



UNIVERSIDADE
E D U A R D O
MONDLANE

FACULDADE DE CIÊNCIAS
Departamento de Matemática e Informática

Trabalho de Licenciatura em Matemática

Limites Superiores e Inferiores para Opções de
Compra Europeia: uma Formulação via
Optimização Convexa

Autor: Maurícia Ricardo Jossai

Maputo, Janeiro de 2026

Trabalho de Licenciatura em Matemática

Limites Superiores e Inferiores para Opções de
Compra Europeia: uma Formulação via
Optimização Convexa

Autor: Maurícia Ricardo Jossai

Supervisor: Mestre Alex Marime

Maputo, Janeiro de 2026

Conteúdo

Conteúdo	i
Lista de Figuras	iii
Agradecimentos	v
Simbologia	ix
1 Introdução	1
1.1 Estrutura e Organização	1
1.2 Colocação do Problema	2
1.3 Delimitação do Tema	2
1.4 Motivação	3
1.5 Objectivos	4
1.5.1 Objectivo Geral	4
1.5.2 Objectivos Específicos	4
1.6 Metodologia	4
2 Noções Preliminares	5
2.1 Matemática Financeira	5
2.2 Opções Americanas e Comparação com as Europeias	9
2.3 Classificação das Opções: In the Money, At the Money e Out of the Money	9
2.4 Teoria de Probabilidade	10
2.5 Teoria de Medida	11
2.6 Programação Cónica	11
2.6.1 Problema Generalizado do Momento	12
2.6.2 Condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)	15
2.7 Não-Negatividade de Polinómios de uma Variável	15
3 Limitar Preços de Opções	19
3.1 Limite Superior	19
3.2 Limite Inferior	21

3.3	Delimitação do Problema	22
3.3.1	Dois Momentos	23
3.4	Limites de Preços de Opção Dados outros Preços de Opção	24
3.4.1	Limites de Preços de Chamadas	24
4	Análise Numérica	29
4.1	Dados Utilizados	29
4.2	Cálculo dos Momentos	30
4.3	Formulação do Problema	30
4.4	Metodologia de Resolução Numérica	30
4.5	Estimativa do Limite Superior	31
4.5.1	Polinómio Optimizado Encontrado	31
4.5.2	Validação Gráfica da Solução	32
4.5.3	Estimativa do Limite Inferior pelo PGM	32
4.6	Análise de Sensibilidade ao Preço de Exercício	34
4.6.1	Interpretação dos Resultados	36
5	Conclusão	38
	Bibliografia	39
6	Apêndices	40
6.1	Apêndice A: Comandos MATLAB Utilizados na Análise Numérica	40

Lista de Figuras

4.1	Comparação entre o polinómio $p(x)$ e o payoff $\max(0, x - k)$	32
4.2	Comparação entre o polinómio $p(x)$ e o payoff $\max(0, x - k)$ —limite inferior.	33
4.3	Comparação entre o polinómio otimizado e o payoff $\max(0, x - 4900)$	34
4.4	Comparação entre o polinómio $p(x)$ e o payoff $\max(0, x - 5100)$	36

Declaração Sob Compromisso de Honra

Eu, Mauricia Ricardo Jossai, declaro por minha honra que o presente trabalho acadêmico foi elaborado por mim e não se recorreu a outras fontes além das indicadas. O mesmo nunca foi apresentado para efeitos de avaliação a qualquer outra entidade ou instituição para obtenção de qualquer grau acadêmico e que este constitui o fruto de minha investigação, estando indicados no texto as referências bibliográficas que utilizei na elaboração do mesmo.

Assinatura

(Mauricia Jossai)

Maputo, ____ de _____ de 2026

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, aos meus pais, pelo amor incondicional, pela educação transmitida e pela constante compreensão ao longo da minha trajetória. Aos meus irmãos Paula, Edite, Denisse, Maria e Junior pelo apoio e carinho sempre presentes. Ao meu namorado, Hilson, pela força e incentivo em todos os momentos. Ao meu tutor, pela orientação e assistência fundamentais neste percurso. E as minhas amigas Melany, Salifa e Arlida pela amizade, companheirismo e encorajamento contínuos.

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus filhos, Ayla, Ricardo, Shalson, Edy, Carina, William e Alicia com o desejo de que saibam, desde cedo, que é sempre possível realizar os próprios sonhos. Que nunca deixem de acreditar em si mesmos e que jamais desistam diante das dificuldades.

Resumo

O mercado de opções oferece estratégias flexíveis de investimentos, dentre essas as *call* europeias que destacam-se por permitir que o comprador adquira um activo subjacente a um preço fixo na data de vencimento. No entanto, a precificação dessas opções torna-se desafiadora quando a distribuição do activo subjacente é desconhecida e assim os modelos tradicionais podem não ser aplicáveis em situações de incerteza estrutural. Este trabalho busca uma abordagem robusta para a precificação de opções de compra europeias com base exclusivamente em momentos empíricos do activo subjacente, sem recorrer a suposições paramétricas sobre sua distribuição. Inserido no contexto de mercados incompletos, propõe-se uma abordagem robusta baseada no Problema Generalizado do Momento (PGM). O estudo utiliza dados reais do índice S&P 500, no período de 1 a 15 de fevereiro de 2024, para calcular os momentos empíricos necessários. A implementação numérica foi realizada no ambiente MATLAB Online, recorrendo ao algoritmo *Sequential Quadratic Programming* via a função ‘fmincon’, com discretização do domínio em 300 pontos. Obtiveram-se como resultados um limite superior de 1159,32 USD e um limite inferior de 563,54 USD para uma opção com preço de exercício $k = 5000$. Análises de sensibilidade para $k = 4900$ e $k = 5100$ confirmaram a coerência do modelo com a teoria de opções, evidenciando a monotonicidade do valor da opção em relação ao strike. Conclui-se que a formulação moment-based via PGM oferece uma alternativa matematicamente sólida, computacionalmente viável e financeiramente interpretável à precificação de opções europeias em ambientes de incerteza e que a metodologia permite obter estimativas conservadoras e teoricamente justificadas, preservando a convexidade e a dualidade forte do problema.

Palavras-chave: Momentos empíricos; otimização; opções europeias; convexa PGM; Precificação; S&P 500.

Abstract

The options market offers flexible investment strategies, among which European call options stand out by allowing the buyer to acquire an underlying asset at a fixed price on the expiration date. However, pricing these options becomes challenging when the distribution of the underlying asset is unknown, making traditional models potentially inapplicable in structurally uncertain environments. This study proposes a robust approach to pricing European call options based solely on empirical moments of the underlying asset, without relying on parametric assumptions about its distribution. Framed within the context of incomplete markets, a robust formulation based on the Generalized Moment Problem (GMP) is adopted. The study uses real data from the S&P 500 index, covering the period from February 1 to 15, 2024, to compute the required empirical moments. Numerical implementation was performed in MATLAB Online using the *Sequential Quadratic Programming* algorithm via the ‘fmincon’ function, with the domain discretized into 300 points. The results yielded an upper bound of 1159.32 USD and a lower bound of 563.54 USD for an option with a strike price of $k = 5000$. Sensitivity analyses for $k = 4900$ and $k = 5100$ confirmed the model’s consistency with option theory, highlighting the monotonicity of the option’s value with respect to the strike price. It is concluded that the moment-based formulation via GMP provides a mathematically rigorous, computationally feasible, and financially interpretable alternative for pricing European options under uncertainty. The methodology yields conservative and theoretically sound estimates while preserving the convexity and strong duality properties of the problem.

Keywords: Empirical moments; optimization; European options; convex GMP; pricing; S&P 500.

Simbologia

1. K - Denota o cone;
2. T - Denota a matriz transporta;
3. PGM- Problema generalizado do momento;
4. SDQ- Soma de quadrados;
5. e - Vector nulo;
6. k - Preço de exercício (strike price);
7. $\mathbb{E}[X]$ - Esperança (valor esperado);
8. $C(S)$ - Cone de momentos definido sobre o conjunto S ;
9. $P(S)$ - Cone dual de $C(S)$; e
10. $F(X)$ - Função objectivo do PGM.

Capítulo 1

Introdução

O mercado de opções apresenta grande flexibilidade, possibilitando diversas estratégias de investimento e muitas combinações de operações tanto para fins de especulação, como para fim de *hedge*. Por não ter ajustes diários, as diversas séries e prazos de opções autorizadas pelas bolsas permitem maior poder de alavancagem dos agentes econômicos envolvidos [8].

Neste contexto levanta-se a seguinte questão: Qual é o melhor momento para a compra de uma determinada acção? As opções *calls* ou *puts* são contratos entre duas partes (comprador e vendedor) sobre um activo subjacente. O comprador de uma opção assume uma posição longa e tem um direito de opção na maturidade T do contrato. Na opção *put*, esse direito de opção é o de vender, ou não, o activo subjacente por um determinado preço de exercício \mathbb{E} . Na opção *call*, esse direito de opção é o de comprar, ou não, o activo subjacente por um determinado preço de exercício \mathbb{E} [14]. Portanto, o objecto deste trabalho é estudar a Optimização de Funções Convexas para determinar os limites das Opções de *Call* Europeias; estas permitem que o detentor da opção possa exercer o seu direito, mas não o dever, de comprar um activo por um determinado preço, denominado preço de exercício, na maturidade da opção. Assim, conforme a evolução do mercado, o detentor da opção decide se pretende ou não exercê-la.

1.1 Estrutura e Organização

O trabalho está organizado da seguinte maneira: No Capítulo 2, introduziremos alguns conceitos teóricos necessários. Lembraremos conceitos de programação cónica e apresentaremos um importante problema da matemática financeira: o problema generalizado do momento. Este permitir-nos-á encontrar os limites referidos anteriormente através da resolução de problemas de optimização num espaço de distribuições onde o integral de algumas funções é conhecido. Faremos ainda uma pequena abordagem à não-negatividade de polinómios com uma variável.

