $[0, 2] \backslash [1, 3] = [0, 1[$, obtemos um intervalo que não é fechado, assim, o intervalo não pertence a I_F. Portanto I_a e I_F não satisfazem a condição 3 da definição de semi-anel.

Por outro lado, os intervalos semi-fechados à esquerda I_e e à direita I_d são semi-anéis. De facto,

- $\emptyset \in I_e, \emptyset \in I_d$;
- *Verifiquemos se a família* I_e *é fechada em em relação a intersecçao. Para quaisquer* $[a, b[, [c, d[\in I_e, \quad c < d < \infty$,

$$[a, b[\cap[c, d[= [\max\{a, c\}, \min\{b, d\}[\in I_e$$

se a intersecção não for vazia. Analogamente, para intervalos à direita

$$]a, b]\cap]c, d] =] \max\{a, c\}, \min\{b, d\}] \in I_d.$$

- *Verifiquemos se a diferença de intervalos é sempre uma união finita de intervalos semi-fechados do mesmo tipo. Para os conjuntos* $[a, b[, [c, d[\in I_e$ *com* $[c, d[\subseteq [a, b[$,

$$[a, b[\setminus[c, d[= [a, c[\sqcup [d, b[,$$

ou apenas um intervalo se $c = a$ *ou* $d = b$. *Analogamente, para* $]a, b]\setminus]c, d] =]a, c]\sqcup]d, b]$.

Como todas as condições da definição de semi-anel são satisfeitas, concluímos que I_e *e* I_d *são semi-anéis de* $\mathbb{R}$.

Observação 1.1.2. *O semi-anel é mais geral em relação a anel, pois todo anel é um semi-anel, mas a recíproca não é verdadeira. Um exemplo é a família dos intervalos semi-abertos da forma do Exemplo 1.1.4 que é um semi-anel, mas não é um anel, pois a união de dois intervalos desse tipo não é, em geral, um intervalo semi-aberto do mesmo tipo.*

Definição 1.1.4. *Um conjunto* A *é chama-se de enumerável se existe uma função injectiva* $f : A \to \mathbb{N}$ *que é sobrejectiva em uma parte de* $\mathbb{N}$, *ou seja, podemos listar os elementos de* A *na forma* $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$.

Exemplo 1.1.5. *O conjunto dos números naturais* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ *é enumerável. O conjunto dos números inteiros* $\mathbb{Z}$ *é enumerável, pois podemos escrever da seguinte forma:*

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}.$$

Observação 1.1.3. *Um conjunto que não é enumerável diz-se de não enumerável. Um exemplo clássico é o conjunto dos números reais* $\mathbb{R}$, *por exemplo em [9, Cap1, pg15-18] prova-se que* $\mathbb{R}$ *não é enumerável.*

Proposição 1.1.2. *[9, Cap1] As seguintes afirmações são verdadeiras:*

a) união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável,

b) produto directo de conjuntos enumeráveis é enumerável se e só se todos os factores são enumeráveis.

Exemplo 1.1.6. *Conjunto dos números racionais* $\mathbb{Q}$ *é enumerável. De facto, vejamos que qualquer número racional pode ser escrito na forma*

$$\frac{p}{q}, \quad \text{com } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Visto que o conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$ *é enumerável e o produto de dois conjuntos enumeráveis também é enumerável, temos que* $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ *é enumerável. Sendo* f *uma função tal que um subconjunto de* $f : \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \to \mathbb{Q}$, *e eliminando as frações equivalentes (isto é, as repetições), concluímos que* $\mathbb{Q}$ *é enumerável.*

Definição 1.1.5. *[12] Um anel $\mathcal{E}$ de um conjunto chama-se σ-anel se contém a união*

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

$A_1, ..., A_n \in \mathcal{E}$ ou seja é fechado em relação às uniões enumeráveis.

Definição 1.1.6. *Um conjunto $E \subseteq X$ diz-se unidade do anel $\mathcal{E}$ se $E \in \mathcal{E}$ e para qualquer $A \in \mathcal{E}$ tem-se $A \subseteq E$.*

Definição 1.1.7. *[12] Um anel de conjuntos com unidade chama-se álgebra de conjuntos, assim como o σ-anel de conjuntos com unidade é uma σ-álgebra de conjuntos.*

Proposição 1.1.3. *[12, Cap1, pag10-12] Seja X um conjunto não vazio e $\mathcal{E}$ um anel. São consideradas as seguintes implicações:*

1. *$\mathcal{E}$ é uma σ-álgebra com unidade $X \Rightarrow \mathcal{E}$ é um σ-anel;*

2. *$\mathcal{E}$ é uma σ-álgebra com unidade $X \Rightarrow \mathcal{E}$ é uma álgebra com unidade X;*

3. *$\mathcal{E}$ é uma álgebra com unidade $X \Rightarrow \mathcal{E}$ é um anel;*

4. *$\mathcal{E}$ é um anel $\Rightarrow \mathcal{E}$ é um semi-anel;*

5. *$\mathcal{E}$ é σ-anel $\Rightarrow \mathcal{E}$ é um anel.*

Definição 1.1.8. *Um sistema de subconjuntos τ de um conjunto não-vazio X chama-se estrutura topológica ou topologia se satisfaz as seguintes condições:*

1. *$\emptyset \in \tau$ e $X \in \tau$;*

2. *união de qualquer família (finita ou infinita) de conjuntos que são elementos de τ é um elemento de τ;*

3. *intersecção de qualquer família finita de conjuntos que são elementos de τ é um elemento de τ.*

Observação 1.1.4. *As três condições 1,2 e 3 são axiomas da topologia e os elementos de τ chamamos abertos da topologia τ.*

Exemplo 1.1.7. *Sejam X conjunto qualquere e τ_d o sistema de todos os subconjuntos . A família τ_d é uma topologia em X. De facto, $\varnothing \subseteq X$ e $X \subseteq X$, tem-se $\varnothing \in \tau_d$ e $X \in \tau_d$. Seja $\{U_i\}_{i\in I}$ uma família arbitrária de elementos de τ_d. Para cada $U_i \subseteq X$, a união $\bigcup_{i\in I} U_i \subseteq X$, logo $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{P}(X) = \tau_d$. Sejam $U_1, \ldots, U_n \in \tau_d$. Para cada $U_j \subseteq X$, a interseção finita $\bigcap_{j=1}^{n} U_j \subseteq X$, e, portanto, $\bigcap_{j=1}^{n} U_j \in \mathcal{P}(X) = \tau_d$. Esta topologia chama-se topologia discreta.*

Definição 1.1.9. *Um conjunto $F \subseteq X$ chama-se fechado se o seu complemento $X \setminus F$ é um aberto.*

Exemplo 1.1.8. *Seja $X = \{a, b, c, d\}$. Consideremos o sistema*

$$\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b\}\}.$$

τ é uma topologia em X, pois cumpre com os axiomas da topologia. O sistema de conjuntos fechados correspondente é dado pelos complementos dos abertos:

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, X, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, d\}, \{d\}, \{c, d\}\}.$$

As proposições a seguir tiradas de [13], correspondem a propriedades de conjuntos fechados e abertos e também ajudam a caracterizar tais conjuntos. Facto que pode ajudar a determinar ou verificar se um dado conjunto é ou não aberto ou fechado num espaço topológico .

Proposição 1.1.4 (Propriedades de conjuntos fechados)**.** *A família de todos os conjuntos fechados de um espaço topológico satisfaz as seguintes condições:*

a) O conjunto vazio e todo o espaço X são conjuntos fechados;

b) Intersecção de qualquer família (finita ou infinita) de conjuntos fechados é um conjunto fechado;

c) União de qualquer família finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

Proposição 1.1.5. *Seja $A \subseteq X$. Então,*

a) O conjunto A é aberto se e somente se o conjunto $X \setminus A$ é fechado.

b) O conjunto A é fechado se e somente se o conjunto $X \setminus A$ é aberto.

Definição 1.1.10. *[20] Sejam X um conjunto não vazio e seja $\mathcal{P}(X)$ o conjunto de todos subconjuntos de X. Defina a relação $\subseteq$ em $\mathcal{P}(X)$ por*

$$A \subseteq B \iff \forall x\,(x \in A \implies x \in B).$$

O par $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ é um conjunto parcialmente ordenado*, se satisfaz:*

1. *Reflexividade: para todo $A \subseteq X$, tem-se $A \subseteq A$;*
2. *Antissimetria: se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$;*
3. *Transitividade: se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.*

Qualquer subfamília $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$, munida da mesma relação $\subseteq$, herda esta estrutura de ordem parcial.

Definição 1.1.11. *[20] Seja $(\mathcal{F}, \subseteq)$ uma família de conjuntos com a ordem de inclusão. Diz-se que $M \in \mathcal{F}$ é* elemento mínimo *de $\mathcal{F}$ se*

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad M \subseteq A,$$

ou seja, M está contido em todos os elementos de $\mathcal{F}$.

Observação 1.1.5. *Quando existe um elemento mínimo em $\mathcal{F}$, ele é único.*

Definição 1.1.12. *Seja* (X, τ) *um espaço topológico e seja* $A \subseteq X$ *um subconjunto. O* fecho *de* A*, denota-se por* $\overline{A}$*, é definido como a intersecção de todos os conjuntos fechados de* X *que contêm* A*, isto é,*

$$\overline{A} = \bigcap \{\, F \subseteq X : F \text{ é fechado e } A \subseteq F \,\}.$$

Ou seja , $\overline{A}$ *é o menor conjunto fechado que contém* A*.*

Definição 1.1.13. *[2] Seja* X *um espaço topológico e* $c : X \to \mathbb{R}$ *uma função. O* suporte *de* c*, denota-se por* $\operatorname{supp}(c)$*, define-se como o fecho do conjunto dos pontos de* X *onde* c *não se anula, isto é,*

$$\operatorname{supp}(c) = \overline{\{\, x \in X : c(x) \neq 0 \,\}}.$$

Definição 1.1.14. *[20] Seja* (X, τ) *um espaço topológico, onde* τ *é a família de conjuntos abertos de* X*. A* σ*-álgebra mínima que contém todos os abertos de* X*, chama-se* σ*-álgebra de Borel em* X *e denota-se por* $\mathcal{B}(X)$ *.*

Um conjunto que pertence à σ-álgebra $\mathcal{B}(X)$ chama-se conjunto mensurável a Borel ou conjunto boreliano.

Observação 1.1.6. *Seja* X *um conjunto e seja* $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ *uma família qualquer de subconjuntos. A* σ*-álgebra gerada por* $\mathcal{F}$*, que denota-se por* $\sigma(\mathcal{F})$*, pode ser caracterizada como a interseção de todas as* σ*-álgebras de* X *que contêm* $\mathcal{F}$*, isto é,*

$$\sigma(\mathcal{F}) = \bigcap \{\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) \,;\, \mathcal{A} \text{ é uma } \sigma\text{-álgebra e } \mathcal{F} \subset \mathcal{A}\}\,.$$

E a σ*-álgebra de Borel* $\mathcal{B}(X)$ *é a menor* σ*-álgebra que contém a topologia* τ *de* X*, isto é,* $\mathcal{B}(X) = \sigma(\tau)$.

Definição 1.1.15. *A álgebra de Borel em* $\mathbb{R}$*, denotada por* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$*, é a menor* σ*-álgebra que contém todos os intervalos abertos de* $\mathbb{R}$*. Ou seja,*

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\left(\{(a, b) \subset \mathbb{R} : a < b\}\right).$$

Observação 1.1.7. *Os conjuntos de Borel são os subconjuntos de* $\mathbb{R}$ *que podem ser obtidos a partir de intervalos abertos usando uniões enumeráveis, intersecções enumeráveis e complementos.*

1.2 Espaços Mensuráveis

Nesta secção começaremos apresentando as definições de espaço mensurável, conjunto mensurável e função mensurável, conforme retiradas de [2] e [12] . Estas definições fornecem a base para o estudo de funções mensuráveis e de medidas em espaços .

Definição 1.2.1. *Seja* S *conjunto não vazio e seja* Σ *uma* σ*-álgebra de subconjuntos de* S *com unidade* S*. Um par* $(S; \Sigma)$ *chama-se espaço mensurável.*

Um conjunto $A \subseteq S$ do espaço mensurável chama-se conjunto mensurável no caso $A \in \Sigma$.

Exemplo 1.2.1. *Vamos considerar:* $S = \{1, 2, 3\}$ *definimos a família de subconjuntos:*

$$\Sigma = \{\emptyset,\ \{1\},\ \{2,3\},\ \{1,2,3\}\}.$$

Vejamos que Σ *é uma* σ*-álgebra, de facto tem-se* $\varnothing \in \Sigma$ *e* $S \in \Sigma$*. Além disso,* Σ *é fechada por complemento relativo a* S*, pois*

$$S \setminus \{1\} = \{2,3\} \in \Sigma \quad e \quad S \setminus \{2,3\} = \{1\} \in \Sigma.$$

Temos que Σ *é uma família finita, assim, toda união enumerável de seus elementos reduz-se a uma união finita, a qual pertence a* Σ*. Logo,* Σ *é fechada por uniões enumeráveis. Portanto,* Σ *satisfaz os axiomas de uma* σ*-álgebra sobre* S*. então* (S, Σ) *é um espaço mensurável.*

Definição 1.2.2. *Sejam* $(S_i; \Sigma_i)$ $(i = 1; 2)$ *espaços mensuráveis e* $D \subsetneq S_1$*. Uma função* $f : D \to S_2$ *diz-se* $\langle \Sigma_1; \Sigma_2 \rangle$*-mensurável se* $f^{-1}(\Sigma_2) \subseteq \Sigma_1$ *(i.e.*$\forall B \in \Sigma_2\ f^{-1}(B) \in \Sigma_1$*).*

Definição 1.2.3. *Seja* $(S; \Sigma)$ *espaço mensurável. Diremos que a função* $f : S \to \mathbb{R}$ *é mensurável se ela é* $\langle \Sigma; \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rangle$*-mensurável.*

Exemplo 1.2.2. *Seja* $S = \mathbb{R}$ *e* $\Sigma = \mathcal{B}(\mathbb{R})$*, a* σ*-álgebra de Borel em* $\mathbb{R}$*. Considere a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = 2x + 1$*. Para qualquer conjunto aberto* $A \subseteq \mathbb{R}$*, o conjunto*

$$f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 1 \in A\}$$

é um conjunto de Borel, assim, $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*. Logo,* f *é uma função* $\langle \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rangle$*-mensurável, isto é,* f *é mensurável.*

Observação 1.2.1. *Uma classe importante de funções mensuráveis é a coleção de todas as funções simples, isto é, funções mensuráveis* f *que assumem apenas um número finito de valores. Assim, qualquer função simples* f *tem a forma* $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}$*, onde* $c_i \in \mathbb{R}$ *e* $A_i \in \Sigma$*; ou seja,* f *é uma combinação linear finita de funções características(veja a definição 1.4.1) de conjuntos em* Σ*. Obviamente, o recíproco também é verdadeiro.*

Teorema 1.2.1. *[2, Cap1, pg27-28] Sejam* $f, g : S \to \mathbb{R}$ *funções mensuráveis sobre um espaço mensurável* (S, Σ)*. Então:*

a) $f + g$, $f - g$ *e* $f \cdot g$ *são mensuráveis;*

b) Se $g(t) \neq 0$ *para todo* t*, então* f/g *é mensurável.*

Teorema 1.2.2. *[2, Cap1, pg29-30] Seja* $h : T \to \mathbb{R}$ *uma função mensurável sobre um espaço mensurável* (S, Σ)*. Então, para todo número real* $a \in \mathbb{R}$*, os seguintes conjuntos pertencem à* Σ*:*

$$\{t \in T : h(t) < a\},\ \{t \in T : h(t) \leq a\},\ \{t \in T : h(t) > a\}\ e\ \{t \in T : h(t) \geq a\}$$

Teorema 1.2.3. *[2, Cap1, pg31] Seja* $x : T \to E$*, sobre um espaço mensurável* (S, Σ)*, onde* E *é um subconjunto finito ou enumerável de* $\mathbb{R}$*. A função* x *é mensurável se, e somente se, para todo* $a \in E$*, o conjunto:*

$$x^{-1}(\{a\}) = \{t \in T : x(t) = a\}$$

pertence à Σ*.*

Seja X um conjunto não vazio e $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ (i.e. $\mathcal{E}$ é alguma família de subconjuntos de X).

Definição 1.2.4. *Uma função $\mu : \mathcal{E} \to [-\infty; +\infty]$ diz-se função de conjunto.*

Uma função de conjunto chama-se aditiva se para qualquer $A; B \in \mathcal{E}$ tais que $A \cup B \in \mathcal{E}$ e $A \setminus B = \emptyset$ é válido:

$$\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Função de conjunto não negativa chama-se σ-aditiva se para qualquer $A_n \in \mathcal{E}$ tais que $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{E}$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$, $(i \neq j)$ é válido

$$\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Definição 1.2.5. *[12] 1. Uma função de conjunto $\mu : \mathcal{E} \to [-\infty; +\infty]$ chama-se medida se:*

a) μ é definida num semi-anel, isto é, $\mathcal{E}$ é um semi-anel de conjuntos,

b) μ é não-negativa, isto é, $0 \leq \mu(A) \leq +\infty$ qualquer que seja $A \in \mathcal{E}$,

c) μ é aditiva.

2. Uma função de conjunto σ-aditiva que é uma medida diz-se medida σ-aditiva.

3. Uma medida chama-se finita se $\mu(A) < +\infty$ qualquer que seja $A \in \mathcal{E}$.

Teorema 1.2.4. *[2, Cap1, pg11-15] Seja $\mathcal{E}$ um anel, $A, B, A_n \in \mathcal{E}$ e μ uma medida definida no anel $\mathcal{E}$. São válidas as seguintes proposições:*

a) $\mu(\emptyset) = 0$;

b) $\mu(\sqcup_{n=1}^{m} A_n) = \sum_{n=1}^{m} \mu(A_n)$ (aditividade finita de medida);

c) $[A \subseteq B] \Rightarrow [\mu(A) \leq \mu(B)]$ (monotonia de medida);

d) $[\mu(A) < +\infty,\ A \subseteq B] \Rightarrow [\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)]$;

e) $\mu(A \cup B) = \mu(A \cap B) + \mu(A \triangle B)$;

f) Se $\mu(A \cap B) < +\infty$, então $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$;

g) $[A \subseteq \cup_{n=1}^{m} A_n] \Rightarrow [\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{m} \mu(A_n)]$ (semi-aditividade finita de medida).

Definição 1.2.6. *Um trio $(S; \Sigma; \mu)$ chama-se espaço de medida se:*

a)S é conjunto não vazio,

b)Σ é alguma σ-álgebra de subconjuntos de S com unidade S (tal que $(S; \Sigma)$ é espaço mensurável,

c)$\mu : \Sigma \to [0; \infty]$ é uma medida σ-aditiva.

Seja $(S;\Sigma;\mu)$ um espaço de medida.

Definição 1.2.7. *A medida* $\mu:\mathcal{E}\to[-\infty;+\infty]$ *diz-se:*

a) completa se $[A\in\Sigma,\ \mu(A)=0, B\subseteq A]\Rightarrow[B\in\Sigma]$ *(é claro que neste caso* $\mu(B)=0$*);*

b) finita se $\mu(S)<\infty$*;*

c) σ*-finita se existem* $S_n\in\Sigma, n\in\mathbb{N}$ *de medida finita (i.e.* $\mu(S_n)<\infty$*) tal que* $S=\cup_{n=1}^{\infty}S_n$*.*

d) probabilística se $\mu(S)=1$*.*

Se são compridas as condições a), b), c) ou d) diz-se que o mesmo espaço de medida (S,Σ,μ) é completo, finito, σ-finito ou probabilístico respectivamente.

Definição 1.2.8. *Seja* X *um conjunto não vazio. Uma aplicação*

$$\mu^*:\mathcal{P}(X)\longrightarrow[0,+\infty]$$

diz-se uma medida externa *em* X *se satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\mu^*(\emptyset)=0$*;*
2. *se* $A,B\subseteq X$ *e* $A\subseteq B$*, então* $\mu^*(A)\le\mu^*(B)$*;*
3. *para toda sequência* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{P}(X)$*, tem-se*

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\le\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n).$$

Definição 1.2.9. *Seja* X *um conjunto não-vazio e* $\mathcal{A}$ *uma álgebra de subconjuntos de* X*. Uma aplicação* $\mu_0:\mathcal{A}\to[0,+\infty]$ *chama-se uma pré-medida se satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\mu_0(\emptyset)=0$*;*
2. *Se* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência disjunta de conjuntos em* $\mathcal{A}$ *tal que* $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{A}$*, então*

$$\mu_0\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_0(A_n).$$

Teorema 1.2.5. *[2, Cap, pg16-20] Seja* X *um conjunto não-vazio,* $\mathcal{A}$ *uma álgebra de subconjuntos de* X *e* $\mu_0:\mathcal{A}\to[0,+\infty]$ *uma pré-medida. Então:*

1. *Existe uma medida externa* μ^* *definida em* $\mathcal{P}(X)$ *por*

$$\mu^*(E)=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu_0(A_n):E\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n,\ A_n\in\mathcal{A}\right\}.$$

2. O conjunto

$$\Sigma = \{E \subseteq X : \forall A \subseteq X,\ \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap X \setminus E)\}$$

é uma σ-álgebra sobre X.

3. A restrição $\mu = \mu^*|_\Sigma$ é uma medida completa sobre Σ.

4. Se μ_0 é σ-finita, então μ é a única medida definida sobre $\sigma(\mathcal{A})$ tal que

$$\mu|_{\mathcal{A}} = \mu_0.$$

Demonstração. Definimos $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ por

$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n) : E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,\ A_n \in \mathcal{A}\right\}.$$

1. Mostremos que μ^* é uma medida externa.

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$. De facto $\emptyset \in \mathcal{A}$ então $\mu^*(\emptyset) \leq \mu_0(\emptyset) = 0$. Po outro lado $\mu^* \geq 0$, segue que $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(ii) Pelo Teorema 1.2.4, se $E \subseteq F$, então $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$.

(iii) Pelo Teorema 1.2.4, $(E_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(X)$ e $\varepsilon > 0$, então, para cada k, existe uma sequência $(A_{k,n})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ tal que

$$E_k \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{k,n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_{k,n}) \leq \mu^*(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Assim, $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \subseteq \bigcup_{k,n} A_{k,n}$, e, portanto,

$$\mu^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_{k,n}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k) + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário,

$$\mu^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k).$$

Logo, pela Definição (1.2.8) μ^* é uma medida externa.

2. Definimos $\Sigma = \{E \subseteq X : \forall A \subseteq X,\ \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)\}$.

(i) $\emptyset \in \Sigma$. Para todo $A \subseteq X$,

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap \emptyset) + \mu^*(A \cap X).$$

(ii) Se $E \in \Sigma$, trocando E por E^c na definição, obtemos $E^c \in \Sigma$.

(iii) Se $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Sigma$ são disjuntos, então, usando indução finita e a subaditividade de μ^*, obtém-se

$$\mu^*(A) = \mu^*\Big(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) + \mu^*\Big(A \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big)^c\Big),$$

para todo $A \subseteq X$. Logo, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma$, e Σ é uma σ-álgebra.

3. Se $(E_n) \subseteq \Sigma$ são disjuntos, então, pela Definição 1.2.2,

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Além disso, se $N \in \Sigma$ e $\mu(N) = 0$, então para qualquer $B \subseteq N$,

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(N) = 0,$$

logo $B \in \Sigma$ e $\mu(B) = 0$. Assim, μ é completa.

4. Suponha que μ_0 é σ-finita e seja ν uma medida em $\sigma(\mathcal{A})$ tal que $\nu|_{\mathcal{A}} = \mu_0$. Pelo teorema da classe monótona apresentado em ([2], cap1, pg33) , conclui-se que

$$\nu(E) = \mu(E), \qquad \forall\, E \in \sigma(\mathcal{A}).$$

Logo, a extensão é única. □

Exemplo 1.2.3. *[2][Construção da medida de Lebesgue] Seja $\mathcal{A}$ o semi-anel dos intervalos semi-abertos de $\mathbb{R}$:*

$$\mathcal{A} = \{[a,b) : a < b\} \cup \{\emptyset\}.$$

Defina a função $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, +\infty)$ por

$$\mu_0([a,b)) = b - a, \quad \mu_0(\emptyset) = 0.$$

A função μ_0 é uma pré-medida, pois:

a) $\mu_0(\emptyset) = 0$;

b) Se $[a,b) = \bigsqcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i)$ é uma decomposição disjunta de intervalos semi-abertos, então

$$\mu_0([a,b)) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu_0([a_i, b_i)).$$

Aplicando o Teorema 1.2.5, obtemos:

1. *uma medida externa μ^* sobre $\mathbb{R}$ dada por*

$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) : E \subseteq \bigcup_i [a_i, b_i)\right\};$$

2. *uma σ-álgebra Σ dos conjuntos mensuráveis ;*

3. *a medida $\mu(E) = \mu^*(E)$ para $E \in \Sigma$.*

Observação 1.2.2. *A medida μ assim construída chamamos de medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$.*

1.3 Operadores Lineares

Nesta secção, definimos operadores lineares em espaços normados e as suas propriedades. Para mais detalhes veja em [1], [7] e [21].

Definição 1.3.1. *Sejam X um conjunto não-vazio e $\rho(x, y)$ uma função real definida sobre $X \times X$. O conjunto X junto com a função ρ chama-se espaço métrico se a função ρ é não negativa $(\rho(x, y) \geq 0)$ e satisfaz às seguintes condições:*

a) $\rho(x; y) = 0, \; x = y;$

b) $\rho(y, x) = \rho(x, y), \; x, y \in X;$ *(simetria)*

c) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z), \; x, y, z \in X$ *(propriedade triangular).*

A função $\rho(x, y)$ chama-se métrica no espaço X (sobre X). Os elementos do espaço métrico vamos chamar pontos. $\rho(x, y)$ é a distância entre os pontos x e y. As condições a), b) e c) chamam-se axiomas da métrica.

Definição 1.3.2. *Uma sucessão $\{x_n\} \subset X$ de pontos de um espaço métrico (X, ρ) chama-se sucessão fundamental ou sucessão de Cauchy se*

$$(\forall \varepsilon > 0) \; (\exists N = N(\varepsilon) \in N) \; (\forall n, m \geq N) : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Lema 1.3.1. *[12, Cap1, pg62] Toda sucessão convergente em um espaço métrico é uma sucessão de Cauchy.*

Definição 1.3.3. *Diz-se que um espaço métrico é completo se toda sucessão de Cauchy for convergente.*

Exemplo 1.3.1. *Todo espaço métrico (X, ρ), com*

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y, \end{cases}$$

é completo. Seja (x_n) uma sucessão de Cauchy. Tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}$, existe N tal que $\rho(x_n, x_m) < \frac{1}{2}$ para todos $n, m \geq N$. Como ρ só assume os valores 0 ou 1, segue que $x_n = x_m$ para todos $n, m \geq N$, ou seja, a sucessão é constante. Logo, (x_n) converge, e o espaço é completo.

Exemplo 1.3.2. *O espaço métrico $(\mathbb{R}, \rho)$, onde $\rho(x, y) = |x - y|$ é completo. Seja (x_n) uma sucessão de Cauchy em $(\mathbb{R}, \rho)$. Primeiro observamos que toda sucessão de Cauchy é limitada. De facto, escolhendo $\varepsilon = 1$ existe N tal que para todos $n, m \geq N$ temos $|x_n - x_m| < 1$. Em particular, para $n \geq N$,*

$$|x_n - x_N| < 1,$$

portanto os termos x_n (com $n \geq N$) pertencem ao intervalo $[x_N - 1, x_N + 1]$. Os termos finitos $x_1, \ldots, x_{N-1}$ também são limitados, logo (x_n) é uma sucessão limitada.

Pelo Teorema de Bolzano–Weierstrass, toda sucessão limitada em $\mathbb{R}$ tem uma subsequência convergente [7, cap2, pg266]. Deste modo, existe uma subsequência (x_{n_k}) e um número $x \in \mathbb{R}$ tais que $x_{n_k} \longrightarrow x \quad (k \to \infty)$.

Mostremos agora que a sucessão inteira (x_n) *converge para* x. *Seja* $\varepsilon > 0$. *Como* (x_n) *é de Cauchy, existe* N_1 *com* $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ *para todos* $n, m \geq N_1$. *Como* $x_{n_k} \to x$, *existe* k_0 *tal que para todo* $k \geq k_0$ *temos* $|x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. *Escolhendo* k *com* $n_k \geq N_1$ *(isto é possível porque* $n_k \to \infty$*), seja* $M = \max\{N_1, n_{k_0}\}$. *Para qualquer* $n \geq M$ *temos*

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_{k_0}}| + |x_{n_{k_0}} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto $x_n \to x$. *Concluímos que toda sucessão de Cauchy em* $(\mathbb{R}, \rho)$ *converge em* $\mathbb{R}$, *isto é,* $(\mathbb{R}, \rho)$ *é completo.*

Definição 1.3.4. *Dado um espaço vectorial* X, *chama-se norma em* X *geralmente denotado por* $\|\cdot\|$, *uma função de* X *em* $\mathbb{R}$ *tal que* $\forall\ x, y \in X$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *satisfaz as seguintes proposições(que se chama axiomas da norma):*

1. $\|f\| \geq \theta$, *sendo que* $\|f\| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ *(*θ *é o elemento zero de* X *);*

2. $\|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|$;

3. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ *(desigualdade triangular).*

Chama-se espaço normado ao par $(X, \|\cdot\|)$ constituído por um espaço vectorial X e uma norma $\|\cdot\|$ definida sobre X .

Os conceitos de operadores lineares, contínuos e limitados em espaços normados, assim como de álgebras normadas, são fundamentais em Análise Funcional e seguem de forma rigorosa em [21].

Considere D, B, W, Z e Y espaços normados em $\mathbb{R}$.

Definição 1.3.5. *Seja* $X = \mathbb{R}$. *Uma álgebra* $\tilde{\mathcal{A}}$ *sobre* $\mathbb{R}$ *é um espaço vectorial sobre* $\mathbb{R}$ *munido de uma operação de multiplicação* : $\tilde{\mathcal{A}} \times \tilde{\mathcal{A}} \to \tilde{\mathcal{A}}$ *satisfazendo as seguintes propriedades, para todos* $x, y, z \in \tilde{\mathcal{A}}$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$*:*

a) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

b) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

c) $(\lambda x) \cdot y = x \cdot (\lambda y) = \lambda(x \cdot y)$

Se existe um elemento $1_{\tilde{\mathcal{A}}} \in \tilde{\mathcal{A}}$ tal que $1_{\tilde{\mathcal{A}}} \cdot x = x \cdot 1_{\tilde{\mathcal{A}}} = x$ para todo $x \in \tilde{\mathcal{A}}$, então dizemos que $\tilde{\mathcal{A}}$ é uma álgebra de unidade.

Uma álgebra normada é uma álgebra $\tilde{\mathcal{A}}$ sobre $\mathbb{R}$ dotada de uma norma $\|\cdot\| : \tilde{\mathcal{A}} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \quad \forall x, y \in \tilde{\mathcal{A}}.$$

Definição 1.3.6. *Diz-se que um operador* $F : D \to Y$ *é contínuo no ponto* $x_0 \in D$ *se*

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x \in D) : \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|Fx - Fx_0\| < \varepsilon$$

Diz-se que F é contínuo no conjunto $D_1 \subset D$ se for contínuo em todos os pontos de D_1.

Diz-se que F é contínuo se for contínuo em D.

Teorema 1.3.1. *[13, Cap4, pg102-104] As seguintes condições são equivalentes :*

a)O operador F é contínuo no ponto x_0;

b) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : F(B_\delta(x_0, X)) \subset B_\varepsilon(F(x_0), Y)$; onde $B_\varepsilon(F(x_0), Y) = \{y \in Y : \rho_Y(y, F(x_0)) < \varepsilon\}$ é a bola aberta de raio ε centrada em $F(x_0)$ no espaço Y;

c)Se $x_n \in D$ e $x_n \to x_0$ em X, então $Fx_n \to Fx_0$ em Y.

Definição 1.3.7. *Seja X um espaço vectorial(veja em [1] páginas1-7) sobre um corpo $\mathbb{R}$. Um subconjunto não vazio $D \subset X$ chama-se um* subespaço linear *de X se satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *$0 \in D$;*

2. *se $x, y \in D$, então $x + y \in D$;*

3. *se $x \in D$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então $\lambda x \in D$.*

Definição 1.3.8. *Um operador $A : D \to Y$ é linear se:*

1. *D é um subespaço linear de X ;*

2. *$A(x + y) = Ax + Ay,\ \forall\ x, y \in D$ (o operador A é aditivo);*

3. *$A(\lambda x) = \lambda A_x\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall x \in D$ (o operador A é homogéneo).*

Teorema 1.3.2. *O operador $F : D \to Y$ é contínuo, se e somente se a pré-imagem de qualquer conjunto aberto em Y é um conjunto aberto no subespaço D do espaço X.*

Definição 1.3.9. *Diremos que o operador $F : D \to Y$ é limitado no conjunto $D_1 \subset D$ se transformar qualquer conjunto limitado em D_1 num conjunto limitado em Y, ou seja:*

$$(\forall r > 0)\ (\exists \delta > 0) : F(D_1 \cap B_r[X]) \subset B_\delta[Y],$$

onde

$$B_r[X] = \{x \in X : \|x\|_X < r\}, \quad B_\delta[Y] = \{y \in Y : \|y\|_Y < \delta\}$$

são, respectivamente, as bolas abertas de raio r em X e de raio δ em Y.

Observação 1.3.1. *O operador F chama-se limitado se é limitado em D*

Proposição 1.3.1. *[4, cap2, pg24] Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços normados e $T : X \to Y$ um operador linear. O operador T diz-se* limitado *se existe uma constante $C \geq 0$ tal que*

$$\|T(x)\|_Y \leq C\,\|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

Definição 1.3.10. *Seja $A : X \to Y$ um operador linear entre espaços normados $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$. Define-se a norma do operador A como*

$$\|A\| = \inf_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y.$$

Proposição 1.3.2. *[4, cap2, pg25-26] Sejam $F_1, F_2 : D \to Y$ operadores, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $F = \alpha F_1 + \beta F_2$ (combinação linear dos operadores F_1 e F_2). Então, são válidas as seguintes afirmações:*

1. Se F_1 e F_2 são contínuos num ponto $x_0 \in D$, então o operador F também é contínuo no ponto x_0 (em D, respectivamente).

2. Se F_1 e F_2 são limitados, então o operador F também é limitado.

Definição 1.3.11. *Sejam $F_1 : D_1 \to Y$, $F_2 : D_2 \to Z$ dois operadores definidos em $D_1 \subset X$ e em $D_2 \subset Y$, respectivamente, sendo que $D_2 \supset F_1(D_1)$. O operador $T : D_1 \to Z$, definido por*

$$Tx = F_2(F_1 x), \quad x \in D_1$$

chama-se produto do operador F_1 por operador F_2 , e denota-se por $T = F_2 F_1$.

Proposição 1.3.3. *[4, cap2, pg23] O produto dos operadores é associativo. Mais precisamente, se $F_1 : D_1 \to Y, F_2 : D_2 \to Z$ e $F_3 : D_3 \to W$ onde $D_1 \subset X$, $F_1(D_1) \subset D_2 \subset Y$ e $F_2(D_2) \subset D_3 \subset Z$,então*

$$F_3(F_2F_1) = (F_3F_2)F_1 :$$

Proposição 1.3.4. *Sejam $F_1 : D_1 \to Y$, $F_2 : D_2 \to Z$ dois operadores definidos em $D_1 \subset X$ e em $D_2 \subset Y$, respectivamente, sendo que $D_2 \supset F_1(D_1)$. Seja $T = F_2 F_1$. Então, são válidas as seguintes afirmações:*

1. Se F_1 é contínuo num ponto $x_0 \in D_1$ e F_2 é contínuo no ponto $F_1(x_0)$, então o operador T é contínuo no ponto x_0 .

2. Se F_1 e F_2 são contínuos, então o operador T também é contínuo.

3. Se F_1 e F_2 são limitados, então o operador T também é limitado.

Proposição 1.3.5. *Seja X e Y espaços normados, e seja $L : X \to Y$ um operador linear. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

a) L é contínuo.

b) L é contínuo em um ponto $x_0 \in X$.

c) L é limitado, isto é, existe $C \geq 0$ tal que $\|L(x)\|_Y \leq C \|x\|_X, \quad \forall x \in X$.

1.4 Integral de Lebesgue

Nesta secção definimos a integral de Lebesgue e suas propriedades descritos nos manuais [2] e [16].

Definição 1.4.1. *A função $\chi_D : S \to \mathbb{R}$, (onde $D \subseteq S$) definida pela fórmula*

$$\chi_D = \begin{cases} 1, & se\ x \in D, \\ 0, & se\ x \in S \setminus D \end{cases}$$

Chama-se função característica do conjunto D*.*

Definição 1.4.2. *Uma função* $f : S \to \mathbb{R}$ *que tem a forma*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \chi_{D_i}(x), \;\; x \in S$$

onde $a_i \in \mathbb{R}, D_i \subseteq S \;\; (i = 1, 2, ..., n)$ *e* $a_i \neq a_j, \;\; D_i \cap D_j = \emptyset \;\; (i \neq j)$*, chama-se função elementar.*

Definição 1.4.3. *Uma função elementar* $f : S \to \mathbb{R}$ *que tem a forma*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot \chi_{D_i}(x), \;\; x \in S$$

onde $a_i \in \mathbb{R}, D_i \subseteq S \;\; (i = 1, 2, ..., n)$ *e* $a_i \neq a_j, \;\; D_i \cap D_j = \emptyset \;\; (i \neq j)$*, chama-se função de contradomínio enumerável.*

Observação 1.4.1. *Vejamos que também podemos dizer que uma função* $f : A \to \mathbb{R}$ *chama-se de contradomínio enumerável se a imagem de* A *é um conjunto enumerável, no caso particular da imagem finita a função também denomina-se elementar. Cada função de contradomínio enumerável admite a representação canónica*

$$f(x) = \sum_{i \in I} y_i \cdot \chi_{A_i}(x)$$

onde $I = \{1, 2, ..., n\}$ *para função elementar ou* $I = \mathbb{N}$ *no caso de* f *como de contradomínio enumerável,* $y_i \in \mathbb{R}, \;\; A_i \subseteq A(i \in I)$ *e* $y_i \neq y_j, \;\; A_i \cap Aj =; (i \neq j)$*.*

Assim sendo podemos definir a integral de Lebesgue da seguinte forma:

Definição 1.4.4. *[2] Considere* (X, Σ, μ) *um espaço de medida com medida finita e não negativa. Seja* $f : A \to \mathbb{R}$ *uma função de contradomínio enumerável, definimos a Integral de Lebesgue da função* f *pelo conjunto* A *como*

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_{i \in I} y_i \cdot \mu A_i(x)$$

Considere (X, Σ, μ) um espaço de medida finita e não negativa.

Proposição 1.4.1. *[8, cap2, pg41-43] As seguintes afirmações são verdadeiras:*

a)Uma função f *de contradomínio enumerável e integrável a Lebesgue é mensurável;*

b)Uma função elementar é integrável a Lebesgue se e somente se é mensurável;

c)$\int_A d\mu = \mu A$*.*

Definição 1.4.5. *Seja* (X, Σ, μ) *um espaço de medida. Uma função* $f : X \to \mathbb{R}$ *é dita* definida quase em toda parte *(ou* em quase todo lugar*) se existe um conjunto* $N \in X$ *com* $\mu(N) = 0$ *tal que* f *está definida em* $X \setminus N$. *Ou seja,*

$$f : X \setminus N \to \mathbb{R}, \quad \mu(N) = 0.$$

Teorema 1.4.1. *[8, cap2, pg46-47] Considere* (X, Σ, μ) *um espaço de medida . Seja* $f : X \to \mathbb{R}$ *uma função mensurável. Se existe um subconjunto* $A \subset X$, *com* $\mu(A) > 0$, *tal que*

$$f(x) \geq \delta > 0 \quad \textit{para todo } x \in A,$$

então:

$$\int_X f \, d\mu > 0.$$

Teorema 1.4.2. *[2, cap2, pg116-121] Seja* (X, Σ, μ) *um espaço de medida com medida finita e não negativa. A integral de Lebesgue definida anteriormente possui as seguintes propriedades:*

1. *Se* f *é uma função integrável e* $f \geq 0$ *quase em todo lugar, então*

$$\int_X f(x) \, \mu(dx) \geq 0;$$

2. *Se uma função* f *é integrável, então a função* $|f|$ *também é integrável e*

$$\left| \int_X f(x) \, \mu(dx) \right| \leq \int_X |f(x)| \, \mu(dx);$$

3. *Toda função limitada e* μ*-mensurável* f *é integrável, e*

$$\left| \int_X f(x) \, \mu(dx) \right| \leq \sup_{x \in X} |f(x)| \cdot \mu(X);$$

4. *Se duas funções* f *e* g *são integráveis, então, para todos* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *a função* $\alpha f + \beta g$ *é integrável e*

$$\int_X (\alpha f(x) + \beta g(x)) \, \mu(dx) = \alpha \int_X f(x) \, \mu(dx) + \beta \int_X g(x) \, \mu(dx).$$

Em particular, se A *e* B *são conjuntos disjuntos em* $\mathcal{A}_\mu$, *então, para toda função integrável* f, *tem-se*

$$\int_{A \cup B} f(x) \, \mu(dx) = \int_A f(x) \, \mu(dx) + \int_B f(x) \, \mu(dx);$$

5. Se funções integráveis f e g satisfazem $f(x) \leq g(x)$ quase em toda parte, então

$$\int_X f\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu.$$

Corolário 1.4.1. *[2, cap2, pg123] Se*

$$\int_X |f|\, d\mu = 0,$$

então $f = 0$ quase em todo lugar.

Definição 1.4.6. *Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Para um número real $1 \leq p < \infty$), define-se o espaço $L^p(X)$ como o conjunto das funções mensuráveis $f : X \to \mathbb{R}$ tais que:*

$$\int_X |f(x)|^p\, d\mu(x) < \infty,$$

ou seja,

$$L^p(X) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} \,\middle|\, \int_X |f(x)|^p\, d\mu(x) < \infty \right\}.$$

A norma associada é dada por:

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p\, d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

Para $p = \infty$, define-se o espaço:

$$L^\infty(X) = \left\{\, f : X \to \mathbb{R} \;\middle|\; \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| < \infty \,\right\}.$$

onde ess sup é o supremo essencial, isto é, $\operatorname{ess\,sup}_{x\in X} f(x) = \inf\Big\{ M \in \mathbb{R} \;\Big|\; \mu\big(\{x \in X : f(x) > M\}\big) = 0 \Big\}$.

Teorema 1.4.3. *Consideremos A o operador integral definido por*

$$(Ax)(t) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_a(t, s) x(s)\, ds,$$

com $k_a : [\alpha_1, \beta_1]^2 \to \mathbb{R}$ mensurável. Suponha que $k_a(t, \cdot) \in L^q([\alpha_1, \beta_1])$, $1 < p < \infty$ para quase todo t, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, e que exista constante $C > 0$ tal que

$$\left(\int_{\alpha_1}^{\beta_1} |k_a(t, s)|^q\, ds \right)^{1/q} \leq C \quad \text{para quase todo } t.$$

Então $A : L^p([\alpha_1, \beta_1]) \to L^p([\alpha_1, \beta_1])$ é um operador linear e contínuo.

Demonstração. Podemos aplicar a desigualdade de Hölder (veja em [8], Teorema 6.2):

$$|(Ax)(t)| \leq \int_{\alpha_1}^{\beta_1} |k_a(t,s)|\,|x(s)|\,ds \leq \left(\int_{\alpha_1}^{\beta_1} |k_a(t,s)|^q\,ds\right)^{1/q} \left(\int_{\alpha_1}^{\beta_1} |x(s)|^p\,ds\right)^{1/p}.$$

Pelo que foi assumido sobre k_a, temos:

$$|(Ax)(t)| \leq C\|x\|_{L^p}.$$

Elevando ambos lados à potência p e integrando em t, obtemos:

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} |(Ax)(t)|^p\,dt \leq \int_{\alpha_1}^{\beta_1} C^p\|x\|_{L^p}^p\,dt = C^p(\beta_1-\alpha_1)\|x\|_{L^p}^p.$$

Portanto:

$$\|Ax\|_{L^p} \leq C(\beta_1-\alpha_1)^{1/p}\|x\|_{L^p}.$$

Isso mostra que A é limitado de L^p em L^p. $\square$

Teorema 1.4.4. *[2, cap6, pg273-305] Sejam (X,μ) e (Y,ν) espaços de medida σ-finitos, e seja $K : X \times Y \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Suponha que exite um $C > 0$ tal que $\int_X |K(x,y)|d\mu(x) \leq C$ para quase todo $y \in Y$ e $\int_Y |K(x,y)|d\nu(y) \leq C$ para quase todo $x \in X$, e $1 \leq p \leq \infty$. Se $f \in L^p(\nu)$, a integral*

$$(Tf)(x) = \int_Y K(x,y)f(y)\,d\nu(y),$$

converge absolutamente, ou seja, $\int_Y |K(x,y)f(y)|\,d\nu(y) < \infty$ para quase todo $x \in X$ o operador Tf assim definitdo está em $L^p(\mu)$ e $\|Tf\| \leq C||f\|_p$.