Nos Capítulos 3 e 4, encontraremos os limites para os preços das opções através da programação semidefinida. Numa primeira fase, calcularemos esses limites com base nos dados referentes aos momentos do preço do activo subjacente.

Em seguida, consideramos somente os preços de opções do mesmo tipo e sobre o mesmo activo mas com preços de exercícios diferentes. Queremos verificar se a introdução de ambas as informações (momentos e preços de outras opções) nos garantem resultados melhores. Enquanto no Capítulo 3, exemplificaremos o que foi estudado usando dados do mercado; no Capítulo 4, testaremos dados teóricos. Procuramos com isto ter uma noção mais correcta da aplicação dos resultados encontrados através da simulação numérica evitando os erros associados ao uso de dados reais. Por fim, no Capítulo 5, serão expostas

as conclusões deste trabalho.

1.2 Colocação do Problema

O estudo do valor justo de uma opção de *call* europeia, em ambientes onde a estrutura completa da distribuição de probabilidade do activo subjacente é desconhecida, constitui um desafio central na teoria de precificação de activos derivativos. Nos mercados reais, em especial durante janelas de tempos curtos ou em contextos de baixa liquidez, frequentemente dispõe-se apenas de informações agregadas como média e variância empíricas extraídas de séries temporais discretas.

Diante desse cenário, esta pesquisa propõe-se a investigar os limites superiores e inferiores admissíveis para o preço de uma *call* europeia, com base unicamente num número reduzido de momentos estatísticos do activo subjacente (massa e_0 , média e_1 e segundo momento e_2). O problema, neste contexto, é estruturado a partir da formulação do Problema Generalizado do Momento (PGM), uma classe de problemas convexos cuja solução permite inferir valores extremos compatíveis com restrições integrais impostas por momentos conhecidos da distribuição.

A formulação matemática envolve o estudo do funcional:

$$\mathbb{E}_\mu[\max(0, X - k)]$$

Onde μ é uma medida de probabilidade suportada em \mathbb{R}_+ , X é a variável aleatória representando o preço do activo e k o preço de exercício. A viabilidade da medida μ está condicionada ao cumprimento das restrições:

$$\int x^i d\mu(x) = e_i, \quad i = 0, 1, 2.$$

Surge então a seguinte questão central de investigação:

Dado um conjunto restrito de momentos empíricos da distribuição de preços do activo subjacente, qual o intervalo admissível (em termos de valores extremos) para o preço justo de uma opção de compra europeia, e como formulá-lo e resolvê-lo numericamente com garantias de viabilidade e optimalidade?

A resolução deste problema envolve a caracterização do conjunto de medidas admissíveis sob momentos, a construção e análise de polinômios que majoram ou minoram o *payoff* da opção e a utilização de ferramentas computacionais para obtenção de soluções óptimas sob critérios de convexidade e dualidade forte.

Este estudo reveste-se de relevância tanto teórica quanto prática, pois permite a estimação de preços de opções de forma robusta, mesmo em contextos onde as premissas clássicas de distribuição (como a normalidade dos retornos) não são verificáveis, tornando-o particularmente útil para mercados incompletos ou com informação estatística limitada.

1.3 Delimitação do Tema

Este trabalho centra-se na análise matemática e computacional da precificação de opções de compra europeias em contextos de incerteza estrutural, onde a distribuição completa do activo subjacente é desconhecida ou indisponível. A pesquisa está delimitada ao estudo do Problema Generalizado do Momento (PGM) como instrumento para estabelecer intervalos admissíveis de preços de uma *call* europeia, utilizando unicamente os

dois primeiros momentos estatísticos (média e segundo momento) dos preços observados do activo subjacente, sem recorrer a suposições paramétricas sobre sua distribuição.

A abordagem proposta é aplicada a um caso específico: uma opção de compra europeia com preço de exercício $k = 5000$, utilizando dados reais do índice S&P 500, referentes ao período entre 1 e 15 de fevereiro de 2024. A análise está restrita ao uso de ferramentas de optimização convexa e dualidade forte, com implementação computacional em ambiente MATLAB, visando estimar numericamente os limites extremos do valor da opção sob restrições integrais impostas pelos momentos empíricos observados.

O estudo não considera variáveis de mercado adicionais, como taxas de juro, volatilidade implícita ou estrutura temporal de retornos, focando-se exclusivamente na viabilidade matemática da precificação baseada em momentos e na interpretação financeira dos intervalos obtidos. Dessa forma, a delimitação do tema restringe-se ao cenário de mercado incompleto, com informação estatística limitada, e à avaliação não paramétrica de preços de derivativos por meio de técnicas de optimização baseadas em momentos.

1.4 Motivação

A motivação central desta pesquisa decorre da limitação observada nos modelos clássicos de precificação de opções, que assumem estruturas distribucionais rígidas e frequentemente distantes da realidade empírica dos mercados financeiros. A ausência de um modelo amplamente consensual para descrever a evolução dos preços dos activos reforça a necessidade de abordagens baseadas em informação parcial, mas estatisticamente consistente.

Diante disso, a formulação do Problema Generalizado do Momento (PGM) surge como um caminho matematicamente rigoroso e economicamente relevante para obter limites superiores e inferiores para o preço de opções do tipo europeia. O interesse do autor reside na possibilidade de se estabelecer tais limites utilizando apenas momentos empíricos extraídos de dados de mercado sem suposições fortes sobre a forma da distribuição subjacente.

Esta abordagem não apenas preserva a coerência analítica da teoria, como também amplia a aplicabilidade prática em contextos de incerteza. Acredita-se que os resultados desta pesquisa irão contribuir para a literatura matemática e financeira ao demonstrar, de forma construtiva, a resolução numérica do PGM com dados reais, e assim, oferecer aos pesquisadores uma estrutura alternativa e transparente para análise de opções, e irão disponibilizar aos agentes financeiros uma ferramenta robusta para estimativas conservadoras de preço, útil na gestão de risco e avaliação de cenários. Assim, a relevância deste estudo está na sua capacidade de combinar fundamentação teórica sólida, implementação computacional viável e aplicabilidade concreta ao ambiente real de mercado.

1.5 Objectivos

1.5.1 Objectivo Geral

- Encontrar limites para o preço de opções *call* europeias.

1.5.2 Objectivos Específicos

Para alcançar este objectivo, foram traçados os seguintes objectivos específicos:

- Formular o Problema Generalizado do Momento (PGM) no contexto da precificação de opções de compra europeias;
- Determinar os limites superior e inferior para o preço da opção, com base nos momentos estatísticos empíricos do activo subjacente;
- Aplicar os momentos empíricos para determinar os limites da *call* utilizando dados do fecho diário do índice S&P 500 do dia 1 a 15 de fevereiro de 2024;
- Implementar numericamente o modelo no ambiente MATLAB, utilizando a função CVX; e
- Validar a solução através de simulações e análise gráfica comparando o polinómio optimizado com a função de *payoff*.

1.6 Metodologia

A resolução do Problema Generalizado do Momento (PGM), formulado como um problema de optimização convexa, requer a minimização (ou maximização) da funcional linear

$$f(w) = e_0w_0 + e_1w_1 + e_2w_2,$$

sujeita à condição de que o polinómio quadrático

$$p(x) = w_0 + w_1x + w_2x^2$$

majore ou minore a função de *payoff* $\max(0, x - k)$ em todo o domínio $x \in [0, 2k]$.

Inicialmente, pretende-se utilizar a toolbox CVX do MATLAB, dado que esta permite formular o problema de forma declarativa com garantias de dualidade forte. Contudo, face à indisponibilidade da CVX no ambiente utilizado, optou-se por uma abordagem alternativa baseada no comando `fmincon`, incorporado no MATLAB Online.

Essa substituição foi tecnicamente viável devido à natureza convexa do problema e à forma contínua das funções envolvidas. O método de resolução adoptado foi o *Sequential Quadratic Programming* (SQP), apropriado para problemas suaves com restrições não lineares. A função de *payoff* foi discretizada em 300 pontos ao longo do intervalo $[0, 2k]$, e foi imposta uma tolerância técnica $\varepsilon > 0$ para evitar violações numéricas nas restrições. Os coeficientes w_0, w_1, w_2 obtidos foram então utilizados para estimar os limites de preço da opção de compra europeia sob os momentos empíricos do activo subjacente.

Capítulo 2

Noções Preliminares

O Capítulo apresenta os conceitos fundamentais que sustentam a análise matemática e financeira desenvolvida ao longo desta monografia. Inicia-se com definições centrais da matemática financeira, como opções, activos, risco e volatilidade. Em seguida, aborda-se a teoria de probabilidade e de medida, essenciais para modelagens estocásticas. O capítulo avança para a programação cónica e o problema generalizado do momento, destacando as suas implicações em finanças. Por fim, são discutidas condições de não negatividade de polinômios, fundamentais para a formulação de desigualdades envolvidas na delimitação de preços de opções. Estes conceitos básicos serão de grande importância para o desenvolvimento deste trabalho. Teremos como auxílio as obras [1], [2], [6], [13], [14].

2.1 Matemática Financeira

A Matemática Financeira permite modelar, analisar e valorar instrumentos financeiros por meio de ferramentas matemáticas rigorosas. No contexto dos mercados financeiros, destaca-se o estudo dos derivados financeiros, em particular das opções, cujo valor depende do comportamento de um activo subjacente ao longo do tempo.