Teorema 1.4.5. *[2, cap6, pg289-294][Fubini] Sejam μ e ν medidas finitas e não negativas sobre os espaços mensuráveis (X,Σ_1) e (Y,Σ_2), respectivamente. Para cada subconjunto $A \subset X\times Y$, definimos as secções:*

$$A_x = \{y \in Y : (x,y) \in A\}, \quad A_y = \{x \in X : (x,y) \in A\}. \tag{1.1}$$

onde, $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ denota a σ-álgebra produto, ou seja, a menor σ-álgebra em $X \times Y$ que contém todos os conjuntos do tipo $E_1 \times E_2$ com $E_1 \in \Sigma_1$ e $E_2 \in \Sigma_2$ e a medida produto $\mu\otimes\nu$ é a única medida sobre $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ que satisfaz

$$(\mu\otimes\nu)(E_1 \times E_2) = \mu(E_1)\cdot\nu(E_2), \quad E_1 \in \Sigma_1,\ E_2 \in \Sigma_2.$$

Se $A \in (\Sigma_1 \otimes \Sigma_2)_{\mu\otimes\nu}$, então:

- *Para μ-quase todo $x \in X$, o conjunto A_x é ν-mensurável e a função $x \mapsto \nu(A_x)$ é μ-mensurável;*

- *Para ν-quase todo $y \in Y$, o conjunto A_y é μ-mensurável e a função $y \mapsto \mu(A_y)$ é ν-mensurável.*

Além disso, vale a igualdade:

$$(\mu \otimes \nu)(A) = \int\limits_X \nu(A_x)\, \mu(dx) = \int\limits_Y \mu(A_y)\, \nu(dy).$$

Corolário 1.4.2. *[2, cap6, pag289] O Teorema 1.4.5 continua válido no caso em que μ e ν são medidas σ-finitas, desde que o conjunto $A \subset X \times Y$ tenha medida finita, ou seja:*

$$(\mu \otimes \nu)(A) < \infty.$$

Teorema 1.4.6. *[16, cap14, pg52][Fubini] Se A é um conjunto plano de medida zero, então A_x (definido em 1.1) é um conjunto linear nulo para todo x, excepto para um conjunto E de medida linear zero.*

Teorema 1.4.7. *[16, cap14, pg53] O recíproco do Teorema (1.4.6) é verdadeiro no sentido de que, se quase todas as secções de um conjunto de plano mensurável A são conjuntos nulos, então A é um conjunto nulo.*

Capítulo 2

Relações de Comutatividade envolvendo Operadores Lineares

No presente capítulo vamos estudar relações de comutatividade e construir representantes envolvolvendo operadores lineares definidos em L^p. Este capítulo é baseado nos seguintes manuais e artigos, [1], [4], [5], [6], [14], [19] e [23].

2.1 Relação de comutatividade para operadores integrais gerais

Nesta secção estudamos a relação de comutatividade $AB = BF(A)$ para operadores integrais gerais em $L^p(\mathbb{R})$, obtendo condições necessárias e suficientes expressas em termos dos núcleos integrais envolvidos.

Definição 2.1.1. *Sejam A e B operadores lineares definidos em um espaço vectorial V. Dizemos que A e B comutam se $AB = BA$ ou seja, a ordem de aplicação dos operadores não altera o resultado.*

Exemplo 2.1.1. *[23] Considere os operadores sobre $L^2(\mathbb{R})$ dados por:*

$$(Ax)(t) = f(t)x(t), \quad (Bx)(t) = g(t)x(t)$$

com $f, g \in L^\infty(\mathbb{R})$. Então:

$$ABx = f(t)g(t)x(t) = g(t)f(t)x(t) = BAx \Rightarrow AB = BA$$

Portanto A e B comutam.

Exemplo 2.1.2. *Consideremos o espaço vectorial $\mathbb{R}^2$ e os seguintes operadores lineares T e S:*

$$T(x, y) = (x, -y), \quad S(x, y) = (-y, x)$$

As matrizes associadas a esses operadores são:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$TS = T \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$ST = S \cdot T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$TS \neq ST.$$

Portanto, S e T não comutam.

Existem situações em que dois operadores não comutam mas satisfazem uma relação de comutação. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 2.1.3. *No espaço $L^p(\mathbb{R})$ $(1 \leq p \leq \infty)$, consideremos os operadores*

$$(Af)(t) = t\,f(t), \qquad (Bf)(t) = f(t-1).$$

Veja que

$$(ABf)(t) = A(Bf)(t) = t\,(Bf)(t) = t\,f(t-1).$$

e

$$(BAf)(t) = B(Af)(t) = (Af)(t-1) = (t-1)\,f(t-1).$$

Portanto $AB \neq BA$. Mas se considerarmos $F(z) = z+1$ então,

$$(BF(A)f)(t) = (B(A+I)f)(t) = ((A+I)f)(t-1).$$

Mas

$$((A+I)f)(t-1) = (t-1)f(t-1) + f(t-1) = t\,f(t-1).$$

Assim,

$$(BF(A)f)(t) = t\,f(t-1) = (ABf)(t),$$

o que mostra que

$$AB = B\,F(A),$$

com $F(z) = z+1$.

Conseguimos notar que dois operadores podem não comutar $(AB \neq BA)$, mas satisfazerem uma relação $AB - BA = g(A,B)$ onde g é alguma função polinomial de A e B. No Exemplo (2.1.3), $g(A,B) = B$.

Definição 2.1.2. *[14] Um operador linear que satisfaz uma relação de comutação chama-se de representante (ou representação) dessa relação de comutação.*

Vamos estudar a relação de comutação do tipo $AB = BF(A)$, onde A, B são operadores lineares integrais definidos em L^p e F é um polinómio. Vamos procurar representantes não triviais, pois se $B = 0$ então é solução feita. E se se $A = 0 \Rightarrow B = 0$ ou $F = 0$.

Seja $(\mathbb{R}, \Sigma, \mu)$ um espaço de medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$. Considere $A, B : L^p(\mathbb{R}) \longrightarrow L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, dois operadores integrais definidos por

$$(Ax)(t) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_a(t,s)\, x(s)\, ds, \qquad (Bx)(t) = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} k_b(t,s)\, x(s)\, ds,$$

onde $\alpha_i < \beta_i$ $(i = 1, 2)$, e os núcleos $k_a : \mathbb{R} \times [\alpha_1, \beta_1] \to \mathbb{R}$, $k_b : \mathbb{R} \times [\alpha_2, \beta_2] \to \mathbb{R}$ são mensuráveis e não nulos em conjuntos de medida positiva, garantindo que $A \neq 0$ e $B \neq 0$.

Estes operadores são lineares e limitados mediante as condições do Teorema 1.4.4, com isso, o objectivo é estudar relações entre A e B, em particular encontrar condições necessárias e suficientes sobre os núcleos k_a e k_b que assegurem a relação de comutatividade do tipo $AB = B\,F(A)$, onde $F(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ é um polinómio real. Para tal, comecemos por apresentar um lema que será útil ao longo da análise.

Lema 2.1.1. *Sejam $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha_1 < \beta_1$ e $\alpha_2 < \beta_2$. Sejam $f : [\alpha_1, \beta_1] \to \mathbb{R}$ e $g : [\alpha_2, \beta_2] \to \mathbb{R}$ funções mensuráveis tais que, para todo $x \in L^p(\mathbb{R})$, os integrais*

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(t)x(t)\, dt \quad e \quad \int_{\alpha_2}^{\beta_2} g(t)x(t)\, dt$$

são finitos. Defina

$$G = [\alpha_1, \beta_1] \cap [\alpha_2, \beta_2].$$

Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

1. *Para todo $x \in L^p(\mathbb{R})$,*
$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(t)x(t)\, dt = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} g(t)x(t)\, dt.$$

2. *As funções f e g satisfazem:*
$$\begin{aligned} f(t) = g(t) &\quad \textit{quase em todo lugar em } G, \\ f(t) = 0 &\quad \textit{quase em todo lugar em } [\alpha_1, \beta_1] \setminus G, \\ g(t) = 0 &\quad \textit{quase em todo lugar em } [\alpha_2, \beta_2] \setminus G. \end{aligned}$$

Demonstração. (1) $\Longrightarrow$ (2). Suponhamos que f e g satisfação a condição do item (1). Consideremos $x(t) = \chi_{G_1}(t)$ (veja a definição 1.4.1), onde $G_1 = [\alpha_1, \beta_1] \cup [\alpha_2, \beta_2]$ então para essa funcão temos a costante ξ tal que,

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(t)x(t)\, dt = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} g(t)x(t)\, dt = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(t)\, dt = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} g(t)\, dt = \xi$$

Agora pegando $x(t) = \chi_{[\alpha_1,\beta_1]\setminus G}(t)$ temos:

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(t)x(t)\,dt = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} g(t)x(t)\,dt = \int_{[\alpha_1,\beta_1]\setminus G} f(t)\,dt = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} g(t)\cdot 0\,dt = 0.$$

Então $\int_{[\alpha_1,\beta_1]\setminus G} f(t)\,dt = 0$. Se $\chi_{[\alpha_2,\beta_2]\setminus G}(t) = x(t)$, então

$$\int_{[\alpha_2,\beta_2]\setminus G} f(t)\,dt = 0.$$

Afirmamos que $f(t) = 0$ para quase todo $t \in [\alpha_1,\beta_1]\setminus G$ e $g(t) = 0$ para quase todo $t \in [\alpha_2,\beta_2]\setminus G$. Tendo uma partição arbitrária do conjunto $G_1 \setminus G = \bigcup S_i$, tal que $S_i \cap S_j = \emptyset$, $i = 1,2,3..$, $j = 1,2,3...$, $i \neq j$ e cada conjunto S_i tem uma medida positiva. Para cada $x_i(t) = \chi_{S_i}(t)$, temos

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(t)x_i(t)\,dt = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} g(t)x_i(t)\,dt \Rightarrow \int_{S_i} f(t)\,dt = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} g(t)\cdot 0\,dt = 0.$$

Assim, para cada S_i, $\int_{S_i} f(t)\,dt = 0$. Sendo assim, podemos escolher de forma arbitrária a partição com medida em cada um desses elementos $f(t) = 0$ para quase todo $t \in [\alpha_1,\beta_1]\setminus G$. De forma análoga , $g(t) = 0$ para quase todo $t \in [\alpha_2,\beta_2]\setminus G$. Então

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(t)x(t)\,dt = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} g(t)x(t)\,dt = \int_{G} f(t)\,dt = \int_{G} g(t)\;\,dt = \xi$$

Então, para todo $x \in L^p(\mathbb{R})$ temos

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(t)x(t)\,dt = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} g(t)x(t)\,dt \Longleftrightarrow \int_{G} (f(t)-g(t))x(t)\,dt = \int_{G} (g(t)-f(t))x(t)\,dt = 0$$

Considerando

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } f(t)-g(t) > 0, \\ -1, & \text{se } f(t)-g(t) < 0 \end{cases}$$

para quase todo $t \in G$ e $x(t) = 0$ para quase todo $t \in \mathbb{R}\setminus G$, a função $x(t)$ é mensurável. Como f e g são mensuráveis, a função $h(t) = f(t) - g(t)$ também é mensurável(veja o teorema 1.2.1). Portanto:

- $x^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. Conjunto vazio é mensurável.
- $x^{-1}(\{1\}) = \{t \in T : x(t) = 1\} = \{t \in T : f(t) - g(t) > 0\} = \{t \in T : h(t) > 0\}$, é mensurável;
- $x^{-1}(\{-1\}) = \{t \in T : x(t) = -1\} = \{t \in T : f(t) - g(t) < 0\} = \{t \in T : h(t) < 0\}$. é mensurável.
- $x^{-1}(\{-1, 1\}) = \{t \in T : f(t) \neq g(t)\} = \{t : f(t) - g(t) \neq 0\}$,
  Com isso:
  $$x^{-1}(\{-1, 1\}) = x^{-1}(\{1\}) \cup x^{-1}(\{-1\}),$$
  e é mensurável como união de dois conjuntos mensuráveis.

Como os conjuntos $x^{-1}(\{1\})$ e $x^{-1}(\{-1\})$, $x^{-1}(\emptyset)$ e $x^{-1}(\{-1, 1\})$ são mensuráveis, segue que x é uma função mensurável.

Com isso, temos que $\int\limits_G |f(t) - g(t)|\, d\mu = 0$, oque implica que $f(t) = g(t)$ para quase todo $t \in G$.

$(2) \implies (1)$. Assuma que:

- $f(t) = g(t)$ quase em todo lugar em G,
- $f(t) = 0$ quase em todo lugar em $[\alpha_1, \beta_1] \setminus G$,
- $g(t) = 0$ quase em todo lugar em $[\alpha_2, \beta_2] \setminus G$.

Seja $x \in L^p(\mathbb{R})$. Como os produtos $f(t)x(t)$ e $g(t)x(t)$ são integráveis, os integrais estão bem definidos. Podemos decompor os domínios de integração:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} f(t)x(t)\, dt &= \int\limits_{[\alpha_1,\beta_1]\setminus G} f(t)x(t)\, dt + \int\limits_G f(t)x(t)\, dt \\
&= 0 + \int\limits_G f(t)x(t)\, dt = \int\limits_G f(t)x(t)\, dt,
\end{aligned}$$

pois $f(t) = 0$ quase em todo lugar em $[\alpha_1, \beta_1] \setminus G$.

De modo análogo,

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\alpha_2}^{\beta_2} g(t)x(t)\, dt &= \int\limits_{[\alpha_2,\beta_2]\setminus G} g(t)x(t)\, dt + \int\limits_G g(t)x(t)\, dt \\
&= 0 + \int\limits_G g(t)x(t)\, dt = \int\limits_G g(t)x(t)\, dt,
\end{aligned}$$

pois $g(t) = 0$ quase em todo lugar em $[\alpha_2, \beta_2] \setminus G$.

Como $f(t) = g(t)$ quase em todo lugar em G, segue que $f(t)x(t) = g(t)x(t)$ quase em todo lugar em G, e assim:

$$\int\limits_G f(t)x(t)\,dt = \int\limits_G g(t)x(t)\,dt.$$

Portanto,

$$\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} f(t)x(t)\,dt = \int\limits_G f(t)x(t)\,dt = \int\limits_G g(t)x(t)\,dt = \int\limits_{\alpha_2}^{\beta_2} g(t)x(t)\,dt.$$

□

Vamos assumir que os operadores A, B lineares são limitados de L^p para L^p sem estabelecer condições dos núcleos para que estejam bem definidos.

Lema 2.1.2. *Seja $A : L_p(\mathbb{R}) \to L_p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, o operador integral definido por*

$$(Ax)(t) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_a(t,s)x(s)\,ds,$$

onde $k_a : \mathbb{R} \times [\alpha_1, \beta_1] \to \mathbb{R}$ é mensurável. Defina recursivamente os núcleos $k_{a,m}$ por

$$k_{a,0}(t,s) = k_a(t,s) \quad \text{e para} \quad m \geq 1,$$

$$k_{a,m}(t,s) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_a(t,r)\,k_{a,m-1}(r,s)\,dr. \tag{2.1}$$

Então, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in L_p(\mathbb{R})$, vale

$$(A^n x)(t) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_{a,n-1}(t,s)\,x(s)\,ds.$$

Demonstração. Demonstremos o lema por indução matemática em n, veja em [19], página 311. Seja $n = 1$, por definição de A,

$$(Ax)(t) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_a(t,s)x(s)\,ds = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_{a,0}(t,s)x(s)\,ds,$$

logo a afirmação é verdadeira para $n = 1$. Suponha que, para algum $n \geq 1$, vale

$$(A^n x)(t) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_{a,n-1}(t,s)x(s)\,ds, \quad \forall\, x \in L_p(\mathbb{R}).$$

Então,

$$\begin{aligned}
(A^{n+1}x)(t) &= A(A^n x)(t) \\
&= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_a(t,s)\,(A^n x)(s)\,ds \\
&= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_a(t,s)\left(\int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_{a,n-1}(s,r)x(r)\,dr\right)ds.
\end{aligned}$$

Pela linearidade da integral e pelo teorema de Fubini,

$$(A^{n+1}x)(t) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left(\int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_a(t,s) k_{a,n-1}(s,r)\, ds \right) x(r)\, dr.$$

Pela fórmula 2.1,

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_a(t,s) k_{a,n-1}(s,r)\, ds = k_{a,n}(t,r).$$

Logo,

$$(A^{n+1}x)(t) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_{a,n}(t,r) x(r)\, dr.$$

Portanto, por indução, a fórmula vale para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Vamos apresentar no teorema a seguir condições necessárias e suficientes para operadores lineares integrais gerais em termos dos núcleos integrais envolvidos. Vamos aplicar o Lema 2.1.2 e o Lema 2.1.1.

Teorema 2.1.1. *Seja $A, B : L_p(\mathbb{R}) \to L_p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$, operadores não nulos definidos por:*

$$(Ax)(t) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_a(t,s) x(s)\, ds, \quad (Bx)(t) = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} k_b(t,s) x(s)\, ds,$$

onde α_i, β_i, $i = 1,2$, $\alpha_i < \beta_i$, , $k_a : \mathbb{R} \times [\alpha_1, \beta_1] \to \mathbb{R}$ e $k_b : \mathbb{R} \times [\alpha_2, \beta_2] \to \mathbb{R}$ são funções mensuráveis. Considere o polinómio definido por:

$$F_n(z) = \sum_{j=0}^{n} \delta_j z^j, \text{ onde } \delta_j \in \mathbb{R},\ j = 0, ..., n. \text{ Considere } G = [\alpha_1, \beta_1] \cap [\alpha_2, \beta_2] \text{ e}$$

$$k_{a,0}(t,s) = k_a(t,s),\ k_{a,m}(t,s) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_a(t,r) k_{a,m-1}(r,s) dr,\ m = 1, ..., n,$$

$$F_0(k_a(t,s)) = 0,\ F_n(k_a(t,s)) = \sum_{j=1}^{n} \delta_j k_{a,j-1}(t,s),\ \text{se } n \ge 1.$$

Então, $AB = BF(A)$ se e só se as condições seguintes são satisfeitas:

1. *para quase todo $(t,r) \in \mathbb{R} \times G$,*

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_a(t,s) k_b(s,r) ds - \delta_0 k_b(t,r) = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} k_b(t,s) F_n(k_a(s,r)) ds;$$

2. *para quase todo $(t,r) \in \mathbb{R} \times ([\alpha_2, \beta_2] \setminus G)$,*

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_a(t,s) k_b(s,r) ds = \delta_0 k_b(t,r);$$

3. para quase todo $(t,r) \in \mathbb{R} \times ([\alpha_1, \beta_1] \setminus G)$,

$$\int_{\alpha_2}^{\beta_2} k_b(t,s)F_n(k_a(s,r))ds = 0;$$

Demonstração. Aplicando o teorema de Fubini, kernel e pelo Lema 2.1.2 temos:

$$\begin{aligned}
(A^2x)(t) &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_a(t,s)(Ax)(s)ds = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_a(t,s)\left(\int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_a(s,r)x(r)\,dr\right) ds \\
&= \int_{\alpha_1}^{\beta_1}\left(\int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_a(t,s)k_a(s,r)ds\right) x(r)\,dr = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_{a,1}(t,r)x(r)dr,
\end{aligned}$$

onde

$$k_{a,1}(t,s) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_a(t,r)k_a(r,s)dr;$$

$$\begin{aligned}
(A^3x)(t) &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_a(t,s)(A^2x)(s)ds = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_a(t,s)\left(\int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_{a,1}(s,r)x(r)dr\right) ds \\
&= \int_{\alpha_1}^{\beta_1}\left(\int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_a(t,s)k_{a,1}(s,r)ds\right) x(r)dr = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_{a,2}(t,r)x(r)dr,
\end{aligned}$$

onde

$$k_{a,2}(t,s) = \int_{\alpha}^{\beta} k_a(t,r)k_{a,1}(r,s)dr,$$

$$(A^n x)(t) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_{a,n-1}(t,s)x(s)ds,$$

onde

$$k_{a,m}(t,s) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_a(t,r)k_{a,m-1}(r,s)dr,\ m = 1, ...,\ k_{a,0}(t,s) = k_a(t,s). \tag{2.2}$$

Daqui segue que

$$\begin{aligned}(F(A)x)(t) &= \delta_0 x(t) + \sum_{j=1}^{n} \delta_j (A^j x)(t) = \delta_0 x(t) + \sum_{j=1}^{n} \delta_j \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} k_{a,j-1}(t,s)x(s)ds && (2.3)\\ &= \delta_0 x(t) + \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} F_n(k_a(t,s))x(s)ds, && (2.4)\end{aligned}$$

onde

$$F_0(k_a(t,s)) = 0 \ \ , \ F_n(k_a(t,s)) = \sum_{j=1}^{n} \delta_j k_{a,j-1}(t,s), \text{ se, } n \geq 1. \tag{2.5}$$

Agora, calculamos $BF(A)x$ e $(AB)x$. Temos,

$$\begin{aligned}(BF(A)x)(t) &= \int\limits_{\alpha_2}^{\beta_2} k_b(t,s)(F(A)x)(s)ds\\ &= \int\limits_{\alpha_2}^{\beta_2} k_b \left(\delta_0 x(s) + \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} F_n(k_a(s,r)x(r)dr) \right) ds\\ &= \delta_0 \int\limits_{\alpha_2}^{\beta_2} k_b(t,s)x(s)ds + \int\limits_{\alpha_2}^{\beta_2} \left(\int\limits_{\alpha_2}^{\beta_2} k_b(t,s)F_n(k_a(s,r))ds \right) x(r)dr\\ &= \delta_0 \int\limits_{\alpha_2}^{\beta_2} k_b(t,s)x(s)ds + \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} k_{a,b}(t,r)x(r)dr\end{aligned}$$

onde

$$k_{a,BFA}(t,r) = \int\limits_{\alpha_2}^{\beta_2} k_b(t,s)F_n(k_a(s,r))ds,$$

$$\begin{aligned}(ABx)(t) &= \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} k_a(t,s)(Bx)(s)ds = \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} k_a(t,s) \left(\int\limits_{\alpha_2}^{\beta_2} k_b(s,r)x(r)dr \right) ds\\ &= \int\limits_{\alpha_2}^{\beta_2} \left(\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} k_a(t,s)k_b(s,r)ds \right) x(r)dr = \int\limits_{\alpha_2}^{\beta_2} k_{ab}(t,r)x(r)dr,\end{aligned}$$

onde

$$k_{ab}(t,r) = \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} k_a(t,s)k_b(s,r)ds.$$

Portanto , $(ABx)(t) = (BF(A)x)(t)$ para todo $x \in L_p(\mathbb{R})$ se e só se

$$\int\limits_{\alpha_2}^{\beta_2} (k_{ab}(t,r) - \delta_0 k_b(t,r)x(r)dr = \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} k_{a,BFA}(t,r)x(r)dr.$$