Definição 2.1.1. (**Activo**)- chama-se activo a qualquer investimento financeiro que pode ser comprado ou vendido, por exemplo, imóveis, jóias, juros de empréstimo, têm a característica de ser capaz de proporcionar fluxos de caixa futuros, podendo ser negociado em mercados organizados ou não. Em termos formais, um activo financeiro pode ser representado como uma função de tempo $A(t)$, cujo valor depende de variáveis aleatórias subjacentes no mercado. O comportamento temporal dos activos é modelado através de processos estocásticos $\{A(t), t \geq 0\}$, onde t representa o tempo e $A(t) \in \mathbb{R}^+$ é o valor de mercado do activo. Os activos subdividem-se, geralmente, em reais (imóveis, ouro) e financeiros (acções, obrigações), e sua avaliação incorpora noções de valor presente líquido, retorno esperado e risco.

Definição 2.1.2. (**Acções**)- são títulos nominativos de renda variável, emitidos por sociedades anónimas que representam uma parcela de capital social. Ao adquiri-las, o investidor torna-se sócio da empresa, sendo consideradas instrumentos de renda variável, seu valor no tempo $P(t)$ é sujeito a flutuações que refletem as condições do mercado e o desempenho financeiro da empresa emissora. Em modelagem matemática, o preço da acção pode ser representado por um processo estocástico, tipicamente modelado por um movimento browniano geométrico:

$$dP(t) = \mu P(t) dt + \sigma P(t) dW(t)$$

onde μ é a taxa de retorno esperada, σ é a volatilidade do activo e $W(t)$ representa um movimento browniano padrão. A posse de uma acção confere ao investidor direitos económicos (dividendos) e, em certos casos, direitos políticos (voto).

Definição 2.1.3. (Dividendo)- é a distribuição em dinheiro de parte ou todo o lucro auferido pela empresa em um exercício social, ou saldos de lucros acumulados aos seus accionistas; Denotando o fluxo de dividendos por $D(t)$, o valor de uma acção pode ser obtido como o valor presente dos dividendos futuros esperados:

$$P(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[D(t_k)]}{(1+r)^{t_k-t}}$$

em que r é a taxa de desconto, t_k são os instantes futuros de pagamento, e $\mathbb{E}[D(t_k)]$ representa a expectativa matemática dos dividendos em t_k . O modelo de Gordon (modelo de crescimento constante) é uma forma simplificada desse cálculo para dividendos constantes e taxa de crescimento g :

$$P = \frac{D}{r-g}, \quad \text{com } r > g$$

Definição 2.1.4. (Risco)- é a chance da perda financeira, entendido como a variabilidade ou incerteza associada aos retornos de um activo. Tecnicamente, o risco é quantificado pela variância σ^2 ou desvio padrão σ da distribuição dos retornos R :

$$\sigma^2 = \mathbb{E}[(R - \mathbb{E}[R])^2]$$

Onde $\mathbb{E}[R]$ representa o retorno esperado. Em contextos mais avançados, considera-se o risco como uma função convexa a ser minimizada num problema de optimização de portfólio, ou como um valor extremo (quantil) sob o qual as perdas não devem exceder com um dado nível de confiança, caso do *value-at-Risk* (VaR). O risco é ainda avaliado sob medidas coerentes como o *Conditional Value-at-Risk* (CVaR), com especial relevância na gestão financeira sob incerteza.

Definição 2.1.5. (Volatilidade)- é a medida de incerteza quanto aos retornos proporcionados por um activo, ou seja, é uma medida estatística da dispersão dos retornos de um activo em torno de sua média. No contexto probabilístico e financeiro, é usualmente quantificada como o *desvio padrão dos retornos logarítmicos* do activo ao longo de um intervalo temporal especificado. Formalmente, dado um processo estocástico $\{P_t\}$ que representa o preço de um ativo, a volatilidade σ é definida por:

$$\sigma = \sqrt{\mathbb{E}[(r_t - \mu)^2]}$$

onde $r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$ representa o retorno logarítmico, μ a média dos retornos, e \mathbb{E} o operador esperança. A volatilidade é fundamental na precificação de derivativos (e.g., no modelo de Black-Scholes-Merton), no cálculo de risco (e.g., Value at Risk), e na formulação de estratégias de *hedge*. Valores elevados de volatilidade indicam maior incerteza nos retornos futuros do activo.

Definição 2.1.6. (Opção)- é um direito, mas não uma obrigação, de adquirir ou vender activos por um preço determinado, em uma quantidade e por um período pré-estabelecido, ou seja, a opção financeira é um instrumento derivativo que concede ao seu titular o direito, mas não a obrigação, de comprar (*call*) ou vender (*put*) um activo subjacente

a um preço predeterminado (preço de exercício), dentro de um prazo específico. Trata-se de um contrato que deriva seu valor da flutuação do activo base, como acções ou commodities. A modelação matemática para precificação de opções envolve probabilidade, optimização e cálculo estocástico. A utilidade das opções está no controle de risco e na especulação. Ferramentas como o modelo de Black-Scholes consideram a volatilidade do activo subjacente, o tempo até o vencimento e outros fatores. Além disso, as opções são fundamentais em estratégias financeiras complexas, como *hedge*, *spreads* e *straddles*. O seu valor decorre da assimetria contratual: o titular pode optar por exercer o contrato se for vantajoso, ou deixá-lo expirar sem perdas adicionais além do prémio pago.

Definição 2.1.7. (Preço do Activo-objecto (S))- denotado convencionalmente por S , corresponde ao valor de mercado actual do activo financeiro sobre o qual se estabelece o contrato de opção. Esse activo pode ser uma acção ordinária, um índice de mercado, uma *commodity*, uma taxa de câmbio ou qualquer outro instrumento elegível como base para derivativos. A flutuação estocástica de S é o principal determinante do *delta* e de outras gregas associadas à sensibilidade da opção. Em modelos clássicos como o de Black-Scholes-Merton, assume-se que S segue um processo de difusão geométrica browniana, descrito pela equação estocástica:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW_t,$$

onde μ representa a taxa de retorno esperada, σ a volatilidade e dW_t um incremento do movimento browniano padrão. O comportamento do preço do activo subjacente afeta diretamente a probabilidade de exercício da opção e, portanto, o seu valor justo (*fair value*) e seu prémio de mercado. Métodos avançados de avaliação, como árvores binomiais, simulações de Monte Carlo e solução numérica de equações diferenciais parciais, são frequentemente utilizados para modelar e prever a dinâmica futura de S em contextos de mercado com incerteza e risco sistémico.

Definição 2.1.8. (Preço de exercício)- também chamado de (*strike price*) constitui o valor fixado contratualmente que confere ao titular da opção o direito de exercer a compra (no caso de uma *call*) ou a venda (no caso de uma *put*) de um activo subjacente. Este parâmetro é central na decomposição do valor da opção, influenciando directamente a sua parcela intrínseca. Formalmente, para uma *call europeia*, o valor intrínseco no vencimento é dado por $\max(S_T - K, 0)$, onde S_T representa o preço do activo na maturidade e K o preço de exercício. A relação entre S_T e K define se a opção está *in the money*, *at the money* ou *out of the money*. Do ponto de vista financeiro e matemático, a definição óptima do *strike* exige análise estocástica da trajetória esperada do activo subjacente, bem como a aplicação de técnicas de optimização sob incerteza. Além disso, a escolha do *strike* está associada à função utilidade do investidor, ao seu apetite ao risco e às expectativas de volatilidade implícita, compondo um conjunto de decisões estratégicas que influenciam o perfil de *payoff* da operação.

Definição 2.1.9. (vencimento)- é a data em que cessam os direitos do titular. o que corresponde a data limite de vigência de um contrato derivativo, em contextos financeiros padronizados, particularmente no mercado de opções, o vencimento ocorre tipicamente na terceira segunda-feira de cada mês. Esse temporal representa o ponto final do ciclo de vida do activo derivativo, e é sobre essa data que se executa a liquidação, seja física ou financeira. a estrutura temporal das opções e outros instrumentos financeiros financeiros derivativos exige que o valor do activo subjacente, no vencimento, determine ou não do direito contratado. assim, o vencimento influencia directamente o valor temporal do contrato, que tende a zero a medida que essa data se aproxima.

Definição 2.1.10. (Titular)- é o detentor da opção, quem tem o direito, por outras palavras, O titular da opção é a parte contratante que possui o direito estabelecido pelo

instrumento financeiro. Ao adquirir uma opção, o titular paga um prémio ao lançador (vendedor) e passa a deter a possibilidade de exercer esse direito. Sua posição é estrategicamente favorável, pois o risco é limitado ao valor do prémio pago, enquanto os ganhos potenciais são teoricamente ilimitados (no caso das opções de compra). O titular de uma *call* visa a valorização do activo subjacente, enquanto o de uma *put* se beneficia com a desvalorização. A atuação do titular é baseada em análises probabilísticas e modelagens que envolvem estimativas de comportamento futuro do mercado. A teoria de probabilidade é essencial neste contexto, pois permite ao titular avaliar o valor esperado do exercício, levando em conta diferentes cenários de precificação do activo subjacente ao longo do tempo até a maturidade do contrato.

Definição 2.1.11. (Optimização)- é a minimização ou maximização de uma função objectiva de varias variáveis de decisão que satisfaz a uma funcionalidade de restrições. é um ramo inteiro da matemática aplicada que trata da determinação de valores óptimos (máximos ou mínimos) de uma função objectivo sujeita a um conjunto de restrições.

Seja uma função objectivo $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, e um conjunto de restrições definidas por $g_i(x) \leq 0$ para $i = 1, \dots, m$ e $h_j(x) = 0$ para $j = 1, \dots, p$. O problema geral de programação matemática pode ser expresso como:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && f(x) \\ & \text{sujeito a} && g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & && h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

Em finanças, a optimização é central na alocação de portfólios (Markowitz), minimização de risco, e determinação de estratégias de cobertura. Métodos de optimização convexa e algoritmos de programação quadrática são especialmente relevantes neste contexto.