Aplicando o teorema 1.4.6, a observação 1.4.7 e o lema 2.1.1, temos que $AB = BF(A)$ se e só se as seguintes condições são verificadas:

1. para quase todo $(t, r) \in \mathbb{R} \times G$,

$$\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} k_a(t,s)k_b(t,r)ds - \delta_0 k_b(t,r) = \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} k_b(t,r)F_n(k_a(s,r))ds;$$

2. para quase todo $(t, s) \in \mathbb{R} \times ([\alpha_2, \beta_2] \setminus G)$,

$$\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} k_a(t,s)k_b(t,r)ds = \delta_0 k_b(t,r);$$

3. para quase todo $(t, r) \in \mathbb{R} \times ([\alpha_1, \beta_1] \setminus G)$,

$$\int\limits_{\alpha_2}^{\beta_2} k_b(t,s)F_n(k_a(t,r))ds = 0$$

□

Exemplo 2.1.4. *Sejam* $A : L^p([-2\pi, 2\pi]) \to L^p([-2\pi, 2\pi])$, $B : L^p([-2\pi, 2\pi]) \to L^p([-2\pi, 2\pi])$, *com* $1 \leq p \leq \infty$, *operadores não nulos definidos por:*

$$\begin{aligned} (Ax)(t) &= \int\limits_0^\pi [a_1 \cos t \cos s + a_2 \sin t \sin s + a_3 \cos t \sin s]\, x(s)\, ds, \\ (Bx)(t) &= \int\limits_0^\pi [b_1 \cos t \cos s + b_2 \sin t \sin s]\, x(s)\, ds. \end{aligned}$$

Podemos encontrar as constantes a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 *e* δ *tal que:*

$$\boxed{AB = \delta BA^2}.$$

Usando o Teorema 2.1.1 para verificar a igualidade $AB = \delta BA^2$, *é fácil notar que* $f(z) = \delta z^2$, *então* $n = 2$, $\delta_0 = 0$, $\delta_1 = 0$ *e* $\delta_2 = \delta$. *Portanto,*

$$k_{a,0}(t,s) = k_a(t,s) = a_1 \cos t \cos s + a_2 \sin t \sin s + a_3 \cos t \sin s,$$

$$F_2(t,s) = k_{a,1}(t,s) = \int\limits_0^\pi k_a(t,r)k_a(r,s)dr,$$

$$k_{a,1}(t,s) = \int_0^\pi k_a(t,r)\, k_a(r,s)\, dr = \int_0^\pi I_{a,b}\, dr$$

onde

$$I_{a,b} = (a_1 \cos t \cos r + a_2 \sin t \sin r + a_3 \cos t \sin r) \cdot (a_1 \cos r \cos s + a_2 \sin r \sin s + a_3 \cos r \sin s)$$

Expandindo o produto da integral:

$$\begin{aligned} k_{a,1}(t,s) = \int_0^\pi \Big[& a_1^2 \cos t \cos^2 r \cos s + a_1 a_2 \cos t \cos r \sin r \sin s + a_1 a_3 \cos t \cos^2 r \sin s \\ & + a_2 a_1 \sin t \sin r \cos r \cos s + a_2^2 \sin t \sin^2 r \sin s + a_2 a_3 \sin t \sin r \cos r \sin s \\ & + a_3 a_1 \cos t \sin r \cos r \cos s + a_3 a_2 \cos t \sin^2 r \sin s + a_3^2 \cos t \sin r \cos r \sin s \Big] dr \end{aligned}$$

Utilizamos as identidades:

$$\int_0^\pi \cos^2 r\, dr = \int_0^\pi \sin^2 r\, dr = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^\pi \sin r \cos r\, dr = 0$$

Eliminando os termos com integrais nulas, temos:

$$\begin{aligned} k_{a,1}(t,s) &= a_1^2 \cos t \cos s \cdot \int_0^\pi \cos^2 r\, dr + a_1 a_3 \cos t \sin s \cdot \int_0^\pi \cos^2 r\, dr \\ &\quad + a_2^2 \sin t \sin s \cdot \int_0^\pi \sin^2 r\, dr + a_2 a_3 \cos t \sin s \cdot \int_0^\pi \sin^2 r\, dr \end{aligned}$$

Substituindo os valores das integrais

$$k_{a,1}(t,s) = \frac{\pi}{2} \left[a_1^2 \cos t \cos s + a_2^2 \sin t \sin s + (a_1 a_3 + a_2 a_3) \cos t \sin s \right]$$

Calculemos agora

$$I_1 = \int_0^\pi k_a(t,s) \cdot k_b(s,r)\, ds.$$

Substituindo as expressões de $k_a(t,s)$ *e* $k_b(s,r)$*:*

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\pi (a_1 \cos t \cos s + a_2 \sin t \sin s + a_3 \cos t \sin s) \cdot (b_1 \cos s \cos r + b_2 \sin s \sin r)\, ds \\ &= \int_0^\pi \Big(a_1 b_1 \cos t \cos^2 s \cos r + a_1 b_2 \cos t \cos s \sin s \sin r \\ &\qquad + a_2 b_1 \sin t \sin s \cos s \cos r + a_2 b_2 \sin t \sin^2 s \sin r \\ &\qquad + a_3 b_1 \cos t \sin s \cos s \cos r + a_3 b_2 \cos t \sin^2 s \sin r \Big)\, ds \end{aligned}$$

Usando as identidades

$$\int_0^\pi \cos^2 s\, ds = \int_0^\pi \sin^2 s\, ds = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^\pi \sin s \cos s\, ds = 0,$$

obtemos:

$$I_1 = a_1 b_1 \cos t \cos r \cdot \frac{\pi}{2} + a_2 b_2 \sin t \sin r \cdot \frac{\pi}{2} + a_3 b_2 \cos t \sin r \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$I_1 = \frac{\pi}{2}\left(a_1 b_1 \cos t \cos r + a_2 b_2 \sin t \sin r + a_3 b_2 \cos t \sin r\right). \tag{2.6}$$

Portanto, temos:

$$\int_0^\pi k_a(t,s) \cdot k_b(s,r)\, ds = \frac{\pi}{2}\left(a_1 b_1 \cos t \cos r + a_2 b_2 \sin t \sin r + a_3 b_2 \cos t \sin r\right).$$

Calculemos I_2 *:*

$$I_2 = \int_0^\pi k_b(t,s) F_2(k_a(s,r)) ds,$$

$$I_2 = \int_0^\pi [b_1 \cos t \cos s + b_2 \sin t \sin s] \cdot \frac{\pi}{2}\left(a_1^2 \cos s \cos r + a_2^2 \sin s \sin r + (a_1 a_3 + a_2 a_3) \cos s \sin r\right) ds,$$

$$I_2 = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi [b_1 \cos t \cos s + b_2 \sin t \sin s]\left(a_1^2 \cos s \cos r + a_2^2 \sin s \sin r + (a_1 a_3 + a_2 a_3) \cos s \sin r\right) ds,$$

$$\begin{aligned} I_2 = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \Big(& b_1 a_1^2 \cos t \cos^2 s \cos r + b_1 a_2^2 \cos t \cos s \sin s \sin r \\ & + b_1(a_1 a_3 + a_2 a_3) \cos t \cos^2 s \sin r \\ & + b_2 a_1^2 \sin t \sin s \cos s \cos r + b_2 a_2^2 \sin t \sin^2 s \sin r \\ & + b_2(a_1 a_3 + a_2 a_3) \sin t \cos s \sin s \sin r \Big) ds \end{aligned}$$

Utilizando as identidades:

$$\int_0^\pi \cos^2 s\, ds = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^\pi \sin^2 s\, ds = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^\pi \cos s \sin s\, ds = 0,$$

temos:

$$I_2 = \frac{\pi^2}{4}\left(b_1 a_1^2 \cos t \cos r + b_1(a_1 a_3 + a_2 a_3) \cos t \sin r + b_2 a_2^2 \sin t \sin r\right) \tag{2.7}$$

Segundo o Teorema 2.1.1,como $\delta_0 = 0$, *então* $\delta_0 k_b(t,r) = 0$. *Assim sendo,*

$$\int_0^\pi k_a(t,s) k_b(s,r) ds = \int_0^\pi k_b(t,s) F_2(k_a(s,r)) ds,$$

se e sómente se, $I_1 = I_2$, *que das igualidades (2.6) e (2.7), temos o sistema*

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} a_1 b_1 = \delta \frac{\pi^2}{4} a_1^2 b_1 \\ \frac{\pi}{2} a_3 b_2 = \delta \frac{\pi^2}{4} b_1 (a_1 a_3 + a_2 a_3) \\ \frac{\pi}{2} a_2 b_2 = \delta \frac{\pi^2}{4} b_2 a_2^2 \end{cases} \tag{2.8}$$

Vamos determinar algumas soluções de (2.8) como casos particulares de operadores desta família que satisfazem $AB = \delta BA^2$, $\delta \neq 0$.

Resolvendo a equação (2.8) para a_1, *assumindo* $b_1 \neq 0$, *dividimos ambos lados por* $\frac{\pi}{2} b_1$*:*

$$a_1 = \delta \frac{\pi}{2} a_1^2 \Rightarrow \delta \frac{\pi}{2} a_1^2 - a_1 = 0 \Rightarrow a_1 (\delta \frac{\pi}{2} a_1 - 1) = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \quad ou \quad a_1 = \frac{2}{\delta \pi}.$$

Resolvendo a equação (2.8), assumindo $b_2 \neq 0$, *dividimos ambos lados por* $\frac{\pi}{2} b_2$*:*

$$a_2 = \delta \frac{\pi}{2} a_2^2 \Rightarrow \delta \frac{\pi}{2} a_2^2 - a_2 = 0 \Rightarrow a_2 (\delta \frac{\pi}{2} a_2 - 1) = 0$$

Logo, as soluções são: $a_2 = 0 \quad ou \quad a_2 = \frac{2}{\delta \pi}$.

Resolvendo a equação (2.8), colocando a_3 *em evidência:* $\frac{\pi}{2} a_3 b_2 = \delta \frac{\pi^2}{4} b_1 a_3 (a_1 + a_2)$

Se $a_3 \neq 0$, *podemos dividir ambos lados por* a_3*:* $\frac{\pi}{2} b_2 = \delta \frac{\pi^2}{4} b_1 (a_1 + a_2) \Rightarrow b_2 = \delta \frac{\pi}{2} b_1 (a_1 + a_2)$.

Consideremos os seguintes casos:

Caso 1: $a_1 = 0$, $a_2 = 0$*:* $a_1 + a_2 = 0 \Rightarrow b_2 = \delta \frac{\pi}{2} b_1 \cdot 0 = 0$

Solução: $a_1 = a_2 = b_2 = 0, \quad \delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad a_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad b_1 \in \mathbb{R}$. *Portanto, os operadores correspondentes são:*

$$(Ax)(t) = \int_0^\pi [a_3 \cos t \sin s]\, x(s)\, ds = a_3 \cos t \int_0^\pi \sin s\, x(s)\, ds,$$

$$(Bx)(t) = \int_0^\pi [b_1 \cos t \cos s]\, x(s)\, ds = b_1 \cos t \int_0^\pi \cos s\, x(s)\, ds$$

e satisfazem $AB = \delta BA^2 = 0$, $\delta \neq 0$.

Caso 2: $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{2}{\delta \pi}$*:* $a_1 + a_2 = \frac{2}{\delta \pi} \Rightarrow b_2 = \delta \pi b_1 \cdot \frac{2}{\delta \pi} = 2 b_1$

Solução: $a_1 = 0, \quad a_2 = \dfrac{2}{\delta\pi}, \quad b_2 = b_1, \quad \delta \neq 0, \quad a_3 \neq 0$. *Assim, obtemos os operadores correspondentes*

$$(Ax)(t) = \int_0^\pi \left[\frac{2}{\delta\pi}\sin t \sin s + a_3 \cos t \sin s\right] x(s)\, ds,$$

$$(Bx)(t) = \int_0^\pi b_1 \left[\cos t \cos s + \sin t \sin s\right] x(s)\, ds,$$

que satisfazem $AB = \delta BA^2 = \int_0^\pi \left[\frac{b_1}{\delta}\sin t\ \sin s + \frac{b_1\pi}{2} a_3 \cos t\ \sin s\right] x(s)\, ds,\ \delta \neq 0.$

Caso 3: $a_1 = \dfrac{2}{\delta\pi},\ a_2 = 0$*:* $\ a_1 + a_2 = \dfrac{2}{\delta\pi} \Rightarrow b_2 = 2b_1$

Solução: $a_1 = \dfrac{2}{\delta\pi}, \quad a_2 = 0, \quad b_2 = 2b_1, \quad \delta \neq 0, \quad a_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*Por tanto, os operadores correspondente são:*

$$(Ax)(t) = \int_0^\pi \left[\frac{2}{\delta\pi}\cos t \cos s + a_3 \cos t \sin s\right] x(s)\, ds,$$

$$(Bx)(t) = \int_0^\pi \left[b_1 \cos t \cos s + 2b_1 \sin t \sin s\right] x(s)\, ds.$$

e satisfazem $AB = \delta BA^2 = \displaystyle\int_0^\pi b_1 \cos t \left(\frac{1}{\delta}\cos s + a_3\pi \sin s\right) x(s)\, ds,\ \delta \neq 0.$

Caso 4: $a_1 = a_2 = \dfrac{2}{\delta\pi}$*:* $\ a_1 + a_2 = \dfrac{4}{\delta\pi} \Rightarrow b_2 = \delta\pi b_1 \cdot \dfrac{4}{\delta\pi} = 4b_1$

Solução: $a_1 = a_2 = \dfrac{2}{\delta\pi}, \quad b_2 = 4b_1, \quad \delta \neq 0, \quad a_3 \neq 0$. *Assim, os operadores correspondentes são:*

$$\begin{aligned}(Ax)(t) &= \int_0^\pi \left[\frac{2}{\delta\pi}\cos t \cos s + \frac{2}{\delta\pi}\sin t \sin s + a_3 \cos t \sin s\right] x(s)\, ds \\ (Bx)(t) &= \int_0^\pi \left[b_1 \cos t \cos s + 4b_1 \sin t \sin s\right] x(s)\, ds.\end{aligned}$$

e satisfazem $AB = \delta BA^2 = \displaystyle\int_0^\pi b_1 \left(\frac{1}{\delta}\cos t \cos s + 2a_3\pi \cos t \sin s + \frac{4}{\delta}\sin t \sin s\right) x(s)\, ds,\ \delta \neq 0.$

Além disso, podemos ter outras soluções , por exemplo:

Solução: $a_1 = a_3 = 0, \quad a_2 = \dfrac{2}{\delta\pi}, \quad \delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad b_1 \in \mathbb{R}, \quad b_2 \in \mathbb{R}$. *E os operadores* *correspondentes são:*

$$
\begin{aligned}
(Ax)(t) &= \int_0^\pi \left[\frac{2}{\delta\pi}\sin t \sin s\right] x(s)\,ds = \frac{2}{\delta\pi}\sin t \int_0^\pi \sin s\, x(s)\,ds,\\
(Bx)(t) &= \int_0^\pi \left[b_1 \cos t \cos s + b_2 \sin t \sin s\right] x(s)\,ds.
\end{aligned}
$$

e satisfazem $AB = \delta BA^2 = \dfrac{b_2}{\delta}\sin t \displaystyle\int_0^\pi \sin s\, x(s)\,ds,\ \delta \neq 0.$

Observação 2.1.1. *Se $\delta = 0$ na relação $AB = \delta BA^2$, tem-se $AB = 0$ que significa procurar divisores de zero, ou seja, operadores $A \neq 0$ e $B \neq 0$ mas $AB = 0$. Do sistema (2.8) podes encontrar algumas soluções, por exemplo:*

Solução: $a_1 = 0, \quad b_1 \in \mathbb{R}, \quad b_2 = 0, \quad a_2 \in \mathbb{R}, \quad a_3 \in \mathbb{R}.$ *Os operadoes correspondentes são:*

$$
\begin{aligned}
(Ax)(t) &= \int_0^\pi \left[a_2 \sin t \sin s + a_3 \cos t \sin s\right] x(s)\,ds,\\
(Bx)(t) &= \int_0^\pi b_1 \cos t \cos s\, x(s)\,ds.
\end{aligned}
$$

Solução: $b_1 = 0, \quad a_1 \in \mathbb{R}, \quad b_2 \neq 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0.$ *Os operadores correspondentes são:*

$$
(Ax)(t) = \int_0^\pi a_1 \cos t \cos s\, x(s)\,ds, \quad (Bx)(t) = \int_0^\pi b_2 \sin t \sin s\, x(s)\,ds.
$$

2.2 Relação de comutatividade para operadores integrais com núcleos separáveis

Nesta secção consideramos a relação $AB = BF(A)$ no caso particular de operadores integrais com núcleos separáveis, onde a caracterização geral se reduz a condições funcionais e algébricas mais explícitas.

Teorema 2.2.1. *Sejam $A : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$, $B : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$, com $1 \leq p \leq \infty$, operadores não nulos definidos por:*

$$
(Ax)(t) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} a(t)b(s)x(s)\,ds, \quad (Bx)(t) = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} c(t)e(s)x(s)\,ds,
$$

onde $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, $\alpha_1 < \beta_1$, $\alpha_2 < \beta_2$, $a, c \in L^p(\mathbb{R})$, $b \in L^q([\alpha_1, \beta_1])$, $e \in L^q([\alpha_2, \beta_2])$, e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Considere o polinômio:

$$
F(z) = \sum_{j=0}^{n} \delta_j z^j, \quad \delta_j \in \mathbb{R},\ j = 1, .., n.
$$

Sejam:

$$G = [\alpha_1, \beta_1] \cap [\alpha_2, \beta_2],$$

$$k_1 = \sum_{j=1}^{n} \delta_j \mu_{[\alpha_1,\beta_1]}(a,b)^{j-1} \mu_{[\alpha_2,\beta_2]}(a,e), \quad k_2 = \mu_{[\alpha_1,\beta_1]}(b,c),$$

onde $\mu_{[\alpha_1,\beta_2]}(a,b) = \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_2} a(s)b(s)\,ds$ *e* $\mu_{[\alpha_1,\beta_1]}(a,b)^{j-1} = \left(\int_{\alpha_1}^{\beta_1} a(s)\,b(s)\,ds\right)^{j-1}.$

Então, $AB = BF(A)$ *se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas:*

(1) (a) Para quase todo $(t,s) \in \operatorname{supp}(c) \times (\operatorname{supp}(e) \cap G)$*:*

(i) Se $k_2 \neq 0$*, então*

$$b(s)k_1 = \lambda e(s), \quad a(t) = \frac{\delta_0 + \lambda}{k_2} c(t),$$

para algum escalar real λ*;*

(ii) Se $k_2 = 0$*, então*

$$k_1 b(s) = -\delta_0 e(s);$$

(b) Se $t \notin \operatorname{supp}(c)$*, então ou* $k_2 = 0$ *ou* $a(t) = 0$ *para quase todo* $t \notin \operatorname{supp}(c)$*;*

(c) Se $s \in G \setminus \operatorname{supp}(e)$*, então ou* $k_1 = 0$ *ou* $b(s) = 0$ *para quase todo* $s \in G \setminus \operatorname{supp}(e)$*;*

(2) $k_2 a(t) - \delta_0 c(t) = 0$ *para quase todo* $t \in \mathbb{R}$*, ou* $e(s) = 0$ *para quase todo* $s \in [\alpha_2, \beta_2] \setminus G$*;*

(3) $k_1 = 0$ *ou* $b(s) = 0$ *para quase todo* $s \in [\alpha_1, \beta_1] \setminus G$*.*

Demonstração. Observamos que, como $a, c \in L^p(\mathbb{R})$, com $1 \leq p \leq \infty$, e $b \in L^q([\alpha_1, \beta_1])$, $e \in L^q([\alpha_2, \beta_2])$, onde $1 \leq q \leq \infty$, e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então, como já foi mostrado no Teorema 1.4.3 , os operadores A e B estão bem definidos e são limitados.

Pelo cálculo directo, temos:

$$\begin{aligned}(A^2x)(t) &= \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} a(t)b(s)(Ax)(s)\,ds = \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} a(t)b(s)a(s)\,ds \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} b(\tau_1)x(\tau_1)\,d\tau_1 \\ &= \mu_{[\alpha_1,\beta_1]}(a,b)\,(Ax)(t).\end{aligned}$$

Analogamente:

$$(A^3x)(t) = A(A^2x)(t) = \mu_{[\alpha_1,\beta_1]}(a,b)\,(A^2x)(t) = \mu_{[\alpha_1,\beta_1]}(a,b)^2\,(Ax)(t).$$

Para quase todo t, supomos por indução:

$$(A^m x)(t) = \mu_{[\alpha_1,\beta_1]}(a,b)^{m-1}(Ax)(t), \quad m = 1, 2, \ldots$$

Então:

$$(A^{m+1}x)(t) = A(A^m x)(t) = \mu_{[\alpha_1,\beta_1]}(a,b)^{m-1}(A^2x)(t) = \mu_{[\alpha_1,\beta_1]}(a,b)^m(Ax)(t).$$

Para o operador AB, temos:

$$(ABx)(t) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} a(t)b(s)c(s)\,ds \int_{\alpha_2}^{\beta_2} e(\tau_1)x(\tau_1)\,d\tau_1 = k_2 \int_{\alpha_2}^{\beta_2} a(t)e(\tau_1)x(\tau_1)\,d\tau_1$$

Para $F(A)$, definimos:

$$(F(A)x)(t) = \delta_0 x(t) + a(t)\sum_{j=1}^{n} \delta_j \mu_{[\alpha_1,\beta_1]}(a,b)^{j-1} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} b(\tau)x(\tau)\,d\tau$$

Logo:

$$\begin{aligned}(BF(A)x)(t) &= \delta_0 c(t) \int_{\alpha_2}^{\beta_2} e(\tau_1)x(\tau_1)\,d\tau_1 \\ &+ c(t)\sum_{j=1}^{n} \delta_j \mu_{[\alpha_1,\beta_1]}(a,b)^{j-1} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} e(\tau)a(\tau)\,d\tau \int_{\alpha_1}^{\beta_1} b(\tau_1)x(\tau_1)\,d\tau_1 \\ &= \delta_0 c(t) \int_{\alpha_2}^{\beta_2} e(\tau_1)x(\tau_1)\,d\tau_1 + c(t)k_1 \int_{\alpha_1}^{\beta_1} b(\tau_1)x(\tau_1)\,d\tau_1.\end{aligned}$$

Portanto, $(ABx)(t) = (BF(A)x)(t)$ para todo $x \in L^p(\mathbb{R})$ se, e somente se:

$$\int_{\alpha_2}^{\beta_2} [k_2 a(t) - \delta_0 c(t)]e(s)x(s)\,ds = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_1 c(t)b(s)x(s)\,ds$$

Aplicando o teorema 1.4.6, a observação 1.4.7 e o lema 2.1.1, temos que $AB = BF(A)$ se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

1. Para quase todo $(t,s) \in \mathbb{R} \times G$,

$$[k_2 a(t) - \delta_0 c(t)]e(s) = k_1 c(t)b(s)$$

2. $k_2 a(t) - \delta_0 c(t) = 0$ para quase todo lugar $t \in \mathbb{R}$, ou $e(s) = 0$ para quase todo $s \in [\alpha_2, \beta_2] \setminus G$;

3. $k_1 = 0$, ou $c(t) = 0$ para quase todo lugar $t \in \mathbb{R}$, ou $b(s) = 0$ para quase todo lugar $s \in [\alpha_1, \beta_1] \setminus G$.

Reescrevendo a Condição 1:

(a) Suponha $(t,s) \in \mathrm{supp}(c) \times [\mathrm{supp}(e) \cap G]$.

(i) Se $k_2 \neq 0$, então:

$$\frac{k_1 b(s)}{e(s)} = \frac{k_2 a(t)}{c(t)} - \delta_0 = \lambda \Rightarrow k_1 b(s) = \lambda e(s), \quad a(t) = \frac{\delta_0 + \lambda}{k_2} c(t)$$

(ii) Se $k_2 = 0$, então:

$$-\delta_0 c(t) e(s) = k_1 c(t) b(s) \Rightarrow k_1 b(s) = -\delta_0 e(s)$$

(b) Se $t \notin \operatorname{supp}(c)$, então: $k_2 a(t) e(s) = 0 \Rightarrow$ ou $k_2 = 0$, ou $\mathrm{a(t)} = 0$ quase em todo lugar, ou $\mathrm{e(s)} = 0$ quase em todo lugar (isso implica $B = 0$)

(c) Se $s \in G \setminus \operatorname{supp}(e)$, então:

$k_1 c(t) b(s) = 0 \Rightarrow$ou $k_1 = 0$, ou $b(s) = 0$ quase em todo lugar, ou $c(t) = 0$ quase em todo lugar (implica $B = 0$)

□

Exemplo 2.2.1. *Sejam $A : L^p([-2\pi, 2\pi]) \to L^p([2\pi, 2\pi])$, $B : L^p([-2\pi], 2\pi]) \to L^p([-2\pi, 2\pi])$, com $1 \leq p \leq \infty$, operadores não nulos definidos por:*

$$\begin{aligned}
(Ax)(t) &= \int_0^\pi [(a_1 \cos t + a_2 \sin t)(a_3 \cos s + a_4 \sin s)]\, x(s)\, ds, \\
(Bx)(t) &= \int_0^\pi [(b_1 \cos t + b_2 \sin t) \cos s]\, x(s)\, ds.
\end{aligned}$$

Pretende-se encontrar as constantes a_1, a_2, a_3, a_4, b_1 e b_2 tais que $AB = BA^2$. Pelo Teorema 2.2.1, temos que :

$$a(t) = a_1 \cos t + a_2 \sin t, \qquad b(t) = a_3 \cos t + a_4 \sin t, \qquad e(t) = \cos t.$$

Notemos que $f(z) = z^2$, assim, $\delta_0 = 0$, $\delta_1 = 0$, e $\delta_2 = 1$. Portanto

$$k_1 = \mu_{[\alpha,\beta]}(a, b)\, \mu_{[\alpha,\beta]}(a, e), \ e\ k_2 = \mu_{[\alpha,\beta]}(b, c).$$

Calculando as duas integrais:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi a(t) b(t)\, dt &= \int_0^\pi (a_1 \cos t + a_2 \sin t)(a_3 \cos t + a_4 \sin t)\, dt \\
&= a_1 a_3 \int_0^\pi \cos^2 t\, dt + (a_1 a_4 + a_2 a_3) \int_0^\pi \cos t \sin t\, dt + a_2 a_4 \int_0^\pi \sin^2 t\, dt \\
&= a_1 a_3 \frac{\pi}{2} + (a_1 a_4 + a_2 a_3) \cdot 0 + a_2 a_4 \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} (a_1 a_3 + a_2 a_4),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\pi a(t)e(t)\,dt &= \int_0^\pi (a_1\cos t + a_2\sin t)\cos t\,dt\\ &= a_1\int_0^\pi \cos^2 t\,dt + a_2\int_0^\pi \sin t\cos t\,dt = \frac{\pi}{2}\,a_1.\end{aligned}$$

Portanto,

$$k_1 = \int_0^\pi a(t)b(t)\,dt = \frac{\pi^2}{4}\,(a_1a_3 + a_2a_4)a_1,$$

De seguida temos:

$$\begin{aligned}k_2 = \int_0^\pi b(t)c(t)\,dt &= \int_0^\pi (a_3\cos t + a_4\sin t)(b_1\cos t + b_2\sin t)\,dt\\ &= a_3b_1\frac{\pi}{2} + (a_3b_2 + a_4b_1)\cdot 0 + a_4b_2\frac{\pi}{2}\\ &= \frac{\pi}{2}\,(a_3b_1 + a_4b_2).\end{aligned}$$

Então,segundo o Teorema 2.2.1, $AB = BA^2$ *se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas:*

Se $k_2 \neq 0$, *então* $k_1b(s) = \lambda e(s)$ *e* $a(t) = \frac{\delta_0+\lambda}{k_2}c(t)$, *para algum* $\lambda \in \mathbb{R}$, *assim,*

$$\frac{\pi^2}{4}\,(a_1a_3 + a_2a_4)a_1[a_3\cos s + a_4\sin s] = \lambda\cos s \tag{2.9}$$

e

$$a_1\cos t + a_2\sin t = \lambda\frac{b_1\cos t + b_2\sin t}{\frac{\pi}{2}\,(a_3b_1 + a_4b_2)}. \tag{2.10}$$

Da a equação (2.9), podemos simplificar admitindo $a_4 = 0$. *Assim,*

$$\frac{\pi^2}{4}\,(a_1a_3 + a_2\cdot 0)\,a_1\,[a_3\cos s + 0\cdot\sin s] = \frac{\pi^2}{4}\,(a_1a_3)\,a_1\,a_3\cos s.$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{4}\,a_1^2\,a_3^2\cos s = \lambda\cos s.$$

Assim, $\lambda = \frac{\pi^2}{4}\,a_1^2\,a_3^2$. *Subistituindo na outra equação (2.10) temos:*

$$a_1\cos t + a_2\sin t = \frac{\pi^2}{4}a_1^2a_3^2\cdot\frac{b_1\cos t + b_2\sin t}{\frac{\pi}{2}(a_3b_1 + a_4b_2)}.$$

Substituindo $\lambda = \dfrac{\pi^2}{4}\,a_1^2a_3^2$ *na equação (2.10), obtemos:*

$$a_1\cos t + a_2\sin t = \frac{\pi^2}{4}\,a_1^2a_3^2\cdot\frac{b_1\cos t + b_2\sin t}{\frac{\pi}{2}(a_3b_1 + a_4b_2)}.$$

Admitindo $a_4 = 0$ *e* $a_3 \neq 0$ *segue-se que*

$$a_1 \cos t + a_2 \sin t = \frac{\pi}{2}\, a_1^2 a_3 \,\frac{b_1 \cos t + b_2 \sin t}{b_1}, \qquad (b_1 \neq 0).$$

Identificando os coeficientes de $\cos t$ *e* $\sin t$*, obtém-se o sistema:*

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{\pi}{2}\, a_1^2 a_3, \\ a_2 b_1 = \dfrac{\pi}{2}\, a_1^2 a_3 b_2. \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

$a_1 \left(1 - \dfrac{\pi}{2}\, a_1 a_3\right) = 0$. *Logo, distinguem-se dois casos:*

Caso 1: $a_1 = 0$. *Substituindo na segunda equação, obtém-se* $a_2 b_1 = 0$. *Como* $b_1 \neq 0$, *segue-se que* $a_2 = 0$. *Neste caso,* a_3 *é qualquer número real não nulo,* b_1 *é qualquer número real não nulo, e* b_2 *é arbitrário. Assim, a família de soluções é:*

$$\boxed{a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad a_4 = 0 \quad b_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad b_2 \in \mathbb{R}.}$$

Que resulta em $A = 0$. *Mas, quando* $a_2 \neq 0$ *a família de soluções é:*

$$\boxed{a_1 = 0, \quad b_1 = 0, \quad a_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad a_4 = 0 \quad a_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad b_2 \in \mathbb{R}.}$$

Obtemos os operadores correspondentes,

$$\begin{aligned} (Ax)(t) &= a_2 a_3 \sin t \int_0^{\pi} \cos s\, x(s)\, ds, \\ (Bx)(t) &= b_2 \sin t \int_0^{\pi} \cos s\; x(s)\, ds. \end{aligned}$$

ques sastisfazem $AB = BA^2 = 0$.

Caso 2: $a_1 \neq 0$. *Da primeira equação obtemos*

$$1 - \frac{\pi}{2}\, a_1 a_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_1 a_3 = \frac{2}{\pi} \quad \Longrightarrow \quad a_3 = \frac{2}{\pi a_1}.$$

Substituindo na segunda equação:

$$a_2 b_1 = \frac{\pi}{2}\, a_1^2 a_3\, b_2 = \frac{\pi}{2}\, a_1^2 \left(\frac{2}{\pi a_1}\right) b_2 = a_1 b_2.$$

Portanto,

$$a_2 b_1 = a_1 b_2 \quad \Longrightarrow \quad b_2 = \frac{a_2 b_1}{a_1}.$$

Assim, a família de soluções é:

$$\boxed{a_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad a_2 \in \mathbb{R}, \quad a_3 = \frac{2}{\pi a_1}, \quad a_4 = 0, \quad b_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad b_2 = \frac{a_2 b_1}{a_1}.}$$

Portanto, os operadores correspondentes são:

$$(Ax)(t) = \frac{2}{\pi a_1} \int_0^{\pi} \left[(a_1 \cos t + a_2 \sin t)\,(\cos s)\right] x(s)\, ds,$$

$$(Bx)(t) = \int_0^{\pi} \left[\left(b_1 \cos t + \frac{a_2 b_1}{a_1} \sin t\right) \cos s\right] x(s)\, ds,$$

e satisfazem $AB = BA^2 = b_1 \left(\cos t + \dfrac{a_2}{a_1} \sin t\right) \int_0^{\pi} \cos s\, x(s)\, ds.$

Observação 2.2.1. *É possível encontrar outras soluções para os operadores A e B. De facto, apartir equação (2.9), distribuindo os factores, obtemos*

$$\frac{\pi^2}{4}\,(a_1 a_3 + a_2 a_4)\, a_1\, a_3 \cos s \;+\; \frac{\pi^2}{4}\,(a_1 a_3 + a_2 a_4)\, a_1\, a_4 \sin s = \lambda \cos s.$$

Assim,

$$\begin{cases} \dfrac{\pi^2}{4}\,(a_1 a_3 + a_2 a_4)\, a_1\, a_3 = \lambda, \\ \dfrac{\pi^2}{4}\,(a_1 a_3 + a_2 a_4)\, a_1\, a_4 = 0. \end{cases}$$

Apresentaremos a seguir um corolário que parte do Teorema 2.2.1 em que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ e $\beta_1 = \beta_2 = \beta$.

Corolário 2.2.1. *Sejam $A : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$, $B : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$, com $1 \le p \le \infty$, operadores não nulos definidos por:*

$$(Ax)(t) = \int_{\alpha}^{\beta} a(t) b(s) x(s)\, ds, \quad (Bx)(t) = \int_{\alpha}^{\beta} c(t) e(s) x(s)\, ds,$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, $a, c \in L^p(\mathbb{R})$, $b, e \in L^q([\alpha, \beta])$, $1 \le q \le \infty$, com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Considere o polinômio $F(z) = \delta_0 + \delta_1 z + \cdots + \delta_n z^n$, com $\delta_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, \ldots, n$. Defina:

$$k_1 = \sum_{j=1}^{n} \delta_j\, \mu_{[\alpha,\beta]}(a, b)^{j-1} \mu_{[\alpha,\beta]}(a, e), \quad k_2 = \mu_{[\alpha,\beta]}(b, c).$$

Então, $AB = BF(A)$ se, e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas:

1. *Para quase todo $(t, s) \in \operatorname{supp}(c) \times \operatorname{supp}(e)$, temos:*
   (a) Se $k_2 \neq 0$, então $k_1 b(s) = \lambda e(s)$ e $a(t) = \frac{\delta_0 + \lambda}{k_2} c(t)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$;
   (b) Se $k_2 = 0$, então $k_1 b(s) = -\delta_0 e(s)$.

2. Se $t \notin \operatorname{supp}(c)$*, então ou* $k_2 = 0$ *ou* $a(t) = 0$ *para quase todo* $t \notin \operatorname{supp}(c)$*.*

3. Se $s \in [\alpha, \beta] \setminus \operatorname{supp}(e)$*, então ou* $k_1 = 0$ *ou* $b(s) = 0$ *para quase todo* $s \in [\alpha, \beta] \setminus \operatorname{supp}(e)$*.*

Demonstração. A prova segue directamente do Teorema 2.2.1, com $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ e $G = [\alpha, \beta]$. □

Proposição 2.2.1. *[5] Sejam* $A : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$*,* $B : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$*, com* $1 \leq p \leq \infty$*, operadores não nulos definidos por:*

$$(Ax)(t) = \int_{\alpha}^{\beta} a(t)b(s)x(s)\,ds, \quad (Bx)(t) = \int_{\alpha}^{\beta} c(t)e(s)x(s)\,ds,$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*,* $\alpha < \beta$*,* $a, c \in L^p(\mathbb{R})$*,* $b, e \in L^q([\alpha, \beta])$*, com* $1 \leq q \leq \infty$ *e* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$*.*

Considere um polinômio:

$$F(z) = \delta_0 + \delta_1 z + \cdots + \delta_n z^n, \quad \delta_j \in \mathbb{R},\ j = 0, \ldots, n.$$

Defina:

$$k_1 = \sum_{j=1}^{n} \delta_j \mu_{[\alpha,\beta]}(a, b)^{j-1} \mu_{[\alpha,\beta]}(a, e), \quad k_2 = \mu_{[\alpha,\beta]}(b, c),$$

onde

$$\mu_{[\alpha,\beta]}(u, v) = \int_{\alpha}^{\beta} u(s)v(s)\,ds.$$

Suponha que $AB = BF(A)$*. Se* $k_2 \neq 0$ *e* $k_1 \neq 0$ *na condição 1(a) do Corolário 2.2.1, então a constante não nula* λ *que aparece nessa condição satisfaz:*

$$F(\lambda + \delta_0) = \lambda + \delta_0.$$

Proposição 2.2.2. *[5] Sejam* $A : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$*,* $B : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$*, com* $1 \leq p \leq \infty$*, operadores não nulos definidos por:*

$$(Ax)(t) = \int_{\alpha}^{\beta} a(t)b(s)x(s)\,ds, \quad (Bx)(t) = \int_{\alpha}^{\beta} c(t)e(s)x(s)\,ds,$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*,* $\alpha < \beta$*,* $a, c \in L^p(\mathbb{R})$*,* $b, e \in L^q([\alpha, \beta])$*,* $1 \leq q \leq \infty$*, com* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$*.*

Considere o polinômio:

$$F(z) = \delta_0 + \delta_1 z + \cdots + \delta_n z^n, \quad \delta_j \in \mathbb{R},\ j = 0, \ldots, n.$$

Suponha que, para quase todo $(t, s) \in \operatorname{supp}(c) \times \operatorname{supp}(e)$*, temos:*

$$a(t) = \frac{\lambda + \delta_0}{k_2} c(t), \quad b(s) = \frac{\lambda}{k_1} e(s), \tag{2.11}$$

para constantes $\lambda, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, *todas diferentes de zero.*

Se $F(\lambda+\delta_0) = \lambda+\delta_0$ *e*

$$k_2 = \frac{\lambda}{k_1}\mu_{[\alpha,\beta]}(e,c), \quad \text{com} \quad \mu_{[\alpha,\beta]}(e,c) = \int_\alpha^\beta e(s)c(s)\,ds,$$

então:

(1) $A = \dfrac{\lambda+\delta_0}{\mu_{[\alpha,\beta]}(e,c)}B$;

(2) Para todo $x \in L^p(\mathbb{R})$ *e quase todo* $t \in \operatorname{supp}(c)$, *temos:*

$$(ABx)(t) = (BF(A)x)(t).$$

Exemplo 2.2.2. *Sejam* $A : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$, $B : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$, *com* $1 < p < \infty$, *operadores integrais definidos por:*

$$(Ax)(t) = \int_0^\pi a(t)b(s)x(s)\,ds, \quad (Bx)(t) = \int_0^\pi c(t)e(s)x(s)\,ds,$$

onde $a \in L^p(\mathbb{R})$, $b \in L^q([0,\pi])$, $1 < q < \infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$; $c(t) = 2$ *e* $e(s) = \sin(s)$. *Consideremos o polinómio* $F(z) = z^2+z-1$ *e para quase todo* $(t,s) \in supp\ e$, *temos:*

$$a(t) = \frac{\lambda+\delta_0}{k_2}, \quad k_1 b(s) = \lambda e(s)$$

para λ *um real não nulo, e para* $k_1 = 1$ *temos,*

$$k_2 = \lambda\int_0^\pi e(s)c(s)ds.$$

Assim sendo,

$$k_2 = \lambda\int_0^\pi \sin(s)\cdot 2\,ds = 2\lambda\int_0^\pi \sin(s)\,ds = 4\lambda.$$

Pela Proposição 2.2.1, para que $AB = BF(A)$, $F(\lambda+\delta_0) = \lambda+\delta_0$. *Como* $\delta_0 = -1$, *então temos* $F(\lambda-1) = \lambda-1$. *Assim,*

$$(\lambda-1)^2+\lambda-1-1 = \lambda-1, \ \text{e} \ \ \lambda = 2,$$

pela Proposição 2.2.2

$$A = \frac{\lambda+\delta_0}{\int_0^\pi e(s)c(s)\,ds}B = \frac{2-1}{\int_0^\pi 2\sin(s)\,ds}B = \frac{1}{4}B. \ \ \text{Logo,} \quad A^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 B^2.$$

Por outro lado temos:

$$(B^2x)(t) = \int_0^\pi c(t)\cdot\sin(s)\left(\int_0^\pi 2\cdot(\sin(\tau))x(\tau)\,d\tau\right)ds = 4(Bx)(t).$$

Desta forma, temos:

$$A^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 B^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 4B = \frac{1}{4}B = A.$$

Segue que:

$$F(A) = A^2 + A - I = 2A - I = 2\cdot\frac{1}{4}B - I = \frac{1}{2}B - I,$$

$$BF(A) = B(\frac{1}{2}B - I) = \frac{1}{2}B^2 - B = \frac{1}{2}\cdot 4B - B = B.$$

Finalmente,

$$AB = \frac{1}{4}B\cdot B = \frac{1}{4}\cdot B^2 = \frac{1}{4}\cdot 4B = B = BF(A).$$

Desta forma, os operadores

$$(Ax)(t) = \int_0^\pi a(t)b(s)x(s)\,ds, \qquad (Bx)(t) = 2\int_0^\pi \sin(s)\,x(s)\,ds$$

satisfazem $AB = B(A^2 + A - I) = BA^2 + BA - B$.

Exemplo 2.2.3. *Sejam* $A : L^p([0,\pi]) \to L^p([0,\pi])$, $B : L^p([0,\pi]) \to L^p([0,\pi])$, *com* $1 < p < \infty$, *operadores integrais definidos por:*

$$(Ax)(t) = \int_0^\pi a(t)b(s)x(s)\,ds, \quad (Bx)(t) = \int_0^\pi c(t)e(s)x(s)\,ds,$$

onde $a \in L^p([0,\pi])$, $b \in L^q([0,\pi])$, $1 < q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $c(t) = \sin t - 2\cos t$, $e(s) = \cos(s) + \sin(s)$. *Consideremos o polinómio* $F(z) = z^2 + 2z - 2$ *e para quase todo* $(t,s) \in supp\, e$, *temos:*

$$a(t) = \frac{\lambda + \delta_0}{k_2}, \quad k_1 b(s) = \lambda e(s)$$

para um λ *real não nulo, e para* $k_1 = 1$ *temos,*

$$k_2 = \lambda\int_0^\pi e(s)c(s)\,ds.$$

Calculando a integral:

$$\int_0^\pi e(s)c(s)\,ds = \int_0^\pi (\cos s + \sin s)(\sin s - 2\cos s)\,ds$$

$$= \int_0^\pi \left[\sin^2 s - 2\cos^2 s - \sin s\cos s\right] ds = -\frac{\pi}{2}.$$

Portanto

$$k_2 = \lambda \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\lambda\pi}{2}.$$

Pela Proposição 2.2.1, para que $AB = BF(A)$ *devemos ter* $F(\lambda + \delta_0) = \lambda + \delta_0$*. Visto que* $\delta_0 = -2$*, temos:*

$$F(\lambda - 2) = \lambda - 2 \iff (\lambda - 2)^2 + 2(\lambda - 2) - 2 = \lambda - 2,$$

$$(\lambda - 2)^2 + (\lambda - 2) - 2 = 0 \implies (\lambda - 2)^2 + (\lambda - 2) - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \quad ou \quad \lambda = 3.$$

Pela Proposição 2.2.2:

$$A = \frac{\lambda + \delta_0}{\int\limits_0^\pi e(s)c(s)\,ds} B = \frac{3-2}{-\pi/2} B = -\frac{2}{\pi} B.$$

Portanto:

$$A^2 = \left(-\frac{2}{\pi}\right)^2 B^2 = \frac{4}{\pi^2} B^2.$$

Por outro lado, temos:

$$(B^2x)(t) = \left(\int\limits_0^\pi e(s)c(s)\,ds\right)(Bx)(t) = -\frac{\pi}{2}(Bx)(t),$$

Logo:

$$A^2 = \frac{4}{\pi^2} B^2 = \frac{4}{\pi^2}\left(-\frac{\pi}{2} B\right) = -\frac{2}{\pi} B = A.$$

Segue que:

$$F(A) = A^2 + 2A - 2I = A + 2A - 2I = 3A - 2I = 3 \cdot \left(-\frac{2}{\pi} B\right) - 2I = -\frac{6}{\pi} B - 2I,$$

$$BF(A) = B\left(-\frac{6}{\pi} B - 2I\right) = -\frac{6}{\pi} B^2 - 2B = -\frac{6}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2} B\right) - 2B = 3B - 2B = B.$$

Finalmente:

$$AB = \left(-\frac{2}{\pi} B\right) B = -\frac{2}{\pi} B^2 = -\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2} B\right) = B = BF(A).$$

Observação 2.2.2. *Note que apartir dos exemplos (2.2.2) e (2.2.3) , temos*

$$A^2 = \mu A, \quad \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Nestes casos é possível transformar a relação de comutação $AB = BF(A)$ *em* $AB = BG(A)$*, onde* G *é um polinómio de grau inferior a* F*.*

Capítulo 3

Propriedades algébricas dos Representantes da Relação de Comutação

Neste capítulo, estudaremos as propriedades algébricas das relações de comutatividade. O nosso objectivo é deduzir fórmulas equivalentes que permitam reescrever expressões contendo elementos da álgebra gerada pelos representantes da relação de comutação. Para uma descrição mais detalhada destas propriedades, veja, por exemplo, [14] e [19].