Opções Europeias

Definição 2.1.12. As opções europeias são contratos derivativos que conferem ao seu titular o direito (mas não a obrigação) de exercer a compra ou venda de um activo subjacente somente na data de vencimento do contrato. Diferem das opções americanas, que podem ser exercidas a qualquer momento até o vencimento. Uma *call* europeia concede o direito de compra do activo subjacente a um preço de exercício K , enquanto uma *put* europeia concede o direito de venda.

O valor justo de uma opção europeia, sob a hipótese de mercados eficientes e sem arbitragem, é classicamente modelado pelo *modelo de Black-Scholes*, cuja fórmula para o preço da *call* é:

$$C = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

com

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

onde:

- S_0 : preço actual do activo subjacente

- K : preço de exercício
- r : taxa livre de risco
- T : tempo até o vencimento
- σ : volatilidade do activo subjacente
- $N(\cdot)$: função de distribuição acumulada da normal padrão

Essa formulação assume distribuição log-normal dos preços dos activos e continuidade temporal no mercado.

2.2 Opções Americanas e Comparação com as Europeias

Opções Americanas e Comparação com as Europeias As opções americanas são instrumentos derivativos que, diferentemente das opções europeias, permitem ao titular exercer o direito de compra (call) ou venda (put) do activo subjacente em qualquer momento até a data de vencimento, inclusive. Já as opções europeias só permitem esse exercício na data de maturidade. Essa flexibilidade adicional confere às opções americanas um valor potencialmente superior ao das europeias, ainda que o prémio pago por elas também tenda a ser maior para refletir essa característica.

Do ponto de vista matemático, a valorização de opções americanas é mais complexa e exige formulações que envolvem problemas de fronteira livre, já que o instante óptimo de exercício é uma variável endógena do modelo [6]. Em contraste, a precificação de opções europeias assume um ponto fixo no tempo para exercício, o que permite o uso de modelos fechados, como o de Black-Scholes-Merton (1973), em condições ideais de mercado.

Conforme destacado por [15], a diferença principal entre os dois tipos de opção reside na “região de exercício óptimo”, que para as opções americanas precisa ser avaliada continuamente ao longo do tempo, tornando o problema uma inequação variacional. Em termos computacionais, este problema é frequentemente resolvido por métodos numéricos como esquemas de diferenças finitas com condições de fronteira móvel ou métodos de penalização.

A literatura clássica ressalta que para opções do tipo *call* sobre *ativos* que não pagam dividendos, o exercício antecipado raramente é racional, tornando o valor da opção americana igual ao da europeia[3]. Contudo, para *puts*, ou *calls* sobre activos com dividendos, o valor americano pode superar substancialmente o valor europeu, a sua análise separada. Em síntese, a principal distinção entre os dois tipos reside na estrutura temporal do direito de exercício, que condiciona a formulação matemática, a complexidade computacional e o valor da opção.

2.3 Classificação das Opções: In the Money, At the Money e Out of the Money

No contexto da precificação de opções é fundamental compreender a posição relativa do preço actual do activo subjacente S em relação ao preço de exercício K . Esta relação define três regimes distintos de valorização da opção:

- **In the Money (ITM):** Diz-se que uma opção de compra (call) está *in the money* quando $S > K$. Nesta situação, o exercício da opção é vantajoso ao titular, pois poderá comprar o activo por um valor inferior ao de mercado. O valor intrínseco da opção, dado por $\max(0, S - K)$, é estritamente positivo.
- **At the Money (ATM):** A opção está *at the money* quando o preço do activo é aproximadamente igual ao preço de exercício, ou seja, $S \approx K$. Neste caso, o *payoff* esperado é próximo de zero, mas a opção ainda possui valor temporal, dado o potencial de variação futura do activo.
- **Out of the Money (OTM):** Uma opção encontra-se *out of the money* quando $S < K$. Neste regime, o exercício da opção não é economicamente racional, pois o titular pagaria mais do que o valor de mercado do activo. Assim, o *payoff* da opção é nulo: $\max(0, S - K) = 0$.

O comportamento do *payoff* pode ser descrito pela seguinte função por partes:

$$\text{Payoff da opção call} = \max(0, S - K) = \begin{cases} > 0, & \text{se } S > K & (\text{In the Money}) \\ = 0, & \text{se } S = K & (\text{At the Money}) \\ = 0, & \text{se } S < K & (\text{Out of the Money}) \end{cases}$$

Do ponto de vista prático, estas classificações são fundamentais na avaliação do risco e no comportamento dos preços das opções, influenciando o seu valor de mercado, a sensibilidade às variações no activo subjacente (delta), e a probabilidade implícita de exercício. Essas categorias também são determinantes na escolha de estratégias de *hedge* e de especulação em ambientes com volatilidade[6].

2.4 Teoria de Probabilidade

Definição 2.4.1. (Aleatoriedade)

Usamos a palavra aleatoriedade para designar algo que depende de um acontecimento sujeito as incertezas do acaso.

Definição 2.4.2. (Experimento aleatório)

Experimentos aleatórios são aqueles que, mesmo que tenham sido observados ou repetidos sob as mesmas condições, produzem resultados que não podem ser previstos com certeza.

Definição 2.4.3. (Espaço amostral)

Denominamos espaço amostral associado a um experimento aleatório ao conjunto de todos os resultados possíveis deste experimento que representa-se pela letra grega Ω .

Definição 2.4.4. (Espaço de probabilidade)

Dado o espaço mensurável (Ω, \mathcal{F}) , uma probabilidade \mathbb{P} sobre o espaço Ω é uma medida tal que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. A tripla $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é chamada um espaço de probabilidade.

Definição 2.4.5. (Variável aleatória)

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, um espaço de probabilidade e uma variável aleatória X sobre o espaço é uma função definida em Ω com valores em \mathbb{R} tal que $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ se $B \in \mathbb{B}$.

2.5 Teoria de Medida

Definição 2.5.1. (σ -álgebra) Diz-se que β é σ -álgebra com unidade X se e somente se \emptyset pertence β e β é fechado em relação as operações de união enumerável e complemento, isto é,

1. $\emptyset \in \beta$.
2. $A_i \in \beta, i \in \mathbb{N} \implies \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \beta$.
3. $A \in \beta \implies X \setminus A \in \beta$.

Observação 2.5.1. De forma intuitiva podemos interpretar uma σ -álgebra como sendo a quantidade de informação disponível sobre as variáveis aleatórias mensuráveis em relação a ela. Quanto maior for a σ -álgebra maior informação há disponível.

Definição 2.5.2. (Espaço mensurável)

Seja o conjunto $S \neq \emptyset$ e seja Σ a σ -álgebra de subconjuntos de S . O par (S, Σ) chama-se espaço mensurável.

Um conjunto $A \subseteq S$ chama-se conjunto mensurável no caso $A \in \Sigma$.

Definição 2.5.3. (Função mensurável)

Sejam $(S_i, \Sigma_i)(i = 1, 2)$ espaços mensuráveis e o conjunto $D \subseteq S_1$. Uma função $f : D \rightarrow S_2$ diz-se $\langle \Sigma_1, \Sigma_2 \rangle$ - mensurável se $f^{-1}(\Sigma_2) \subseteq \Sigma_1$.

Definição 2.5.4. (σ -álgebra de Borel)

Seja X espaço topológico com a topologia (família de conjuntos abertos) τ . A σ -álgebra $\mathcal{B}(X) = \sigma(\tau)$ chama-se σ -álgebra de Borel ou álgebra Boreliana em X .

Um conjunto que pertence à σ -álgebra $\mathcal{B}(X)$ chama-se conjunto mensurável a Borel ou conjunto boreliano.

2.6 Programação Cônica

Definição 2.6.1. (Cone convexo)

Um conjunto diz-se cone convexo se for fechado para a adição e multiplicação por escalares. Seguidamente apresentamos a definição de cone dual.

Definição 2.6.2. (Cone convexo dual)

Dado um cone $K \subseteq \mathbb{R}^n$, o seu cone dual K^* , é o conjunto $y \in \mathbb{R}^n : y, x \geq 0, \forall x \in K$.

Observação 2.6.1. Recordemos também que o dual de um cone dual é o fecho do cone principal.

Definição 2.6.3. (Programa cônico sobre K)

Dado um cone convexo e fechado $K \subseteq \mathbb{R}^n$, um programa cônico sobre K n forma normal é um problema de Optimização do tipo

$$p = \min c^T x \tag{2.1}$$

Sujeita á

$$Ax = bx \in K, \tag{2.2}$$

onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ e o seu problema dual é

$$p^* = \max b^T y \quad (2.3)$$

sujeita á

$$c - A^T y \in K^*. \quad (2.4)$$

Teorema 2.6.1. (Dualidade Fraca). Se x for uma solução admissível de (uma) e y solução admissível de (2.4) então $c^T x \leq b^T y$. Notemos em particular, que $p \leq p^*$.

Demonstração. Se x e y forem admissíveis para o primal e dual, respectivamente, temos

$$\begin{aligned} c^T x - b^T y &= c^T x - y^T A x + y^T A x - y^T b \\ &= (c^T - y^T A)x + y^T (A x - b) \\ &\geq 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

uma vez que $(c^T - y^T A)^T \in K^*$ e $x \in K$, por definição de cone dual vem que $(c^T - y^T A)x \geq 0$.

□

Observação 2.6.2. Ao contrário da dualidade fraca, a dualidade forte muitas vezes exige condições adicionais como as condições de Slater.

Teorema 2.6.2. (Dualidade Forte com condições de Slater).

Se o primal (2.2) e o respectivo dual (2.4) for estritamente admissível, isto é, se for admissível quando substituimos K pelo seu interior nas restrições do primal (respectivamente K^* pelo seu interior ns restrições do dual) então $p = p^*$ e o primal (respectivo dual) tem um optimizante.

2.6.1 Problema Generalizado do Momento

O problema generalizado do momento (PGM) é um problema fundamental que surge com o propósito de dar resposta a problemas em muitas áreas da matemática aplicada. No contexto desta monografia, aparece com o objectivo de encontrar limites para o preço de opções *call* europeias sem ser assumido nenhum modelo para a dinâmica do preço do activo subjacente. De um modo geral, permite-nos abordar problemas de optimização num espaço de distribuições onde o integral de algumas funções é conhecido.

Definição 2.6.4. *Seja S um conjunto de \mathbb{R}^n e $\mu(S)$ o conjunto das medidas de Borel finitas em S .*

Definimos o problema generalizado do momento como

$$\begin{aligned} \rho &= \max_{\mu \in \mu(S)} \int_S F d\mu \\ \text{s.a } &\int_S h_j d\mu = e_j, \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (2.6)$$

Onde $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}$ e F, h_1, \dots, h_m são integráveis com respeito a qualquer $\mu \in \omega(S)$.

Uma vez que iremos aplicar resultados de programação cónica, teremos de reescrever o PGM como um programa de optimização cónico. Para isso, sendo $e = (e_1, \dots, e_m)$, consideremos o cone

$$C(S) = \left\{ (x_0, e) : x_0 = \int_S F d\mu, e_j = \int_S h_j d\mu, j = 1, \dots, m \forall \mu \in \omega(S) \right\}. \quad (2.7)$$

Podemos então reescrever o problema (2.6) como

$$\begin{aligned} \rho &= \max_{x_0 \in \mathbb{R}} x_0 \\ \text{s.a.} & (x_0, e) \in C(S). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Notemos que $C(S)$ é um cone convexo mas, em geral, não fechado. Assim, iremos considerar o problema de otimização sobre o seu fecho

$$\begin{aligned} \rho &= \max_{x_0 \in \mathbb{R}} x_0 \\ \text{s.a.} & (x_0, e) \in \overline{C(S)}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Este é um problema cônico. Atendamos que poderá acontecer que (2.9) tenha um maximizante quando em (2.8) o valor óptimo não é atingido. No resultado seguinte apresentamos o cone dual de $\overline{C(S)}$.

Lema 2.6.1. Consideremos $y = (y_1, \dots, y_m)$, o cone dual de $\overline{C(S)}$ é $P(S)$ onde

$$p(S) := \left\{ (y_0, y) : y_0 F(x) + \sum_{i=1}^m y_i h_i(x) \geq 0, \forall x \in S \right\}. \quad (2.10)$$

Demonstração. O cone dual de $\overline{C(S)}$ é o mesmo que o cone dual de $C(S)$, que é dado por

$$\left\{ (y_0, y) \in \mathbb{R}^{m+1} : (y_0, y)^T (x_0, e) \geq 0, \forall (x_0, e) \in C(S) \right\}.$$

Por definição de $C(S)$, a condição $(x_0, e) \in C(S)$ traduz-se por

$$(x_0, e) = \left(\int_S F d\mu, \int_S h_j d\mu, j = 1, \dots, m, \mu \in \omega(S) \right).$$

Assim,

$$\vec{C}(S) := \left\{ (y_0, y) \in \mathbb{R}^{m+1} : y_0 \int_S F d\mu + \sum_{i=1}^m y_i \int_S h_i d\mu \geq 0, \forall \mu \in \omega(S) \right\},$$

ou seja,

$$\vec{c}(S) := \left\{ (y_0, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y_0 - \sum_{i=1}^I \lambda_i y_i^0(S) + \sum_{i=1}^I \lambda_i h_i(x) \geq 0, \forall x \in S \right\}. \quad (2.11)$$

Reescrevendo o problema (2.9) na forma canônica do dual, vem

$$\begin{aligned} \rho &= \max_{x_0 \in \mathbb{R}} x_0 \\ \text{s.a.} & (0, e) - (-1, 0, \dots, 0)x_0 \in \vec{C}(S). \end{aligned} \quad (2.12)$$

É simples agora construir o primal de ρ como

$$\begin{aligned} \rho^* &= \min \sum_{i=1}^m e_i y_i \\ \text{s.a.} & (-1, y) \in \vec{C}(S) = P(S). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Agora aplicando a definição de $P(S)$, vemos que (2.13) é equivalente a

$$\begin{aligned} \rho^* &= \min \sum_{i=1}^m e_i y_i \\ s.a. \sum_{i=1}^m y_i h_i(x) &\geq F(x), \forall x \in S, \end{aligned} \tag{2.14}$$

problema a que chamaremos PGM-D. Este problema passa por encontrar os coeficientes de peso mínimo tal que a combinação linear das funções h_i com esses coeficientes seja um majorante para F em S . Pela dualidade fraca, sabemos que $\rho^* \geq \rho$ mas, para garantir a igualdade, é necessário que se verifiquem algumas condições, como as condições de Slater apresentadas no Teorema (2.6.2). Notemos ainda que, se em vez do PGM original estivéssemos interessados em

$$\begin{aligned} \rho &= \min_{\mu \in \mu(S)} \int_S F d\mu \\ s.a. \int_S h_j d\mu &= e_j, \\ j &= 1, \dots, m, \end{aligned} \tag{2.15}$$

teríamos como dual o problema

$$\begin{aligned} \rho &= \max \sum_{i=1}^m e_i y_i \\ s.a. \sum_{i=1}^m y_i h_i(x) &\leq F(x), \forall x \in S, \end{aligned} \tag{2.16}$$

e verificar-se-ia $\rho \geq \rho^*$. □

Pretendemos agora verificar se existe dualidade forte entre (2.6) e (2.14) e também entre 2.15 e 2.16. Para isso, consideremos o seguinte resultado.

Proposição 2.6.1. Se as funções $F(x)$ e $h_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, forem não negativas em S , então o problema (2.16) é estritamente admissível. Nestas condições temos ainda que o problema (2.14) é estritamente admissível se e só se for admissível.

Demonstração. Começemos por analisar o problema (2.16). O vetor nulo verifica as restrições pelo que este problema é sempre admissível. Então para qualquer $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}_+^m$, o vector $-\lambda$ é também admissível uma vez que

$$F(x) \geq 0 \geq \sum_{i=1}^m -\lambda_i h_i(x), \forall x \in S. \tag{2.17}$$

Assim, como $-\mathbb{R}_+^m$ está contido nos pontos admissíveis do problema e tem interior não vazio, podemos concluir que o problema (2.16) é estritamente admissível.

Pensando agora em (2.14) e admitindo que existe um y que verifica as restrições então $y + \mathbb{R}_+^m$ é também admissível e, tendo interior não vazio, podemos concluir que o problema (2.14) é estritamente admissível. □

Corolário 2.6.1. Se as funções $F(x)$ e $h_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, forem não negativas em S então os problemas (2.15) e (2.16) tem a mesma solução. temos ainda que, se (2.14) for admissível, então há dualidade forte entre (2.6) e (2.14).

2.6.2 Condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

As condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) constituem um conjunto de critérios necessários (e, sob convexidade, também suficientes) para a optimalidade de problemas de programação não-linear com restrições. Elas generalizam as condições de Lagrange ao contexto de restrições de desigualdade e desempenham um papel central na verificação da solução óptima nos métodos de otimização, incluindo o algoritmo SQP (*Sequential Quadratic Programming*) utilizado neste trabalho.

Considere o problema geral de otimização:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ \text{sujeito a} \quad & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

Sob as hipóteses de regularidade (por exemplo, condições de qualificação como a de Slater), qualquer ponto óptimo x^* admite multiplicadores $\lambda_i \geq 0$ e $\mu_j \in \mathbb{R}$ tais que se verifiquem as seguintes condições KKT:

- **Estacionariedade:**

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j \nabla h_j(x^*) = 0$$

- **Viabilidade primária:**

$$g_i(x^*) \leq 0, \quad h_j(x^*) = 0$$

- **Multiplicadores não-negativos:**

$$\lambda_i \geq 0$$

- **Complementaridade complementar:**

$$\lambda_i \cdot g_i(x^*) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, m$$

Essas condições são essenciais para o método computacional adotado neste trabalho, pois o *fmincon* do MATLAB, utilizado para resolver os problemas duais do PGM, baseia-se na verificação numérica das condições de KKT para certificar a optimalidade local das soluções encontradas (Nocedal e Wright, 2006). Quando o problema é convexo e as restrições são regulares, tais condições garantem não apenas optimalidade local, mas também global.

2.7 Não-Negatividade de Polinómios de uma Variável

Nesta secção pretendemos encontrar condições para que um polinómio seja não-negativo, pois é uma questão importante na determinação do limite dos preços de opções. Ela surge de uma forma natural porque, como vimos na secção anterior, o problema da determinação dos limites para os preços leva a um problema de desigualdade entre funções. Quando se trata de polinómios de uma só variável esta questão torna-se simples, uma vez

que basta verificar se é possível escrever os polinômios como uma soma de quadrados (SDQ), isto é, basta verificar se existem polinômios $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}[x]$ tais que

$$g(x) = \sum_{i=1}^m q_i(x)^2, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.18)$$

Suponhamos que um dado polinômio é não negativo na recta real. Isto implica que as raízes reais do polinômio tenham multiplicidade par, digamos $2s_i$ para cada raiz r_i , uma vez que se a multiplicidade fosse ímpar, o sinal do polinômio mudaria perto dessas raízes e o polinômio não seria não negativo. Sendo m_j a multiplicidade das raízes complexas e $a_j + ib_j, a_j - ib_j$. Obviamente que se $g(x)$ é não negativo então o coeficiente c também o é, logo podemos escrever $c = (\sqrt{c})_2$ e $(x - (a_j + ib_j))(x - (a_j - ib_j)) = ((x - a_j)^2 + b_j^2)$.