3.1 Potência e cálculo polinomial associados à relação de comutação

Nesta secção estudamos as consequências algébricas da relação de comutação $AB = BF(A)$, com ênfase em iterações, potências e cálculo funcional, obtendo identidades envolvendo composições da função F.

Definição 3.1.1. *[14][Reordenamento] Sejam A e B elementos de uma álgebra não comutativa definida por uma relação de comutação.* Reordenar *um elemento envolvendo A e B significa trazê-lo, usando a relação de comutação, para uma forma na qual todos os elementos B estejam à esquerda ou à direita. Por exemplo:*

$$AB^2 = B^2A + 2BA + A.$$

Proposição 3.1.1. *Sejam A e B operadores lineares e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função com cálculo funcional apropriado tal que $AB = B\,F(A)$. Então, para qualquer polinômio H, temos:*

$$A^jB = B\,[F(A)]^j, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \tag{3.1}$$

$$H(A)B^k = \sum_{j=1}^{n} \delta_j B^k [F^{\circ k}(A)]^j, \ k = 1, 2, 3..., \tag{3.2}$$

$$H(A)B^k = B^k \left(H \circ F^{\circ(k)}(A)\right), \quad k = 1, 2, 3, \dots, \tag{3.3}$$

onde $F^{\circ(k)}$ *é a* k*-ésima composição de* F *consigo mesma:* $F^{\circ(1)} = F$ *e* $F^{\circ(k+1)} = F \circ F^{\circ(k)}$.

Demonstração. Demonstremos (3.1) usando a indução matemática. Seja $j = 1$, então , $AB = B\,F(A)$.Suponha que $A^j B = B\,[F(A)]^j$ para algum $j \geq 1$, então

$$A^{j+1}B = A^j(AB) = (A^jB)F(A) = B[F(A)]^jF(A) = B[F(A)]^{j+1}.$$

Isso prova (3.1). Usaremos também, a indução matemática em k para demonstrar (3.2). Seja $k = 1$, então $A^jB = B[F(A)]^j$. Agora, suponha que, para algum $k \geq 1$,

$$A^jB^k \;=\; B^k\left[F^{\circ k}(A)\right]^j.$$

Então

$$A^jB^{k+1} = (A^jB^k)B = B^k\left[F^{\circ k}(A)\right]^jB.$$

Vejamos que,

$$\left[F^{\circ k}(A)\right]^jB = B\left(\left[F^{\circ k}(F(A))\right]^j\right) = B\left[F^{\circ(k+1)}(A)\right]^j.$$

Logo,

$$A^jB^{k+1} = B^k\,B\left[F^{\circ(k+1)}(A)\right]^j = B^{k+1}\left[F^{\circ(k+1)}(A)\right]^j.$$

Assim, para o polinômio $H(A) = \sum_{j=0}^{n}\delta_jA^j$, obtemos:

$$H(A)B^k = \sum_{j=0}^{n}\delta_jA^jB^k = \sum_{j=0}^{n}\delta_jB^k(F^{\circ k}(A))^j = B^k\Big(\sum_{j=0}^{n}\delta_j(F^{\circ k}(A))^j\Big).$$

Vejamos também, que para um polinómio $H(A) = \sum_{j=0}^{n}\delta_jA^j$, $n = 0, 1, 2, 3...$,

$$H(A)B = \sum_{j=1}^{n}\delta_jA^jB = \sum_{j=1}^{n}\delta_jB[F(A)]^j = B(H \circ F(A)). \tag{3.4}$$

Podemos também provar a fórmula (3.3) usando indução em k. Para $k = 1$, segue da fórmula (3.4). Agora suponha que (3.3) é válido para qualquer $k \geq 1$, então

$$H(A)B^{k+1} = (H(A)B^k)B = B^k(H \circ F^{\circ(k)}(A))B.$$

Pela fórmula (3.4), $(H \circ F^{\circ(k)}(A))B = B^kB(H \circ F^{\circ(k+1)}(A))$. Assim,

$$H(A)B^{k+1} = B^kB(H \circ F^{\circ(k+1)}(A)) = B^{k+1}(H \circ F^{\circ(k+1)}).$$

Isso prova a fórmula (3.3).

□

Teorema 3.1.1. *Seja* r *um número inteiro positivo. Se* A *e* B *são elementos duma álgebra satisfazendo* $AB_t = B_tF_t(A)$, *então para qualquer inteiro positivo* k_t *e quaisquer polinómios* F_t *e* H_t, *onde* $t = 1, 2, 3...r$,

$$\prod_{t=1}^{r}H_t(A)B_t^{k_t} = \prod_{t=1}^{r}B_t^{k_t}\left(\prod_{t=1}^{r}H_t \circ \left(F_t^{\circ(k_t)} \circ \cdots \circ F_1^{\circ(k_1)}\right)(A)\right) \tag{3.5}$$

Em caso particular, se $AB = BF(A)$, qualquer número inteiro positivo k e polinómios F e H,

$$\left(H(A)B^k\right)^r = B^{kr}\left(\prod_{t=1}^{r} H \circ F^{\circ(tk)}\right) \tag{3.6}$$

Demonstração. Provemos (3.5) pela indução matemática em r. Para $r = 1$, a equação (3.5) segue de (3.3). Agora suponha que a fórmula (3.5) é verdadeira para um inteiro positivo r, então,

$$\prod_{t=1}^{r+1} H_t(A)B_t^{k_t} = \left(\prod_{t=1}^{r} H_t(A)B_t^{k_t}\right) H_{r+1}(A)B_{r+1}^{k_{r+1}}.$$

Pela hipótese de indução, o primeiro produto é

$$\prod_{t=1}^{r} B_t^{k_t}\left(\prod_{t=1}^{r} H_t \circ (F_t^{\circ k_t} \circ \cdots \circ F_1^{\circ k_1})(A)\right).$$

Assim,

$$\prod_{t=1}^{r+1} H_t(A)B_t^{k_t} = \left(\prod_{t=1}^{r} B_t^{k_t}\right)\left(\prod_{t=1}^{r} H_t \circ (F_t^{\circ k_t} \circ \cdots \circ F_1^{\circ k_1})(A)\right) H_{r+1}(A)B_{r+1}^{k_{r+1}}.$$

Pela Proposição (3.1.1) ,

$$\left(\prod_{t=1}^{r} H_t \circ (F_t^{\circ k_t} \circ \cdots \circ F_1^{\circ k_1})(A)\right) H_{r+1}(A)B_{r+1}^{k_{r+1}}$$
$$= B_{r+1}^{k_{r+1}}\left(\prod_{t=1}^{r} H_t \circ (F_t^{\circ k_t} \circ \cdots \circ F_1^{\circ k_1})(A)\right)\left(H_{r+1} \circ (F_{r+1}^{\circ k_{r+1}} \circ \cdots \circ F_1^{\circ k_1})\right)(A)$$

Portanto,

$$\prod_{t=1}^{r+1} H_t(A)B_t^{k_t} = \left(\prod_{t=1}^{r+1} B_t^{k_t}\right)\left(\prod_{t=1}^{r+1} H_t \circ (F_t^{\circ k_t} \circ \cdots \circ F_1^{\circ k_1})(A)\right).$$

Portanto, a identidade vale para $r+1$. Pelo princípio da indução, vale para todo r. E isso prova a fórmula (3.5), que também prova (3.6), quando $k_1 = \cdots = k_r = k$ e $F_1 = \cdots = F_r = F$.

□

Corolário 3.1.1. *Seja r um número inteiro positivo. Se A e B são elementos duma álgebra satisfazendo $AB_t = B_tF_t(A)$, então para quaisquer números inteiros positivos k e j,*

$$A^jB^k = B^k[F^{\circ k}(A)]^j, \tag{3.7}$$

$$\left(A^jB^k\right)^r = B^{kr}\left(\prod_{t=1}^{r}\left(F^{\circ(tk)}(A)\right)^j\right), \tag{3.8}$$

para qualquer número inteiro não negativo k_t onde $t = 1, 2, ..., r$,

$$\prod_{t=1}^{r} A^jB_t^{k_t} = \prod_{t=1}^{r} B_t^{k_t}\left(\prod_{t=1}^{r}\left(F_t^{\circ(k_t)} \circ \cdots \circ F_t^{\circ(k_1)}\right)^j(A)\right). \tag{3.9}$$

Exemplo 3.1.1. *[14] Seja r um inteiro positivo, F e L polinómios, e seja A, T e A elementos de uma álgebra satisfazendo as relações*

$$AB = BF(A),$$

$$AT = TL(A),$$

Então para os inteiros positivos l, j, k, j_t, l_t e k_t, e quaisquer polinómios F e F_t, onde $t = 1, 2, 3 \cdots r$, temos

$$A^j B = B[F(A)]^j,$$

$$AT = T[L(A)]^j,$$

pela fórmula (3.1). Também, pela fórmula (3.3) podemos ter

$$H(A)B = B(H \circ F(A)),$$

$$H(A)T = T(H \circ L(A)),$$

$$H(A)B^l = B^l(H \circ F^{\circ l}(A)),$$

$$H(A)T^k = T^k(H \circ L^{\circ k}(A)),$$

$$H(A)T^k B^l = T^k B^l(H \circ F^{\circ l} \circ L^{\circ k}),$$

$$H(A)B^l T^k = B^l T^k(H \circ L^{\circ k} \circ F^{\circ l}).$$

Daqui segue que

$$(H_1(A)T^{k_1}B^{l_1})(H_2(A)B^{l_2}T^{k_2}) \tag{3.10}$$

$$= T^{k_1}B^{l_1}B^{l_2}T^{k_2}((H_1 \circ F^{\circ l_1} \circ L^{\circ k_1}(A)) \cdot (H_2 \circ F^{\circ l_2} \circ L^{\circ k_2} \circ F^{\circ l_1} \circ L^{\circ k_2}(A)). \tag{3.11}$$

De facto , pela equação (3.5) obtemos

$$\prod_{t=1}^{r} H_t(A)T^k B^l = \prod_{t=1}^{r} T^{k_t}B^{l_t} \left(\prod_{t=1}^{r} (H_t \circ F^{\circ l_t} \circ L^{\circ k_t} \circ \cdots \circ F^{\circ l_1} \circ L^{\circ k_1})(A) \right)$$

$$\prod_{t=1}^{r} H_t(A)B^l T^k = \prod_{t=1}^{r} B^{l_t}T^{k_t} \left(\prod_{t=1}^{r} (H_t \circ L^{\circ k_t} \circ F^{\circ l_t} \circ \cdots \circ L^{\circ k_1} \circ F^{\circ l_1})(A) \right).$$

Pela fórmula (3.9) temos

$$\prod_{t=1}^{r} A^j T^k B^l = \prod_{t=1}^{r} T^{k_t}B^{l_t} \left(\prod_{t=1}^{r} (F^{\circ l_t} \circ L^{\circ k_t} \circ \cdots \circ F^{\circ l_1} \circ L^{\circ k_1})^{j_t}(A) \right)$$

$$\prod_{t=1}^{r} A^j B^l T^k = \prod_{t=1}^{r} T^{k_t}B^{l_t} \left(\prod_{t=1}^{r} (L^{\circ l_t} \circ F^{\circ k_t} \circ \cdots \circ L^{\circ l_1} \circ F^{\circ k_1})^{j_t}(A) \right).$$

Com isso, pela equação (3.8) temos,

$$\left(H(A)T^k B^l\right)^r = (T^k B^l)^r \left(\prod_{t=1}^{r} (H \circ (F^{\circ l} \circ L^{\circ k})^{\circ t})(A) \right)$$

$$\big(H(A)B^lT^k\big)^r = (B^lT^k)^r \left(\prod_{t=1}^{r}(H \circ (L^{\circ k} \circ F^{\circ l})^{\circ t})(A)\right).$$

Pela fórmula (3.7) obtemos

$$\big(A^jB^lT^k\big)^r = (B^lT^k)^r \left(\prod_{t=1}^{r}((L^{\circ k} \circ F^{\circ l})^{\circ t})^{j_t}(A)\right).$$

$$\big(A^jT^kB^l\big)^r = (T^kB^l)^r \left(\prod_{t=1}^{r}((F^{\circ l} \circ L^{\circ k})^{\circ t})^{j_t}(A)\right)$$

Teorema 3.1.2. *Sejam A e B_j operadores lineares e seja F um polinômio. Suponha que, para $j = 1, 2, \ldots, n$, $A\,B_j \;=\; B_j\,F(A)$. Então,*

$$A\,B_1B_2\cdots B_n \;=\; B_1B_2\cdots B_n\,F^{\circ(n)}(A).$$

Demonstração. Primeiro provemos que, para qualquer polinômio H e qualquer j,

$$H(A)\,B_j \;=\; B_j\,H\big(F(A)\big).$$

Faremos a demonstração por indução em k. Para $k = 1$, temos directamente da hipótese:

$$AB_j = B_jF(A).$$

Portanto, a fórmula é válida para $k = 1$. Suponha que, para algum $k \geq 1$, a igualdade seja válida, isto é,

$$A^kB_j = B_j\big(F(A)\big)^k.$$

Então,

$$A^{k+1}B_j = A\big(A^kB_j\big).$$

Pela hipótese de indução,

$$A^{k+1}B_j = A\big(B_j(F(A))^k\big).$$

Como $(F(A))^k$ é um polinômio em A, ele comuta com A, e assim

$$A^{k+1}B_j = (AB_j)(F(A))^k.$$

Usando a relação $AB_j = B_jF(A)$, obtemos

$$A^{k+1}B_j = (B_jF(A))(F(A))^k = B_j(F(A))^{k+1}.$$

Portanto, pelo princípio da indução matemática, temos

$$A^kB_j = B_j\big(F(A)\big)^k, \quad \forall\, k \geq 1.$$

Assim, para $H(z) = \sum_{j=1}^{n} \delta_j z^j$,

$$H(A)B_j = \sum_{j=1}^{n} \delta_j A^j B_j = \sum_{j=1}^{n} \delta_j\, B_j\big(F(A)\big)^j = \sum_{j=1}^{n} B_j\delta_j\big(F(A)\big)^j = B_j\,H\big(F(A)\big).$$

Agora, provamos o enunciado por indução em n. Para $n = 1$. Por hipótese,

$$AB_1 = B_1F(A) = B_1F^{\circ(1)}(A).$$

Suponha que para algum $k \geq 1$ valha

$$A\,B_1B_2\cdots B_k \;=\; B_1B_2\cdots B_k\,F^{\circ(k)}(A).$$

Então,

$$\begin{aligned}
A\,B_1\cdots B_kB_{k+1} &= \big(A\,B_1\cdots B_k\big)\,B_{k+1}\\
&= \big(B_1\cdots B_k\,F^{\circ(k)}(A)\big)\,B_{k+1}\\
&= B_1\cdots B_k\,\big(F^{\circ(k)}(A)\,B_{k+1}\big)\\
&= B_1\cdots B_k\,\big(B_{k+1}\,F^{\circ(k)}(F(A))\big)\\
&= B_1\cdots B_kB_{k+1}\,F^{\circ(k+1)}(A).
\end{aligned}$$

Logo, a afirmação vale para $k+1$. Pelo Princípio da Indução Matemática, vale para todo n. □

Teorema 3.1.3. *Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e B operadores lineares e seja F um polinômio. Suponha que, para cada $j = 1, 2, \ldots, n$,*

$$A_jB = BF(A_j).$$

Então

$$A_1A_2\cdots A_nB = BF(A_1)F(A_2)\cdots F(A_n).$$

Demonstração. A demonstração será feita por indução em n. Como base $n = 1$: Temos directamente da hipótese

$$A_1B = BF(A_1).$$

Agora, suponha que para algum $k \geq 1$ valha

$$A_1A_2\cdots A_kB = BF(A_1)F(A_2)\cdots F(A_k).$$

Mostremos que a afirmação é verdadeira para $k+1$. De facto,

$$\begin{aligned}
A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}B &= A_1A_2\cdots A_k\big(A_{k+1}B\big)\\
&= A_1A_2\cdots A_k\big(BF(A_{k+1})\big)\\
&= \big(A_1A_2\cdots A_kB\big)F(A_{k+1}).
\end{aligned}$$

Aplicando a hipótese de indução ao produto $A_1\cdots A_kB$, obtemos:

$$\big(A_1A_2\cdots A_kB\big)F(A_{k+1}) = \big(BF(A_1)F(A_2)\cdots F(A_k)\big)F(A_{k+1}),$$

ou seja,

$$A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}B = BF(A_1)F(A_2)\cdots F(A_k)F(A_{k+1}).$$

Assim sendo, pelo princípio da Indução Matemática, a igualdade

$$A_1A_2\cdots A_nB = BF(A_1)F(A_2)\cdots F(A_n)$$

é válida para todo n. □

3.2 Representação das composições do polinómio F em operadores integrais

Nesta secção apresentamos a representação das composições sucessivas do polinómio F aplicadas a operadores integrais em $L^p(\mathbb{R})$. Calculamos as operações algébricas de elementos da álgebra de representantes da relação de comutação $AB = BF(A)$ quando A e B são operadores integrais e F um polinómio.

Lema 3.2.1. *Sejam $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$, com $\alpha_1 < \beta_1$, e $k_a(t,s) : \mathbb{R} \times [\alpha_1, \beta_1] \to \mathbb{R}$ uma função mensurável tal que o operador $(Ax)(t) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_a(t,s)x(s)\,ds$, para quase todo t, está definido em $L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$. Considere um polinômio $F(z) = \delta_0 + \delta_1 z + \cdots + \delta_m z^m$, $\delta_0, \ldots, \delta_m \in \mathbb{R}$, e defina*

$$k_{a,0}(t,s) = k_a(t,s), \quad k_{a,j}(t,s) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_a(t,r)\, k_{a,j-1}(r,s)\, dr, \quad j = 1, \ldots, m,$$

$$F_{m,1}(k_a(t,s)) = \sum_{j=1}^{m} \delta_j\, k_{a,j-1}(t,s),$$

$$F_{m,i}(k_a(t,s)) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,1}(k_a(t,r))\, F_{m,i-1}(k_a(r,s))\, dr, \quad i = 2, 3, \ldots$$

Então, para cada $i = 0, 1, 2, \ldots$, o operador $G_i : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$, definido por

$$(G_i x)(t) = \begin{cases} x(t), & i = 0, \\ \int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,i}(k_a(t,s))\, x(s)\, ds, & i = 1, 2, \ldots, \end{cases} \tag{3.12}$$

é linear e satisfaz a seguinte propriedade:

$$G_i\big(G_j x\big)(t) \;=\; (G_{i+j}x)(t), \quad i, j = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.13}$$

Demonstração. Por definição, o operador G_i é bem definido e linear. Se pelo menos uma das variáveis i, j for zero, então o resultado é trivial. Suponhamos que $i \neq 0$ e $j \neq 0$. Fixamos

$j \neq 0$ e procedemos por indução em i. Para $i = 1$, pelo teorema de Fubini, temos:

$$
\begin{aligned}
G_1(G_j x)(t) &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,1}(k_a(t,s)) \left(\int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,j}(k_a(s,r))\, x(r)\, dr \right) ds \\
&= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left(\int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,1}(k_a(t,s)) F_{m,j}(k_a(s,r))\, ds \right) x(r)\, dr \\
&= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,j+1}(k_a(t,r))\, x(r)\, dr = (G_{j+1}x)(t).
\end{aligned}
$$

Suponhamos agora que, para algum $i = \ell$, vale

$$G_\ell(G_j x)(t) = (G_{\ell+j}x)(t).$$

Combinando este facto com a mesma ideia do caso $G_1 G_j$, obtemos:

$$G_{\ell+1}(G_j x)(t) = G_1\big(G_\ell(G_j x)\big)(t) = G_1\big(G_{\ell+j}x\big)(t) = (G_{\ell+1+j}x)(t).$$

Como j foi escolhido arbitrariamente, isto é válido para todos $i, j = 0, 1, 2, \ldots$. □

Apresentamos a seguir uma proposição que permite calcular a $n-$enésima composição da função F, aplicando o Lema (3.2.1) .

Proposição 3.2.1. *Seja $A : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, definido, para quase todo t, por*

$$(Ax)(t) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_a(t,s)\, x(s)\, ds, \tag{3.14}$$

onde $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ e $k_a(t,s) : \mathbb{R}\times[\alpha_1, \beta_1] \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável. Considere um polinômio

$$F(z) = \delta_0 + \delta_1 z + \cdots + \delta_m z^m, \quad \delta_0, \ldots, \delta_m \in \mathbb{R}.$$

Definimos

$$k_{a,0}(t,s) = k_a(t,s), \quad k_{a,j}(t,s) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_a(t,r)\, k_{a,j-1}(r,s)\, dr, \quad j = 1, \ldots, m,$$

$$F_{m,1}(k_a(t,s)) = \sum_{j=1}^{m} \delta_j\, k_{a,j-1}(t,s),$$

$$F_{m,i}(k_a(t,s)) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,1}(k_a(t,r))\, F_{m,i-1}(k_a(r,s))\, dr, \quad i = 2, 3, \ldots$$

Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\big(F^{\circ(n)}(A)x\big)(t) \;=\; \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \delta_0^{n-i}\,(G_i x)(t), & \text{se } \delta_0 \neq 0, \\ (G_n x)(t), & \text{caso contrário}, \end{cases} \tag{3.15}$$

onde $F^{\circ(0)}$ *é o operador identidade,* G_i *é dado por* (3.12) *e* $\binom{n}{i} = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$.

Demonstração. Procedemos por indução e suponhamos que $\delta_0 \neq 0$. Se $n = 0$, o resultado é trivial. Consideremos $n = 1$. De (3.15) temos:

$$\sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} \delta_0^{1-i}\,(G_i x)(t) = \delta_0 x(t) + (G_1 x)(t).$$

Como

$$(G_1 x)(t) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,1}(k_a(t,s))\, x(s)\, ds,$$

segue que

$$\delta_0 x(t) + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left(\sum_{j=1}^{m} \delta_j\, k_{a,j-1}(t,s) \right) x(s)\, ds = (F(A)x)(t),$$

como podemos verificar a partir da relação (2.5). Para $n = 2$, comecemos pelo lado esquerdo. Usando o Teorema de Fubini, obtemos:

$$(F(F(A))x)(t) = \delta_0 (F(A)x)(t) + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,1}(k_a(t,s))\,(F(A)x)(s)\, ds.$$

Desenvolvendo o primeiro termo:

$$\delta_0 (F(A)x)(t) = \delta_0 \left(\delta_0 x(t) + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,1}(k_a(t,s))\, x(s)\, ds \right).$$

Substituindo , obtemos:

$$\begin{aligned} (F(F(A))x)(t) = {} & \delta_0^2 x(t) + \delta_0 \int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,1}(k_a(t,s))\, x(s)\, ds \\ & + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,1}(k_a(t,s)) \left(\delta_0 x(s) + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,1}(k_a(s,r))\, x(r)\, dr \right) ds. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
(F(F(A))x)(t) &= \delta_0^2 x(t) + 2\delta_0 \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,1}(k_a(t,s))\,x(s)\,ds \\
&\quad + \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,1}(k_a(t,s)) \left(\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,1}(k_a(s,r))\,x(r)\,dr \right) ds \\
&= \delta_0^2 x(t) + 2\delta_0 \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,1}(k_a(t,s))\,x(s)\,ds + \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,2}(k_a(t,s))\,x(s)\,ds \\
&= \delta_0^2 (G_0 x)(t) + 2\delta_0 (G_1 x)(t) + (G_2 x)(t).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Suponhamos agora que a fórmula seja válida para $n = j$. Então, pelo Teorema de Fubini,

$$(F^{\circ(j+1)}(A)x)(t) = \big((F(F^{\circ j})(A))x\big)(t).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(F^{\circ(j+1)}(A)x)(t) &= \delta_0 (F^{\circ j}(A)x)(t) + \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,1}(k_a(t,s))\,(F^{\circ j}(A)x)(s)\,ds \\
&= \delta_0 \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \delta_0^{j-i} (G_i x)(t) + \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,1}(k_a(t,s)) \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \delta_0^{j-i} (G_i x)(s)\,ds.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
(F^{\circ(j+1)}(A)x)(t) &= \delta_0^{j+1} x(t) + \delta_0 \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} \delta_0^{j-i} (G_i x)(t) \\
&\quad + \delta_0^j \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,1}(k_a(t,s))\,x(s)\,ds + \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} \delta_0^{j-i} \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,1}(k_a(t,s))(G_i x)(s)\,ds.
\end{aligned}$$

Segue que,

$$\begin{aligned}
(F^{\circ(j+1)}(A)x)(t) &= \delta_0^{j+1} x(t) + \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} \delta_0^{j+1-i} \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,i}(k_a(t,s))\,x(s)\,ds \\
&\quad + \delta_0^j \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,1}(k_a(t,s))\,x(s)\,ds + \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} \delta_0^{j-i} \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,i+1}(k_a(t,s))\,x(s)\,ds
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
(F^{\circ(j+1)}(A)x)(t) &= \delta_0^{j+1}x(t) + j\delta_0^j \int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,1}\big(k_a(t,s)\big)\, x(s)\, ds \\
&+ \sum_{i=2}^{j} \binom{j}{i} \delta_0^{j+1-i} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,i}\big(k_a(t,s)\big)\, x(s)\, ds + \delta_0^j \int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,1}\big(k_a(t,s)\big)\, x(s)\, ds \\
&+ \sum_{i=1}^{j-1} \binom{j}{i} \delta_0^{j-i} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,i+1}\big(k_a(t,s)\big)\, x(s)\, ds + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,j+1}\big(k_a(t,s)\big)\, x(s)\, ds.
\end{aligned}
$$

Observando que

$$
\sum_{i=1}^{j-1} \binom{j}{i} \delta_0^{j-i} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,i+1}\big(k_a(t,s)\big)\, x(s)\, ds = \sum_{i=2}^{j} \binom{j}{i-1} \delta_0^{j+1-i} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,i}\big(k_a(t,s)\big)\, x(s)\, ds,
$$

onde, se considerarmos $r = i+1 \;\Rightarrow\; i = r-1$, assim, obtemos que, quando $i = 1$, então $r = 2$, e quando $i = j-1$, então $r = j$. Logo, os limites de soma transformam-se em $i = 1, \ldots, j-1 \;\rightarrow\; r = 2, \ldots, j$. Usando a fórmula dos coeficientes binomiais (veja em [19], página 418),

$$
\binom{j}{i} + \binom{j}{i-1} = \binom{j+1}{i}, \quad \text{para } i = 2, \ldots, j,
$$

obtemos

$$
(F^{\circ(j+1)}(A)x)(t) = \sum_{i=0}^{j+1} \binom{j+1}{i} \delta_0^{j+1-i} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,i}\big(k_a(t,s)\big)\, x(s)\, ds.
$$

Assim,

$$
(F^{\circ(j+1)}(A)x)(t) = \sum_{i=0}^{j+1} \binom{j+1}{i} \delta_0^{j+1-i}\, (G_i x)(t).
$$

Demonstremos agora a fórmula (3.15) no caso em que $\delta_0 = 0$. Como $\delta_0 = 0$, então $F(z) = \sum_{j=1}^{m} \delta_j z^j$. Para tal queremos provar que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$
\big(F^{\circ(n)}(A)x\big)(t) = (G_n x)(t),
$$

onde G_n é definido em (3.12). Para $n = 0$, temos por definição que $F^{\circ(0)}$ é o operador identidade e G_0 também:

$$
(F^{\circ(0)}(A)x)(t) = x(t) = (G_0 x)(t).
$$

Logo o resultado vale para $n = 0$.

Caso $n = 1$. Sabendo que $\delta_0 = 0$ então,

$$
(F(A)x)(t) = \sum_{j=1}^{m} \delta_j\, (A^j x)(t).
$$

Pela definição de $k_{a,j-1}$ (núcleo de A^j) e da função

$$F_{m,1}(k_a(t,s)) = \sum_{j=1}^{m} \delta_j\, k_{a,j-1}(t,s),$$

obtemos

$$(F(A)x)(t) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,1}(k_a(t,s))\, x(s)\, ds = (G_1 x)(t).$$

Portanto a fórmula vale para $n = 1$. Suponha que $F^{\circ(j)}(A) = G_j$ para algum $j \geq 1$. Então

$$F^{\circ(j+1)}(A) = F\big(F^{\circ j}(A)\big) = F(A) \circ F^{\circ j}(A) = F(A) \circ G_j.$$

Pelo Teorema de Fubini e a definição (3.12) de G_j temos,

$$\begin{aligned}
\big(F(A) \circ G_j\, x\big)(t) &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,1}(k_a(t,r))\, (G_j x)(r)\, dr \\
&= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,1}(k_a(t,r)) \left(\int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,j}(k_a(r,s))\, x(s)\, ds \right) dr \\
&= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left(\int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,1}(k_a(t,r))\, F_{m,j}(k_a(r,s))\, dr \right) x(s)\, ds \\
&= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,j+1}(k_a(t,s))\, x(s)\, ds \\
&= (G_{j+1} x)(t),
\end{aligned}$$

Assim $F^{\circ(j+1)}(A) = G_{j+1}$. Pelo princípio da indução matemática, concluímos que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\big(F^{\circ(n)}(A)x\big)(t) = (G_n x)(t),$$

como se queria demonstrar no caso $\delta_0 = 0$. □

Exemplo 3.2.1. *Seja $A : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, definido, para quase todo t, por $(Ax)(t) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_a(t,s)\, x(s)\, ds$, onde $k_a(t,s) : \mathbb{R} \times [\alpha_1, \beta_1] \to \mathbb{R}$, $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ é uma função mensurável. Considere o polinômio definido por $F(z) = \delta_0 + \delta_1 z$, $\delta_0, \delta_1 \in \mathbb{R}$. Definimos*

$$F_{1,1}(k_a(t,s)) = \delta_1 k_a(t,s), \qquad F_{1,i}(k_a(t,s)) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \delta_1 k_a(t,r)\, F_{1,i-1}(k_a(r,s))\, dr, \quad i = 2, 3, \ldots$$

Então, temos

$$\big(F^{\circ(n)}(A)x\big)(t) \;=\; \begin{cases} \delta_0^n\, x(t) \;+\; \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}\, \delta_0^{n-i} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{1,i}(k_a(t,s))\, x(s)\, ds, & \textit{se } \delta_0 \neq 0, \\ \displaystyle\int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{1,i}(k_a(t,s))\, x(s)\, ds, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

De facto, isso decorre da Proposição (3.2.1).

Exemplo 3.2.2. *Seja* $A : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, *definido, para quase todo* t, *por*

$$(Ax)(t) \;=\; \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_a(t,s)\, x(s)\, ds,$$

onde $k_a(t,s) : \mathbb{R} \times [\alpha_1, \beta_1] \to \mathbb{R}$ $(\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R})$ *é uma função mensurável. Considere um polinômio definido por*

$$F(z) = \delta z^d, \quad d \in \mathbb{N},\; d > 0,\; \delta \in \mathbb{R},\; \delta \neq 0.$$

Definimos

$$k_{a,0}(t,s) = k_a(t,s), \qquad k_{a,j}(t,s) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_a(t,r)\, k_{a,j-1}(r,s)\, dr, \quad j = 1, \ldots, d,$$

$$F_{d,1}(k_a(t,s)) = \delta\, k_{a,d-1}(t,s), \qquad F_{d,i}(k_a(t,s)) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \delta\, k_{d-1}(t,r)\, F_{d,i-1}(k_a(r,s))\, dr, \quad i = 2, 3, \ldots$$

Então, temos

$$\big(F^{\circ(n)}(A)x\big)(t) \;=\; \int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{d,n}(k_a(t,s))\, x(s)\, ds.$$

De facto, isso decorre imediatamente da Proposição (3.2.1).

Vamos apresentar a seguir, um corolário que segue da Proposição (3.2.1) em que o núcleo do operador A é separável.

Corolário 3.2.1. *Considere o operador* $A : L^p([\alpha_1, \beta_1]) \longrightarrow L^p([\alpha_1, \beta_1])$, $1 \leq p \leq \infty$, *definido da seguinte forma:* $(Ax)(t) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} a(t)\, b(s)\, x(s)\, ds$, *onde* $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$, $a \in L^p([\alpha_1, \beta_1])$, $b \in L^q([\alpha_1, \beta_1])$, $1 \leq q \leq \infty$, *com* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Considere o polinômio*

$$F(z) = \sum_{j=0}^{m} \delta_j z^j, \quad \delta_0, \ldots, \delta_m \in \mathbb{R}.$$

Então, para $n \in \mathbb{N}$, vale que

$$\big(F^{\circ(n)}(A)x\big)(t) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \delta_0^{n-j}\,(G_j x)(t) = \delta_0^n\, x(t) + \xi\,(Ax)(t),$$

onde

$$\xi = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \delta_0^{n-j} \sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_j=1}^{m} \mu^{\alpha_j - 1} \prod_{l=1}^{j} \delta_{i_l}, & \textit{se } \delta_0 \neq 0, \\ \displaystyle\sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_n=1}^{m} \mu^{\alpha_n - 1} \prod_{l=1}^{n} \delta_{i_l}, & \textit{caso contrário}, \end{cases}$$

com

$$\mu = \mu_{[\alpha_1,\beta_1]}(a,b) \;=\; \int_{\alpha_1}^{\beta_1} a(s)b(s)\,ds, \quad \alpha_j = \sum_{l=1}^{j} i_l.$$

Demonstração. Suponha que $\delta_0 \neq 0$. Aplicando a Proposição (3.2.1) , temos

$$k_{a,0}(t,s) = a(t)b(s),$$

$$k_{a,1}(t,s) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} a(t)b(\tau)a(\tau)b(s)\,d\tau = k_{a,0}(t,s) \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_{a,0}(\tau,\tau)\,d\tau = k_{a,0}(t,s)\mu,$$

onde

$$\mu = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_{a,0}(\tau,\tau)\,dr = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} a(\tau)b(\tau)\,dr.$$

O cálculo dos núcleos iterados fornece

$$k_{a,2}(t,s) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_{a,0}(t,\tau)k_{a,1}(\tau,s)\,d\tau = \mu \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_{a,0}(t,\tau)k_{a,0}(\tau,s)\,d\tau = \mu^2 k_{a,0}(t,s).$$

De forma geral,

$$k_{a,j}(t,s) = \mu^j k_{a,0}(t,s), \quad j = 0, \ldots, m.$$

Agora, ao calcular $F_{m,i}(k_a(t,s))$, obtemos

$$F_{m,1}(k_a(t,s)) = \sum_{j=1}^{m} \delta_j\, k_{a,j-1}(t,s) = k_{a,0}(t,s) \sum_{j=1}^{m} \delta_j \mu^{j-1}, \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} F_{m,2}(k_a(t,s)) &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,1}(k_a(t,\tau))\, F_{m,1}(k_a(\tau,s))\,d\tau \\ &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \Big(k_{a,0}(t,\tau) \sum_{j=1}^{m} \delta_j \mu^{j-1}\, k_{a,0}(\tau,s) \sum_{l=1}^{m} \delta_l \mu^{l-1}\Big)\,d\tau \qquad (3.18) \\ &= k_{a,0}(t,s) \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \delta_j \delta_l\, \mu^{j+l-1}. \end{aligned}$$

Afirmamos que

$$\begin{aligned} F_{m,j}(k_a(t,s)) &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,1}(k_a(t,\tau))\, F_{m,j-1}(k_a(\tau,s))\, d\tau \\ &= k_{a,0}(t,s) \sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_j=1}^{m} \mu^{\alpha_j - 1} \prod_{l=1}^{j} \delta_{i_l}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

onde $\alpha_j = i_1 + \cdots + i_j$. Provaremos esta afirmação por indução. Já mostramos que ela vale para $j = 1$ e $j = 2$. Suponha que valha para j. Então temos:

$$F_{m,j+1}(k_a(t,s)) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,1}(k_a(t,\tau))\, F_{m,j}(k_a(\tau,s))\, dr = I_{m,j+1}.$$

Usando (3.17) e (3.19):

$$\begin{aligned} I_{m,j+1} &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \Big(k_{a,0}(t,\tau) \sum_{r=1}^{m} \delta_r \mu^{r-1}\, k_{a,0}(\tau,s) \sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_j=1}^{m} \mu^{\alpha_j-1} \prod_{l=1}^{j} \delta_{i_l} \Big)\, d\tau \\ &= \left(\sum_{r=1}^{m} \delta_r \mu^{r-1} \right) \left(\sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_j=1}^{m} \mu^{\alpha_j-1} \prod_{l=1}^{j} \delta_{i_l} \right) \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_{a,0}(t,\tau) k_{a,0}(\tau,s)\, d\tau \\ &= k_{a,0}(t,s)\, \mu \left(\sum_{r=1}^{m} \delta_r \mu^{r-1} \right) \left(\sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_j=1}^{m} \mu^{\alpha_j-1} \prod_{l=1}^{j} \delta_{i_l} \right) \\ &= k_{a,0}(t,s) \sum_{r=1}^{m} \sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_j=1}^{m} \mu^{\alpha_j+r-1}\, \delta_r \prod_{l=1}^{j} \delta_{i_l} \\ &= k_{a,0}(t,s) \sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_{j+1}=1}^{m} \mu^{\alpha_{j+1}-1} \prod_{l=1}^{j+1} \delta_{i_l}. \end{aligned}$$

Aplicando a Proposição (3.2.1), temos

$$(F^{\circ n}(A)x)(t) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \delta_0^{n-j} (G_j x)(t) = \delta_0^n x(t) + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \delta_0^{n-j} \sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_j=1}^{m} \mu^{\alpha_j-1} \prod_{l=1}^{j} \delta_{i_l} (Ax)(t).$$

$$(Ax)(t) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} a(t)b(s)x(s)\, ds, \quad \mu = \mu_{[\alpha_1,\beta_1]}(a,b) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} a(s)b(s)\, ds, \quad \alpha_j = \sum_{l=1}^{j} i_l.$$

Do mesmo modo, provamos o caso quando $\delta_0 = 0$. Suponha $\delta_0 = 0$. Então o polinômio F tem a forma

$$F(z) = \sum_{j=1}^{m} \delta_j z^j.$$

Pela Proposição 3.2.1 (caso $\delta_0 = 0$) sabemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\big(F^{\circ(n)}(A)x\big)(t) = (G_n x)(t),$$

onde G_n é definido a partir da fórmula (3.14). Pelo cálculo dos $F_{m,i}$ já efectuado para o caso geral, para todo $j \geq 1$ temos

$$F_{m,j} k_{a,0}(t,s) = k_{a,0}(t,s) \sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_j=1}^{m} \mu^{\alpha_j - 1} \prod_{l=1}^{j} \delta_{i_l},$$

com $\alpha_j = i_1 + \cdots + i_j$. Portanto, aplicando esse núcleo ao operador G_j,

$$\begin{aligned}(G_j x)(t) &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,j}(k_{a,0})(t,s)\, x(s)\, ds \\ &= \left(\sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_j=1}^{m} \mu^{\alpha_j - 1} \prod_{l=1}^{j} \delta_{i_l} \right) \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_{a,0}(t,s)\, x(s)\, ds \\ &= \left(\sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_j=1}^{m} \mu^{\alpha_j - 1} \prod_{l=1}^{j} \delta_{i_l} \right) (Ax)(t).\end{aligned}$$

Tomando $j = n$, obtemos

$$\big(F^{\circ(n)}(A)x\big)(t) = (G_n x)(t) = \xi\, (Ax)(t),$$

onde

$$\xi \;=\; \sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_n=1}^{m} \mu^{\alpha_n - 1} \prod_{l=1}^{n} \delta_{i_l}, \qquad \alpha_n = i_1 + \cdots + i_n.$$

□

Exemplo 3.2.3. *Seja* $A : L^p([\alpha_1, \beta_1]) \to L^p([\alpha_1, \beta_1])$ *com* $(Ax)(t) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} a(t)\, b(s)\, x(s)\, ds$, $1 \leq p \leq \infty$, $a \in L^p$, $b \in L^q$ *e* $1/p + 1/q = 1$. *Considere*

$$F(z) = z + 1 \quad (\delta_0 = \delta_1 = 1,\ m = 1), \qquad n = 2.$$

Pelo Corolário 3.2.1,

$$\big(F^{\circ(2)}(A)x\big)(t) = \sum_{j=0}^{2} \binom{2}{j} \delta_0^{2-j}\, (G_j x)(t) = \delta_0^2\, x(t) + \xi\, (Ax)(t),$$

com

$$\xi = \sum_{j=1}^{2} \binom{2}{j} \delta_0^{2-j} \sum_{i_1=1}^{1} \cdots \sum_{i_j=1}^{1} \mu^{\alpha_j - 1} \prod_{l=1}^{j} \delta_{i_l}, \qquad \mu = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} a(s)\, b(s)\, ds, \quad \alpha_j = \sum_{l=1}^{j} i_l.$$

Aqui, como $m = 1$, *temos necessariamente* $i_l = 1$ *e, portanto,* $\alpha_j = j$ *e* $\prod_{l=1}^{j} \delta_{i_l} = 1$. *Logo,*

$$\xi = \binom{2}{1} \mu^0 + \binom{2}{2} \mu^1 = 2 + \mu.$$

Concluímos que

$$\big(F^{\circ(2)}(A)x\big)(t) = x(t) + (2 + \mu)\, (Ax)(t) \quad \textit{onde,} \quad (Ax)(t) = a(t) \int_{\alpha_1}^{\beta_1} b(s)\, x(s)\, ds.$$

Exemplo 3.2.4. *Seja* $A : L^p([\alpha_1, \beta_1]) \to L^p([\alpha_1, \beta_1])$, *e* $(Ax)(t) = \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} a(t)\, b(s)\, x(s)\, ds$, *com* $1 \le p \le \infty$, $a \in L^p$, $b \in L^q$ *e* $1/p + 1/q = 1$. *Considere o polinômio* $F(z) = \delta z^d$, $\delta \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$, $d \ge 1$, *e fixe* $n \in \mathbb{N}$.

Como $\delta_0 = 0$ *pelo corolário Corolário 3.2.1*

$$\xi \;=\; \sum_{i_1=1}^{d} \cdots \sum_{i_n=1}^{d} \mu^{\alpha_n - 1} \prod_{l=1}^{n} \delta_{i_l},$$

mas, neste caso, o único índice i_l *que dá coeficiente não nulo é* $i_l = d$. *Logo,* $\alpha_n = \sum_{l=1}^n i_l = nd$ *e* $\prod_{l=1}^n \delta_{i_l} = \delta^n$. *Portanto*

$$\xi = \delta^n \, \mu^{nd-1}, \qquad \text{onde} \quad \mu = \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} a(s) b(s)\, ds.$$

Concluímos que

$$\big(F^{\circ(n)}(A)x\big)(t) \;=\; \delta^n \, \mu^{nd-1} \, (Ax)(t)$$

ou,

$$\big(F^{\circ(n)}(A)x\big)(t) = \delta^n \, \mu^{nd-1} \, a(t) \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} b(s)\, x(s)\, ds.$$

A proposição a seguir apresenta propriedades de camposições de representantes da relação de comutação, aplicando propriedades de composição.