Teorema 2.7.1. Um polinômio de uma variável é não negativo se e só se puder ser escrito como uma SDQ.

[2.7.1] Seja $g(x) \in \mathbb{R}[x]$. Então $g(x)$ é não-negativo em \mathbb{R} se, e somente se, existem polinômios $q_1(x), q_2(x), \dots, q_m(x) \in \mathbb{R}[x]$ tais que

$$g(x) = \sum_{k=1}^m q_k(x)^2.$$

Demonstração. () Se $g(x) = \sum_{k=1}^m q_k(x)^2$, então $g(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

() Suponha agora que $g(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

As raízes reais de g têm multiplicidade par e as raízes complexas ocorrem em pares conjugados. Logo, existe uma decomposição

$$g(x) = c \prod_{i=1}^s (x - r_i)^{2\alpha_i} \prod_{j=1}^t [(x - a_j)^2 + b_j^2]^{\beta_j},$$

onde $c > 0$, $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $r_i, a_j \in \mathbb{R}$ e $b_j > 0$.

Defina o polinômio complexo

$$p(x) = \sqrt{c} \prod_{i=1}^s (x - r_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^t (x - (a_j + ib_j))^{\beta_j} \in \mathbb{C}[x],$$

e o seu conjugado complexo

$$\bar{p}(x) = \sqrt{c} \prod_{i=1}^s (x - r_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^t (x - (a_j - ib_j))^{\beta_j}.$$

Multiplicando, obtemos:

$$p(x)\bar{p}(x) = c \prod_{i=1}^s (x - r_i)^{2\alpha_i} \prod_{j=1}^t [(x - a_j)^2 + b_j^2]^{\beta_j} = g(x).$$

Escrevendo $p(x) = u(x) + iv(x)$, com $u, v \in \mathbb{R}[x]$, segue que:

$$g(x) = p(x)\bar{p}(x) = (u(x) + iv(x))(u(x) - iv(x)) = u(x)^2 + v(x)^2.$$

Portanto, $g(x)$ é soma de quadrados de polinômios reais. Assim,

$$g(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \iff g(x) = u(x)^2 + v(x)^2.$$

□

□

Proposição 2.7.1. O polinómio $g(x) = \sum_{r=0}^{2n} y_r x^r$ satisfaz $g(x) \geq 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$ se e só se existe uma matriz $Q = [q_{ij}]_{i,j=0,\dots,n}$ positiva semidefinida, tal que $g(x) = \bar{x}_n^T Q \bar{x}_n$ ou seja,

$$y_r = \sum_{i,j:i+j=r} q_{ij}, r = 0, \dots, 2n. \quad (2.19)$$

Exemplo 2.7.1. Consideremos o polinómio

$$h(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5 \quad (2.20)$$

cujos gráficos para $x \in [-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}]$. Podemos escrever este polinómio como uma SDQ á custa da sua raiz real, $x = 1$, de multiplicidade 2, e das raízes imaginárias $x = -2 - i, x = -2 + i$ obtendo

$$h(x) = (x - 1)^2((x + 2)^2 + 1) = (x^2 + x - 2)^2 + (x - 1)^2 \quad (2.21)$$

Assim, o polinómio é não-negativo em \mathbb{R} e a matriz Q será dada por $(-2, 1, 1)(-2, 1, 1)^T + (-1, 1, 0)(-1, 1, 0)^T$, isto é,

$$Q = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pretendemos agora verificar quando é que um polinómio é não-negativo num sub-intervalo de \mathbb{R} . Começemos por considerar o intervalo $[a, b]$ onde a e b são dois números reais tais que $a < b$.

Verificar se um polinómio $g(x) = \sum_{r=0}^n y_r x^r$ é não-negativo neste intervalo é o mesmo que verificar a condição seguinte

$$(1 + t^2)^n g\left(a + (b - a) \frac{t^2}{1 + t^2}\right) \geq 0, t \in \mathbb{R}. \quad (2.22)$$

Notemos que como $\frac{t^2}{1+t^2} \in [0, 1]$ então $a + (b - a) \frac{t^2}{1+t^2}$ e a multiplicação de g por $(1 + t^2)^n$ garante que a expressão anterior seja um polinómio. Fazendo as operações e simplificações necessárias e usando o binómio de Newton, obtemos:

$$(1 + t^2)^n g\left(a + (b - a) \frac{t^2}{1 + t^2}\right) = \sum_{l=0}^n t^{2l} \left(\sum_{m=0}^l \sum_{r=m}^{n-l+m} y_r \binom{r}{m} \binom{n-r}{l-m} a^{r-m} b^m \right) \quad (2.23)$$

Aplicando agora a proposição (2.7.1) obtemos uma caracterização de não negatividade.

Proposição 2.7.2. O polinómio $g(x) = \sum_{r=0}^n y_r x^r$ satisfaz $g(x) \geq 0$ para todos os $x \in [a, b]$ se e só se existe uma matriz $Q = [q_{ij}]_{i,j=0,\dots,n}$ positiva semidefinida tal que

$$\sum_{i,j:i+j=2l-1} q_{ij} = 0, \quad l = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i,j:i+j=2l-1} = \sum_{m=0}^l \sum_{r=m}^{n+m-1} y_r \binom{r}{m} \binom{n-r}{l-m} a^{r-m} b^m, l = 0, \dots, n. \quad (2.24)$$

Para um polinómio $g(x) = \sum_{r=0}^n y_r x^r$ ser não-negativo num intervalo do tipo $[0, a]$, onde $a > 0$, basta-nos garantir que

$$(1 + t^2)^n g\left(\frac{at^2}{1 + t^2}\right) \geq 0, t \in \mathbb{R}, \quad (2.25)$$

é de notar que $\frac{a^2}{1+t^2} \in [0, a]$ e mais uma vez $(1+t^2)^n$ garante que a expressão anterior seja um polinómio. Usando o binómio de Newton, facilmente se prova que

$$(1+t^2)^n g\left(\frac{at^2}{1+t^2}\right) = \sum_{l=0}^n t^{2l} \left(\sum_{r=0}^l y_r \binom{n-r}{l-r} a^r \right). \quad (2.26)$$

Usando novamente a Proposição (2.7.1) obtemos na proposição seguinte o resultado para este tipo de intervalo.

Proposição 2.7.3. Polinómio $g(x) = \sum_{r=0}^n y_r x^r$ satisfaz $g(x) \geq 0$ para todos os $x \in [0, a]$ se e só se existe uma matriz $Q = [q_{ij}]_{i,j=0,\dots,n}$ positiva semidefinida tal que

$$\begin{aligned} \sum_{i,j:i+j=2l-1} q_{ij} &= 0, \quad l = 1, \dots, n, \\ \sum_{i,j:i+j=2l-1} &= \sum_{m=0}^l \sum_{r=m}^{n+m-1} y_r \binom{n-r}{l-r} a^r, \quad l = 0, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Finalmente estudaremos as condições de não-negatividade de polinómios em intervalos do tipo $[a, \infty[$. Basta-nos garantir que

$$g(a(1+t^2)) \geq 0, t \in \mathbb{R}. \quad (2.28)$$

Notemos que $a(1+t^2) \in [a, \infty[$. Usando o binómio de Newton e simplificando vem

$$g(a(1+t^2)) = \sum_{l=0}^n t^{2l} \left(\sum_{r=l}^n y_r \binom{r}{l} a^r \right). \quad (2.29)$$

Aplicando mais uma vez a proposição (2.7.1) obtemos a caracterização desejada.

Capítulo 3

Limitar Preços de Opções

Este capítulo tem como objectivo determinar limites superior e inferior para o preço de uma opção *call* europeia com preço de exercício fixo, utilizando restrições sobre os momentos do activo subjacente. Considera-se uma variável aleatória não-negativa X , representando o preço do activo no intervalo $[0, T]$. A análise baseia-se no Problema Generalizado do Momento (PGM) e sua formulação como um problema de optimização semidefinida, explorando também situações com múltiplos preços de exercício observados no mercado.

3.1 Limite Superior

Considerando as restrições dos momentos referidas anteriormente, temos o seguinte problema:

$$\bar{p} = \max_x \mathbb{E}[\max(0, X - k)] \quad (3.1)$$

sujeita a:

$$\mathbb{E}[X^i] = e_i, i = 0, 1, \dots, m. \quad (3.2)$$

Considerando as distribuições associadas a X , este problema é equivalente a

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \max_{\mu \in \mu(S)} \int_0^\infty \max(0, x - k) d\mu \\ \text{s.a.} &\int_0^\infty x^i d\mu = e_i, i = 0, 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Como pode se observar este é um caso do PGM onde $S = \mathbb{R}_+$, $F(x) = \max(0, x - k)$ e $h_i(x) = x^i, i = 0, \dots, m$. Para tornar explícita a ligação com a teoria apresentada, neste trabalho consideramos: $F(x) = \max(0, x - k)$, representando o *payoff* de uma opção de compra europeia; $h_0(x) = 1$, correspondente à massa total da medida; $h_1(x) = x$, correspondente ao primeiro momento (média do activo subjacente); $h_2(x) = x^2$, correspondente ao segundo momento (relacionado à variância).

Adotamos também como restrições: $e_0 = 1$ (massa total da probabilidade), e_1 igual à média empírica do activo subjacente, e_2 igual ao segundo momento empírico.

Estas definições garantem a coerência entre a formulação do problema generalizado do momento e o objectivo de determinar o limite superior para os preços de opções de compra europeias, respeitando as condições teóricas estabelecidas anteriormente.

Obtemos o problema dual como sendo:

$$\begin{aligned} \bar{p}^* &= \min \sum_{i=0}^m e_i w_i \\ \text{s.a.} \quad &\sum_{i=0}^m w_i x^i \geq \max(0, x - k), \forall x \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Recorrendo ao Corolário (2.6.1), podemos resolver o problema (3.3), resolvendo o problema (3.4), uma vez que (3.4) é admissível.

Teorema 3.1.1. O limite superior para o preço de uma opção call europeia com preço de exercício k , dados os m primeiros momentos do preço do activo subjacente, e_1, \dots, e_m , e $e_0 = 1$, é dado pela solução do seguinte problema de otimização semidefinido:

minimiza

$$\sum_{r=0}^n y_r q_r \quad (3.5)$$

sujeito a

$$0 = \sum_{i,j:i+j=2l-1} x_{ij}, l = 1, \dots, n, \quad (3.6)$$

$$\sum_{r=0}^l y_r \binom{k-r}{l-r} k^r = \sum_{i,j:i+j=2l-1} x_{ij}, l = 0, \dots, n, \quad (3.7)$$

$$0 = \sum_{i,j:i+j=2l-1} z_{ij}, l = 1, \dots, n,$$

$$(y_1 - 1)k + \sum_{r=2}^k y_r k^r = z_0,$$

$$(y_1 - 1)k + \sum_{r=2}^k y_r r k^r = \sum_{i,j:i+j=2l-1} z_{ij},$$

$$\sum_{r=l}^k y_r \binom{r}{l} k^r = \sum_{i,j:i+j=2l-1} z_{ij}, l = 2, \dots, n, \quad (3.8)$$

$x, z \geq 0$.

Demonstração. Notamos que a região viável para o problema pode ser expressa como:

$$\sum_{r=0}^n y_r x^r \geq 0, \forall x \in [0, k], \quad (3.9)$$

$$(y_0 + k) + (y_1 - 1)x + \sum_{r=2}^n y_r x^r \leq 0 \quad \forall x \in [k, \infty). \quad (3.10)$$

aplicando a proposição 2.7.2 e 2.7.3 reformulamos o problema 3.4 para um problema de otimização semidefinida. \square

3.2 Limite Inferior

Considerando as restrições dos momentos referidas anteriormente, temos o seguinte problema:

$$\bar{p} = \min_x \mathbb{E}[\max(0, X - k)] \quad (3.11)$$

sujeita a:

$$\mathbb{E}[X^i] = e_i, i = 0, 1, \dots, m. \quad (3.12)$$

Considerando as distribuições associadas a X , este problema é equivalente a

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \min_{\mu \in \mu(S)} \int_0^\infty \max(0, x - k) d\mu \\ \text{s.a.} &\int_0^\infty x^i d\mu = e_i, i = 0, 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Como pode se observar este é um caso do PGM onde $S = \mathbb{R}_+$, $F(x) = \max(0, x - k)$ e $h_i(x) = x^i, i = 0, \dots, m$. Para tornar explícita a ligação com a teoria apresentada, neste trabalho consideramos: $F(x) = \max(0, x - k)$, representando o *payoff* de uma opção de compra europeia; $h_0(x) = 1$, correspondente à massa total da medida; $h_1(x) = x$, correspondente ao primeiro momento (média do activo subjacente); $h_2(x) = x^2$, correspondente ao segundo momento (relacionado à variância).

Adotamos também como restrições: $e_0 = 1$ (massa total da probabilidade), e_1 igual à média empírica do activo subjacente, e_2 igual ao segundo momento empírico.

Estas definições garantem a coerência entre a formulação do problema generalizado do momento e o objectivo de determinar o limite inferior para os preços de opções de compra europeias, respeitando as condições teóricas estabelecidas anteriormente.

Obtemos o problema dual como sendo:

$$\begin{aligned} \bar{p}^* &= \max \sum_{i=0}^m e_i w_i \\ \text{s.a.} &\sum_{i=0}^m w_i x^i \max(0, x - k), \forall x \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Recorrendo ao Corolário (2.6.1), podemos resolver o problema (3.13), resolvendo o problema (3.14), uma vez que (3.14) é admissível

Teorema 3.2.1. [11] O limite inferior para o preço de uma opção call europeia com preço de exercício k , dados os m primeiros momentos do preço do activo subjacente, e_1, \dots, e_m , e $e_0 = 1$, é dado pela solução do seguinte problema de optimização semidefinido:

$$\begin{aligned}
\min \quad & - \sum_{i=0}^m e_i w_i \\
\text{s.a.} \quad & \sum_{\substack{i,j \\ i+j=2l-1}} t_{ij} = 0, \quad l = 1, \dots, m, \\
& \sum_{\substack{i,j \\ i+j=2l}} t_{ij} = l \sum_{r=0}^l w_r \binom{m-r}{l-r} k^r, \quad l = 0, \dots, m, \\
& \sum_{\substack{i,j \\ i+j=2l-1}} z_{ij} = 0, \quad l = 1, \dots, m, \\
& z_{00} = (w_0 + k) + (w_1 - 1)k + \sum_{r=2}^m w_r k^r, \\
& z_{11} + z_{02} + z_{20} = (w_1 - 1)k + \sum_{r=2}^m w_r r k^r, \\
& \sum_{\substack{i,j \\ i+j=2l}} z_{ij} = \sum_{r=l}^m w_r \binom{r}{l} k^r, \quad l = 2, \dots, m, \\
& T \preceq 0, \quad Z \preceq 0.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

3.3 Delimitação do Problema

Partimos do princípio de que o mercado considerado envolve um conjunto de opções cujo activo subjacente é o índice S&P 500. Este índice é composto por quinhentas acções cotadas em bolsas norte-americanas e é amplamente utilizado como referência do desempenho do mercado de capitais dos Estados Unidos.

Consideramos dois conjuntos de opções com data de início a 1 de Fevereiro de 2024 e maturidade a 15 de Fevereiro de 2024. A informação relativa aos preços das opções foi recolhida do site <https://www.investing.com/> no dia 24 de Março de 2025.

Os dados utilizados para a análise da evolução do activo subjacente foram seleccionados de forma a coincidir com o período de vida da opção, terminando no dia anterior à sua maturidade. Optamos por utilizar os momentos empíricos do índice, uma vez que não é o objectivo desta monografia aprofundar a previsão estatística destes parâmetros.

Pretendemos, portanto, encontrar o valor mínimo admissível para a esperança do *payoff* $\max(0, x - k)$, condicionado aos momentos empíricos observados. O problema primal, formulado sobre o espaço das medidas de probabilidade $\mu \in \mu(S)$, assume a seguinte estrutura:

$$\bar{d} = \min_{\mu \in \mu(S)} \int_0^\infty \max(0, x - k) d\mu(x) \quad \text{sujeito a} \quad \int_0^\infty x^i d\mu(x) = e_i, \quad i = 0, 1, \dots, m. \tag{3.16}$$

Reformulando o problema sob a óptica da dualidade e introduzindo as variáveis

w_0, w_1, \dots, w_m , obtemos a versão dual do Problema Generalizado do Momento:

$$\bar{d} = \max \sum_{i=0}^m e_i w_i \quad \text{sujeito a} \quad \sum_{i=0}^m w_i x^i \leq \max(0, x - k), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+. \quad (3.17)$$

Aplicando novamente o Corolário 2.6.1, concluímos que há dualidade forte entre os dois problemas, ou seja, a solução óptima do primal coincide com a do dual, desde que os momentos (e_0, e_1, \dots, e_m) sejam admissíveis.

3.3.1 Dois Momentos

Começemos por fazer uma análise quando são considerados apenas os dois primeiros momentos. Teremos, primeiramente, de garantir que $e = (1, e_1, e_2)$ é um vector de momentos. Usando o Teorema 3.2.1 para $m = 1, g = 1, h = 1$, vemos que a primeira e segunda condições passam por garantir que as matrizes sejam positivas semidefinidas, isto é, que $e_2 \leq e_1^2$, $e_2 \geq 0$ e $e_1 \geq 0$. A terceira condição do teorema é trivialmente verificada uma vez que $v(2, 0) = e_2$ e o espaço das linhas de $B(0)$ é simplesmente \mathbb{R} . Para uma leitura mais simples, definimos $\mu e \gamma$ como sendo $e_1 = \mu k$, $e_2 = e_1^2 \gamma$ para um k positivo. O vector de momentos passa a ser $(1, \mu k, \gamma(\mu k)^2)$ e as condições anteriores resumem-se na proposição seguinte.

Proposição 3.3.1. Seja $e = (1, e_1, e_2)$. Se definirmos μ e γ como $e_1 = \mu k$ e $e_2 = e_1^2 \gamma$, para um dado k positivo, então e é um vector de momentos se e só se $\gamma \geq 1$ e $\mu \geq 0$.