Proposição 3.2.2. *Considere os operadores* A *e* B *definidos por* $A : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$ *e* $B : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, *definidos quase em todo* t *por* $(Ax)(t) = \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} k_a(t,s)x(s)\, ds$ *e* $(Bx)(t) = \int\limits_{\alpha_2}^{\beta_2} k_b(t,s)x(s)\, ds$, *onde* $k_a : \mathbb{R} \times [\alpha_1, \beta_1] \to \mathbb{R}$ *e* $k_b : \mathbb{R} \times [\alpha_2, \beta_2] \to \mathbb{R}$ *são uma funções mensuráveis. Considere um polinômio*

$$F(z) = \sum_{j=0}^{m} \delta_j z^j, \quad \delta_0, \ldots, \delta_m \in \mathbb{R}.$$

Então,

$$(A^r B^l x)(t) = \int\limits_{\alpha_2}^{\beta_2} k_{a,r,l}(t,s)x(s)\, ds, \tag{3.20}$$

e

$$\Big(B^l \left(F^{\circ(n)}\right)^k (A) x\Big)(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{kn} \delta_0^{kn-i} \binom{kn}{i} \int\limits_{\alpha_2}^{\beta_2} k_b(t,s)(G_i x)(s)\, ds, & \text{se } \delta_0 \neq 0, \\ \displaystyle\int\limits_{\alpha_2}^{\beta_2} k_b(t,s)(G_{kn} x)(s)\, ds, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3.21}$$

onde

$$k_{a,r,l}(t,s) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_{a,r-1}(t,\tau)\, k_{b,l-1}(\tau,s)\, d\tau, \quad l,r = 1,2,3,\dots,$$

$$k_{a,j}(t,s) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k(t,\tau)\, k_{a,j-1}(\tau,s)\, d\tau, \quad j = 1,\dots,m, \qquad k_{a,0}(t,s) = k_a(t,s),$$

$$k_{b,j}(t,s) = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} k_b(t,\tau)\, k_{b,j-1}(\tau,s)\, dr, \quad j = 1,\dots,m, \qquad k_{b,0}(t,s) = k_b(t,s),$$

e G_i, $i = 0,\dots,k_n$, *são dados por (3.12).*

Demonstração. A partir de (2.2), temos que

$$(A^r x)(t) \;=\; \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_{a,r-1}(t,s)\, x(s)\, ds, \quad (B^l x)(t) \;=\; \int_{\alpha_2}^{\beta_2} k_{b,l-1}(t,s)\, x(s)\, ds, \quad r,l = 1,2,\dots$$

Usando o Teorema de Fubini, obtemos

$$(A^r B^l x)(t) \;=\; A^r(B^l x)(t) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_{a,r-1}(t,s) \left(\int_{\alpha_2}^{\beta_2} k_{b,l-1}(s,\tau)\, x(\tau)\, d\tau \right) ds \tag{3.22}$$

$$= \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \left(\int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_{r-1}(t,s)\, k_{b,l-1}(s,\tau)\, ds \right) x(\tau)\, d\tau = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} k_{r,l}(t,\tau)\, x(\tau)\, d\tau. \tag{3.23}$$

Para a fórmula (3.21), temos, para $l = 1,2,\dots$ e $\delta_0 \neq 0$,

$$\begin{aligned} B^l\big((F^{\circ(n)})^k(A)x\big)(t) &= \int_{\alpha_2}^{\beta_2} k_{b,l-1}(t,s)\, \big((F^{\circ(n)})^k(A)x\big)(s)\, ds \\ &= \int_{\alpha_2}^{\beta_2} k_{b,l-1}(t,s)\, \big((F^{\circ(nk)})(A)x\big)(s)\, ds. \\ &= \int_{\alpha_2}^{\beta_2} k_{b,l-1}(t,s) \left(\sum_{i=0}^{kn} \delta_0^{kn-i} \binom{kn}{i} (G_i x)(s) \right) ds \\ &= \sum_{i=0}^{kn} \delta_0^{kn-i} \binom{kn}{i} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} k_{b,l-1}(t,s)\, (G_i x)(s)\, ds. \end{aligned}$$

Do mesmo modo, pode-se provar a fórmula correspondente quando $\delta_0 = 0$. Suponhamos que $\delta_0 = 0$, de modo que $F(z) = \sum_{j=1}^{m} \delta_j z^j$. Observemos que, pela definição de $F_{m,1}$ no Lema 3.2.1, tem-se

$$(F(A)x)(t) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,1}(k_a(t,s))\, x(s)\, ds = (G_1x)(t).$$

Mostremos, por indução em n, que $F^{\circ n}(A) = G_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$

Seja $n = 1$, então temos $F^{\circ 1}(A) = F(A) = G_1$. Agora, suponha $F^{\circ n}(A) = G_n$. Então, pela propriedade (3.13) do Lema 3.2.1.

$$F^{\circ(n+1)}(A) = F\big(F^{\circ n}(A)\big) = F(G_n) = G_1(G_nx) = G_{n+1}x,$$

Logo, a igualdade vale para $n+1$. Assim, por indução, obtemos

$$F^{\circ n}(A) = G_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vejamos que pelo Lema 3.2.1,

$$\big((F^{\circ n})^k\big)(A) = \underbrace{G_n \circ G_n \circ \cdots \circ G_n}_{k \text{ vezes}} = G_{kn},$$

Finalmente, aplicando B^l, temos

$$\begin{aligned} B^l\big((F^{\circ n})^k(A)x\big)(t) &= B^l\big(G_{kn}x\big)(t) \\ &= \int_{\alpha_2}^{\beta_2} k_{b,l-1}(t,s)\,(G_{kn}x)(s)\, ds. \end{aligned}$$

Portanto, no caso $\delta_0 = 0$, obtemos a fórmula desejada:

$$\Big(B^l\left((F^{\circ n})^k(A)\right)x\Big)(t) = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} k_{b,l-1}(t,s)\,(G_{kn}x)(s)\, ds.$$

$\square$

Exemplo 3.2.5. *Considere os operadores A e B da Proposição 3.2.2 e o polinómio*

$$F(z) = z + 1, \qquad \delta_0 = \delta_1 = 1.$$

Tomando $l = 2$, $n = 3$ e $k = 2$, temos $kn = 2 \cdot 3 = 6$. Como $\delta_0 = 1 \neq 0$, a igualdade (3.21) *dá, para todo $x \in L^p(\mathbb{R})$ e quase todo t,*

$$\begin{aligned} \Big(B^2\left(F^{\circ(3)}\right)^2(A)x\Big)(t) &= \sum_{i=0}^{6} \delta_0^{6-i}\binom{6}{i} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} k_b(t,s)\,(G_ix)(s)\, ds \\ &= \sum_{i=0}^{6} \binom{6}{i} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} k_b(t,s)\,(G_ix)(s)\, ds, \end{aligned}$$

pois $\delta_0^{6-i} = 1$ para todo i. Aqui os operadores G_i são os definidos em (3.13).

Exemplo 3.2.6. *Considere os operadores A e B da Proposição 3.2.2:*

$$(Ax)(t) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_a(t,s)\,x(s)\,ds, \qquad (Bx)(t) = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} k_b(t,s)\,x(s)\,ds,$$

com núcleos mensuráveis k_a e k_b. Tome

$$F(z) = \delta z^d, \qquad \delta \in \mathbb{R},\ d \in \mathbb{N},\ d \geq 1,$$

e fixe $l = 3$, $n = 2$, $k = 2$. Então $kn = k \cdot n = 4$ e, como $\delta_0 = 0$, a igualdade (3.21) *dá, para todo $x \in L^p(\mathbb{R})$ e quase todo t,*

$$\Big(B^3\left(F^{\circ(2)}\right)^2(A)x\Big)(t) = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} k_b(t,s)\,(G_4x)(s)\,ds$$

onde G_4 é o operador definido em (3.13) (isto é, o G_i correspondente a $i = 4$).

Vejamos a seguir, a proposição que calcula a k-ésima composição de $F^{\circ n}$.

Proposição 3.2.3. *Considere $A : L^p(\mathbb{R}) \longrightarrow L^p(\mathbb{R})$, $\quad 1 \leq p \leq \infty$, definido, para quase todo t, por $(Ax)(t) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_a(t,s)\,x(s)\,ds$, onde $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$ e $k_a(t,s) : \mathbb{R} \times [\alpha_1, \beta_1] \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável. Considere um polinômio definido por*

$$F(z) = \delta_0 + \delta_1 z + \cdots + \delta_m z^m, \quad \delta_0, \ldots, \delta_m \in \mathbb{R}.$$

Definimos

$$k_{a,0}(t,s) = k_a(t,s), \qquad k_{a,j}(t,s) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} k_a(t,\tau)\,k_{a,j-1}(\tau,s)\,d\tau, \quad j = 1, \ldots, m,$$

$$F_{m,1}(k_a(t,s)) = \sum_{j=1}^{m} \delta_j\,k_{a,j-1}(t,s),$$

$$F_{m,i}(k(t,s)) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} F_{m,1}(k_a(t,\tau))\,F_{m,i-1}(k_a(\tau,s))\,d\tau, \quad i = 2, 3, \ldots$$

Temos

$$(F^{\circ(n)})^k(A)x(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i_1=0}^{n} \cdots \sum_{i_k=0}^{n} \delta_0^{n-\alpha_k} \prod_{l=1}^{k} \binom{n}{i_l} (G_{\alpha_k}x)(t), & \textit{se } \delta_0 \neq 0, \\ (G_{nk}x)(t), & \textit{caso contrário}, \end{cases} \tag{3.24}$$

onde G_i é dado pela equação (3.13) e $\alpha_k = \sum_{j=0}^{k} i_j$, $\quad k = 1, 2, \ldots$

Demonstração. Suponha que $\delta_0 \neq 0$. Procedemos por indução. $k=1$, temos o lado direito

$$\sum_{i_1=0}^{n} \delta_0^{n-\alpha_1}\binom{n}{i_1}(G_{\alpha_1}x)(t) = (F^{\circ(n)}(A)x)(t),$$

pois $\alpha_1 = i_1$. Quando $k=2$ temos,

$$\begin{aligned}
(F^{\circ(n)})\big((F^{\circ(n)}(A)x)\big)(t) &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\delta_0^{n-i}\big(G_i(F^{\circ(n)}(A)x)\big)(t)\\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\delta_0^{n-i}G_i\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\delta_0^{n-j}(G_jx)(t)\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\delta_0^{n-i}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\delta_0^{n-j}G_i(G_jx)(t).
\end{aligned}$$

Pela fórmula (3.13) temos,

$$\begin{aligned}
(F^{\circ(n)})\big((F^{\circ(n)}(A)x)\big)(t) &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{i}\delta_0^{n-i}\binom{n}{j}\delta_0^{n-j}(G_{i+j}x)(t)\\
&= \sum_{i_1=0}^{n}\sum_{i_2=0}^{n}\delta_0^{2n-(i_1+i_2)}\prod_{l=1}^{2}\binom{n}{i_l}(G_{i_1+i_2}x)(t).
\end{aligned}$$

Suponha agora que a fórmula seja verdadeira para $k=w$. Então, para $k=w+1$ e pela fórmula (3.13) temos,

$$\begin{aligned}
(F^{\circ(n)})^{w+1}(A)x(t) &= F\big((F^{\circ(n)})^{w}(A)\big)x(t)\\
&= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\delta_0^{n-r}G_r\big((F^{\circ(n)})^{w}(A)x\big)(t)\\
&= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\delta_0^{n-r}\sum_{i_1=0}^{n}\cdots\sum_{i_w=0}^{n}\delta_0^{wn-\alpha_w}\prod_{l=1}^{w}\binom{n}{i_l}\,G_r(G_{\alpha_w}x)(t).
\end{aligned}$$

Pela fórmula (3.13) temos,

$$\begin{aligned}
(F^{\circ(n)})^{w+1}(A)x(t) &= \sum_{r=0}^{n}\sum_{i_1=0}^{n}\cdots\sum_{i_w=0}^{n}\binom{n}{r}\,\delta_0^{n-r}\,\delta_0^{wn-\alpha_w}\prod_{l=1}^{w}\binom{n}{i_l}\,G_r\big(G_{\alpha_w}x\big)(t)\\
&= \sum_{r=0}^{n}\sum_{i_1=0}^{n}\cdots\sum_{i_w=0}^{n}\binom{n}{r}\prod_{l=1}^{w}\binom{n}{i_l}\,\delta_0^{(w+1)n-(r+\alpha_w)}\,(G_{r+\alpha_w}x)(t)\\
&= \sum_{i_1=0}^{n}\cdots\sum_{i_w=0}^{n}\sum_{i_{w+1}=0}^{n}\prod_{l=1}^{w+1}\binom{n}{i_l}\,\delta_0^{(w+1)n-\alpha_{w+1}}\,(G_{\alpha_{w+1}}x)(t)\\
&= \sum_{i_1=0}^{n}\cdots\sum_{i_{w+1}=0}^{n}\delta_0^{(w+1)n-\alpha_{w+1}}\prod_{l=1}^{w+1}\binom{n}{i_l}\,(G_{\alpha_{w+1}}x)(t).
\end{aligned}$$

onde $r = i_{w+1}$ e assim, $\alpha_{w+1} = r + \alpha_w = i_1 + \cdots + i_{w+1}$. Agora suponha que $\delta_0 = 0$, isto é, $F(z) = \delta_1 z + \delta_2 z^2 + \cdots + \delta_m z^m$. Pelo Lema 3.2.1, o operador G_1 definido em (3.12) tem núcleo

$$F_{m,1}(k_a(t,s)) = \sum_{j=1}^{m} \delta_j \, k_{a,j-1}(t,s),$$

e, portanto, o operador integral associado a esse núcleo é exatamente $G_1 = \sum_{j=1}^{m} \delta_j A^j = F(A)$. Logo $F(A) = G_1$. Pela proposição (3.15)

$$F^{\circ(n)}(A) = G_n \qquad \text{para todo } n \geq 1.$$

Então $F^{\circ(n+1)}(A) = F\big(F^{\circ(n)}(A)\big) = F(G_n)$. Usando a definição de F como polinômio de operadores, $F(G_n) = \sum_{j=1}^{m} \delta_j \, G_n^j$. Mas, pelo Lema 3.2.1, os operadores G_i satisfazem $G_i \circ G_j = G_{i+j}$. Portanto, aplicando recursivamente, obtemos

$$G_n^j = \underbrace{G_n \circ G_n \circ \cdots \circ G_n}_{j \text{ vezes}} = G_{nj}.$$

Assim $F(G_n) = \sum_{j=1}^{m} \delta_j \, G_{nj}$. Finalmente, para a fórmula da Proposição 3.2.3, se $\delta_0 = 0$ então

$$(F^{\circ(n)})^k(A) = \underbrace{F^{\circ(n)}(A) \circ \cdots \circ F^{\circ(n)}(A)}_{k \text{ vezes}} = \underbrace{G_n \circ \cdots \circ G_n}_{k \text{ vezes}} = G_{nk}.$$

□

Exemplo 3.2.7. *Considere A e os operadores G_s como na Proposição 3.2.3. Tome*

$$F(z) = z + 1 \quad (\delta_0 = \delta_1 = 1), \qquad n = 3, \qquad k = 2.$$

Então $\alpha_2 = i_1 + i_2$ com $i_1, i_2 \in \{0,1,2,3\}$ e a fórmula da proposição fornece, para todo $x \in L^p(\mathbb{R})$ e quase todo t,

$$\begin{aligned}\big((F^{\circ(3)})^2(A)x\big)(t) &= \sum_{i_1=0}^{3} \sum_{i_2=0}^{3} \delta_0^{3-\alpha_2} \prod_{l=1}^{2} \binom{3}{i_l} (G_{\alpha_2} x)(t) \\ &= \sum_{i_1=0}^{3} \sum_{i_2=0}^{3} \prod_{l=1}^{2} \binom{3}{i_l} (G_{i_1+i_2} x)(t).\end{aligned}$$

Assim sendo

$$\big((F^{\circ(3)})^2(A)x\big)(t) = \sum_{i_1=0}^{3} \sum_{i_2=0}^{3} \binom{3}{i_1} \binom{3}{i_2} (G_{i_1+i_2} x)(t).$$

Escrevendo todos os termos, obtemos

$$\begin{aligned}\big((F^{\circ(3)})^2(A)x\big)(t) = {} & 1\,(G_0x)(t) + 3\,(G_1x)(t) + 3\,(G_2x)(t) + 1\,(G_3x)(t) \\ & + 3\,(G_1x)(t) + 9\,(G_2x)(t) + 9\,(G_3x)(t) + 3\,(G_4x)(t) \\ & + 3\,(G_2x)(t) + 9\,(G_3x)(t) + 9\,(G_4x)(t) + 3\,(G_5x)(t) \\ & + 1\,(G_3x)(t) + 3\,(G_4x)(t) + 3\,(G_5x)(t) + 1\,(G_6x)(t),\end{aligned}$$

onde cada termo corresponde a uma combinação (i_1, i_2) *com* $(\binom{3}{i_1}\binom{3}{i_2})(G_{i_1+i_2}x)(t)$, $\binom{3}{0} = 1$, $\binom{3}{1} = 3$, $\binom{3}{2} = 3$ *e* $\binom{3}{3} = 1$. *Portanto*

$$\begin{aligned}\big((F^{\circ(3)})^2(A)x\big)(t) &= 1(G_0x)(t) + 6\,(G_1x)(t) + 15\,(G_2x)(t) + 20\,(G_3x)(t)\\ &\quad + 15\,(G_4x)(t) + 6\,(G_5x)(t) + 1\,(G_6x)(t).\end{aligned}$$

Se definirmos,

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 1, \quad k_a(t,s) = t\,s, \quad F(z) = 1 + z.$$

Definimos a integral auxiliar:

$$\int_0^1 r^2\,dr = \frac{1}{3}.$$

Calculando $k_{a,j}(t,s)$, *temos*

$$\begin{aligned} k_{a,0}(t,s) &= k_a(t,s) = ts,\\ k_{a,1}(t,s) &= \int_0^1 k_a(t,r)k_{a,0}(r,s)\,dr = \int_0^1 (tr)(rs)\,dr = ts\cdot\frac{1}{3},\\ k_{a,2}(t,s) &= \int_0^1 k_a(t,r)k_{a,1}(r,s)\,dr = \int_0^1 (tr)(rs\cdot\frac{1}{3})\,dr = ts\cdot\frac{1}{9},\\ \Rightarrow k_{a,j}(t,s) &= ts\left(\frac{1}{3}\right)^j. \end{aligned}$$

Assim sendo, para encontar $F_{m,i}(t,s)$, *temos,*

$$\begin{aligned} F_{m,1}(t,s) &= k_{a,0}(t,s) = ts,\\ F_{m,2}(t,s) &= \int_0^1 F_{m,1}(t,r)F_{m,1}(r,s)\,dr = ts\cdot\frac{1}{3},\\ F_{m,3}(t,s) &= \int_0^1 F_{m,1}(t,r)F_{m,2}(r,s)\,dr = ts\cdot\frac{1}{9},\\ \Rightarrow F_{m,i}(t,s) &= ts\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}. \end{aligned}$$

Assim sendo, pela fórmula (3.12)

$$\begin{aligned} G_0x(t) &= x(t),\\ G_ix(t) &= \int_0^1 F_{m,i}(t,s)x(s)\,ds = \int_0^1 ts\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} x(s)\,ds = \frac{t}{3^{i-1}}\int_0^1 s\,x(s)\,ds, \quad i \geq 1. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\big((F^{\circ(3)})^2(A)x\big)(t) = \sum_{\alpha_2=0}^{6}\binom{6}{\alpha_2}(G_{\alpha_2}x)(t)$$

$$= G_0x(t) + \sum_{i=1}^{6}\binom{6}{i}\,G_ix(t) = x(t) + \sum_{i=1}^{6}\binom{6}{i}\,\frac{t}{3^{\,i-1}}\left(\int\limits_0^1 s\,x(s)\,ds\right)$$

$$= x(t) + t\left(\int\limits_0^1 s\,x(s)\,ds\right)\sum_{i=1}^{6}\frac{\binom{6}{i}}{3^{\,i-1}}.$$

Vejamos que,

$$\sum_{i=1}^{6}\frac{\binom{6}{i}}{3^{\,i-1}} = 3\sum_{i=1}^{6}\binom{6}{i}\left(\frac{1}{3}\right)^{i} = \frac{3367}{243}.$$

Finalmente,

$$\big((F^{\circ(3)})^2(A)x\big)(t) = x(t) + \frac{3367}{243}\,t\int\limits_0^1 s\,x(s)\,ds\ .$$

Conclusão e Recomendações

Conclusão

Este trabalho abordou o reordenamento em álgebras de representantes de relações de comutação do tipo $AB = BF(A)$, onde F é um polinómio, tendo como eixo central a identidade

$$AB = B\,F(A),$$

onde A e B são operadores lineares (ou elementos de uma álgebra associativa) e F é um polinómio. A Proposição 3.1.1 estabelece condições necessárias e suficientes para operadores integrais satisfazerem a relação $AB = B\,F(A)$, quando F é um polinómio. Com base nesses resultados, construimos exemplos e caracterizamos algumas classes de representantes de relações de comutação envolvendo operadores integrais e polinómios. Essa construção pode ser realizada de forma analítica ou por meio de métodos numéricos, desde que sejam respeitadas as condições necessárias e suficientes obtidas. O reordenamento permite ainda estabelecer representantes de novas relações de comutação e estudar propriedades estruturais associadas a esses representantes.

Recomendações

Recomendamos, como continuidade deste trabalho, o estudo das representações da relação $AB = B\,F(A)$ quando F é um polinómio de variável complexa ou quando são impostas condições espectrais adicionais sobre os operadores. Essas abordagens possibilitam a análise de subálgebras e do centro de uma subálgebra, bem como a investigação de estruturas internas associadas a essas relações de comutação. Os resultados obtidos ao longo do trabalho podem ainda ser aplicados no contexto dos sistemas dinâmicos e das suas componentes, bem como na utilização de iterações apresentadas como ferramenta para a resolução de equações integrais operacionais por métodos recursivos.

Bibliografia

[1] Axler, S. *Linear Algebra Done Right*. 3rd ed. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, Cham, 2015.

[2] Bogachev, V.I. *Measure Theory, Volume I*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007. ISBN: 978-3-540-34513-8.

[3] Chari, V. & Pressley, A. *A Guide to Quantum Groups*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[4] Conway, J. B. *A Course in Functional Analysis*, 2nd ed., Springer, 1990.

[5] Djinja, D., Silvestrov, S., Tumwesigye, A.B. Linear integral operators on L^p spaces representing polynomial covariance type commutation relations. *Afrika Matematika (2024)*.

[6] Djinja, D., Silvestrov, S., Tumwesigye, A.B. Some Algebraic Properties of Representations of Polynomial Covariance Commutation Relations, in Algebra without Borders – Classical and Constructive Nonassociative Algebraic Structures. *Springer*, 35 (2024), pp. 379–417.

[7] Engelking, R. *General Topology*. Warszawa: PWN – Polish Scientific Publishers, 1985.

[8] Folland, G.B. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. 2nd ed. Wiley, 1999.

[9] Gonçalves, M. B. *Elementos da Análise*. Universidade Federal de Santa Catarina, 2001.

[10] Hall, B. C. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 222, Springer, 2015.

[11] Kadison, R. V. & Ringrose, J. R. *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Vols. I–II*. American Mathematical Society, Providence, 1997.

[12] Kolmogorov, A.N., Fomin, S.V. *Introductory Real Analysis*. Dover Publications, 1975.

[13] Lima, E. *Fundamentos de Topologia Geral*. São Paulo: McGraw-Hill, 1981.

[14] Musonda, Jhon. *Reordering in Noncommutative Algebras, Orthogonal Polynomials and Operators*. Tese (Doutoramento), Mälardalen University, Västerås, 2018.

[15] Nielsen, M. A. & Chuang, I. L. *Quantum Computation and Quantum Information*, 10th Anniversary ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[16] Oxtoby, J. C. *Measure and Category: A Survey of the Analogies between Topological and Measure Spaces*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 2, Springer, 1980.

[17] Peskin, M. E. & Schroeder, D. V. *An Introduction to Quantum Field Theory.* Addison-Wesley, Reading, MA, 1995.

[18] Reed, M. & Simon, B. *Methods of Modern Mathematical Physics, Vols. I–IV.* Academic Press, New York, 1972–1979.

[19] Rosen, K. H. *Discrete Mathematics and Its Applications*, 7th ed., McGraw–Hill, 2012.

[20] Royden, H.L., Fitzpatrick, P.M. *Real Analysis*, 4th ed. Pearson, 2010.

[21] Rudin, W. *Functional Analysis*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1991.

[22] Sakurai, J. J. & Napolitano, J. *Modern Quantum Mechanics*, 2nd ed., Addison-Wesley, San Francisco, 2011.

[23] Werner, D. *Functional Analysis*, Springer, 2000.