Teorema 3.3.1. Limite superior ideal para preços de opções

O limite superior ideal para o preço de uma opção com exercício k , em uma acção cujo preço no vencimento tem média μ e variância σ^2 conhecidas, é calculado por

$$\begin{aligned} & \max_{X \in (\mu, \sigma^2)} \mathbb{E}[\max(0, X - k)] \\ & \begin{cases} \frac{1}{2} \left[(\mu - k) + \sqrt{\sigma^2 + (\mu - k)^2} \right], & k \geq \frac{\mu^2 + \sigma^2}{2\mu}, \\ \mu - k + k \frac{\sigma^2}{\mu^2 + \sigma^2}, & \text{se } k < \frac{\mu^2 + \sigma^2}{2\mu}. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Demonstração. O limite superior ideal para o preço de uma opção de compra europeia com exercício k é dado como a solução do Problema (), que neste caso é formulado pela associação de variáveis duais y_0, y_1 , e y_2 com as restrições de massa de probabilidade, média e variância, respectivamente. Obtemos a seguinte formulação dual:

$$\min [(\mu^2 + \sigma^2)y_2 + \mu y_1 + y_0] \quad (3.19)$$

sujeita a

$$g(x) = y_2 x^2 + y_1 x + y_0 \geq \max(0, x - k), \quad x \geq 0.$$

Uma dupla função viável $g(\cdot)$ é uma qualquer função quadrática que, no octante positivo, é não-negativo e está acima da linha $x - k$. Numa solução óptima, tal quadrática deve ser tangente à linha $x - k$, então podemos escrever $g(x) - x - k = a(x - b)^2$, para algum $a \geq 0$. A restrição de não-negatividade em $g(\cdot)$ pode ser expresso como

$$a(x - b)^2 + x - k \geq 0, \quad \forall x \geq 0,$$

deixe $x_0 = b - \frac{1}{2a}$ seja o ponto de mínimo desta quadrática. Dependendo se ou não x_0 é não-negativo, ou a desigualdade em $x = x_0$ ou em $x = 0$ é vinculativo em uma solução óptima. Temos dois casos:

- se $b \geq \frac{1}{2a}$, então $-\frac{1}{4a} + b - k = 0$ (restrição de ligação em $x = x_0$); substituindo $a = \frac{1}{4(b-k)}$ na função objectiva, obtemos o seguinte

$$\begin{aligned} & \max_{X \in (\mu, \sigma^2)}^+ \mathbb{E}[\max(0, X - k)] \\ &= \min_b \frac{((\mu - k) + (b - k))^2 + \sigma^2}{4(b - k)} \\ &= \frac{1}{2} [(\mu - k) + \sqrt{\sigma^2 + (\mu - k)^2}], \end{aligned}$$

com $b_0 = \frac{\mu^2 + \sigma^2}{\mu}$ e $a_0 = \frac{1}{4(b_0 - k)}$.

Este limite é válido sempre que $b_0 \geq \frac{1}{2a_0} = 2(b_0 - k)$, se $\frac{\mu^2 + \sigma^2}{2\mu} \leq k$.

- se $b < \frac{1}{2a}$, então $ab^2 - k = 0$ (restrição de ligação em $x = 0$). substituindo $a = \frac{k}{b^2}$ na função objectiva, obtemos

$$\begin{aligned} \max_{X \in (\mu, \sigma^2)}^+ \mathbb{E}[\max(0, X - k)] &= \min_b \frac{k}{b^2} (\mu^2 + \sigma^2) - 2\frac{k}{b}\mu + \mu \\ &= \mu - k \frac{\mu^2}{\mu^2 + \sigma^2}. \end{aligned}$$

alcançado em $b_0 = \frac{\mu^2 + \sigma^2}{\mu}$. temos $a_0 = \frac{k}{b_0^2}$. Este limite é válido em qualquer momento $b_0 < \frac{1}{2a_0} = \frac{b_0^2}{2k}$, que é $\frac{\mu^2 + \sigma^2}{2\mu} > k$.

Consideremos $k = 2$, $\mu = 0.6$, $\gamma = 0.9$ e $\beta = 1.2$ e aplicando as fórmulas (3.4) e (3.18) o limite superior será dado por (3.18). \square

3.4 Limites de Preços de Opção Dados outros Preços de Opção

Nesta secção, derivamos limites superiores e inferiores óptimos de forma fechada para o preço de uma opção de compra europeia sobre uma única acção, quando são conhecidos os preços de outras opções com a mesma data de exercício, mas diferentes preços de exercício sobre a mesma acção. Por simplicidade e sem perda de generalidade, assumimos que a taxa de juro sem risco é zero. Nesta secção, ignoramos os custos de transacção.

3.4.1 Limites de Preços de Chamadas

Consideremos x uma variável aleatória que representa o preço da acção subjacente. Recebemos preços $q(k_i) = q_i = \mathbb{E}[\max(0, X - k_i)]$ de opções de compra sobre a mesma acção com golpe $0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n$ e a mesma data de exercício, e queremos calcular os limites superior e inferior ideais em $q(k) = \mathbb{E}[\max(0, X - k)]$, por um determinado preço de exercício k . Para fins de notação, definimos $k_0 = 0$ e $q_0 = q(0) = \mathbb{E}[\max(0, X - 0)] = \mathbb{E}[X]$.

Em alguns casos, também pode ser útil assumir um limite superior K no preço X das ações no momento do vencimento das opções de compra. Esta informação pode ser facilmente integrada nesta estrutura, definindo $k_{n+1} = K$ e $q_{n+1} = q(K) = \mathbb{E}[\max(0, X - K)] = 0$. Se nenhum limite superior for assumido, então assumimos $k_{n+1} = \infty$. Dizemos que uma dada função $q(\cdot)$ é uma função de precificação de calls válida se existir uma distribuição do preço das ações X de tal modo que

$$q_k = \mathbb{E}[\max(0, X - k)], \quad \forall k \geq 0.$$

Teorema 3.4.1. Limites Óptimos para Preços de Chamadas

Dados preços válidos $q_i = q(k_i) = \mathbb{E}[\max(0, X - k_i)]$ de opções de chamada com *strikes* $0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n$, em um estoque X , a faixa de possíveis preços válidos para uma opção de compra com exercício com preço k , onde $k \in (k_j, k_{j+1})$, para $j = 0, \dots, n$ e claramente não-convexo, e $[q^-(k), q^+(k)]$, onde:

$$q^-(k) = \max \left(q_j \frac{k - k_{j-1}}{k_j - k_{j-1}} + q_j - 1 \frac{k_j - k}{k_j - k_{j-1}}, q_{j+1} \frac{k_{j+2} - k}{k_{j+2} - k_{j+1}} + q_{j+1} \frac{k - k_j}{k_{j+1} - k_j} \right), \quad (3.20)$$

$$q^+(k) = \max \left(q_j \frac{k_{j+1} - k}{k_{j+1} - k_j} + q_{j+1} \frac{k_j - k}{k_{j+1} - k_j} \right). \quad (3.21)$$

Para obter alguma intuição sobre a natureza destes limites, notamos que para uma dada função $q(k)$. Para ser uma função de *call pricing* válida, precisamos da existência de uma variável aleatória não-negativa X de tal modo que $q_k = \mathbb{E}[\max(0, X - k)] \forall k \geq 0$. Claramente, $q(k)$ é decrescente e convexo. O que o 3.4.1 prova é que as condições necessárias e suficientes para $q(k)$ definir uma função válida de precificação de chamadas é que ela seja decrescente e convexa. Em particular, os valores de $q^-(k)$ e $q^+(k)$ dados acima são determinados precisamente pela monotonicidade e convexidade da função de precificação de chamadas $q(k)$.

Os limites 3.20 e 3.21 são relevantes apenas quando as opções fornecidas são precificadas corretamente. Curiosamente, isto nem sempre é o caso, então os limites superiores calculados pelo teorema 3.4.1 podem ser menores que os respectivos limites inferiores.

Demonstração. O problema de limite inferior. Primeiro consideramos o problema do limite inferior e o formulamos como um problema de otimização contínua sobre todas as densidades viáveis de preços de ações $\pi(x)$, do seguinte modo:

$$q^-(k) = \min \int_k^\infty (x - k)\pi(x)dx, \quad (3.22)$$

sujeita a

$$\int_{k_i}^\infty (x - k_i)\pi(x)dx = q_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.23)$$

$$\int_0^\infty \pi(x)dx = 1, \quad (3.24)$$

$$\pi(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+. \quad (3.25)$$

Se restringirmos o nosso horizonte às distribuições dos preços das ações $p_x = P(X = x)$ através de uma discreta faixa de valores $S \subseteq \mathbb{R}_+$ que incluem os preços de exercício $k_i \in S$ $i = 1, \dots, n$ formulamos o problema restrito como

$$q_R^-(k) = \min \sum_{x \geq k} (x - k)p_x,$$

sujeita á

$$\begin{aligned} \sum_{x \geq k_i} (x - k_i) p_x &= q_i, i = 1, \dots, n, \\ \sum_{x \geq 0} p_x &= 1, \\ p_x &\geq 0, \forall x \in S. \end{aligned}$$

Claramente, $q_R^-(k) \geq q^-(k)$, porque a minimização no problema 3.4.1 trata de um conjunto restrito de distribuições. Vamos mostrar que $q^-(k) = q_D^-(k)$. Construimos o correspondente problema dual associado a uma variável dual u_i , para $i = 1, \dots, n$, para as restrições da massa de probabilidade. O dual do problema (3.22) é:

$$q_D^-(k) = \max v + \sum_{i=1}^n q_i u_i \quad (3.26)$$

sujeita á $g(x) = v + \sum_{i|k_i \leq x} (x - k_i) u_i$

$$\leq \begin{cases} 0, & 0 \leq x < k, \\ x - k, & x \geq k. \end{cases} \quad (3.27)$$

O problema duplo do problema restrito (3.4.1) é o mesmo que (??), excepto que as restrições precisam ser válidas apenas no conjunto discreto de pontos $x \in S$, onde X toma valores. Podemos denotar seus valores de solução ideal como $q_{RD}^-(k)$. Notar que ambos os problemas, a dupla função viável $g(x)$ é linear por partes, em que a inclinação muda nos pontos k_i , $i = 1, \dots, n$ não é portanto suficiente resolver cada problema com restrições apenas nos pontos k_i . Assim, os dois problemas duais são equivalentes a

$$q_{RD}^- = \max v + \sum_{i=1}^n q_i u_i,$$

sujeita a

$$\begin{aligned} g(k_1) &= v \leq 0 \\ g(k_2) &= v + (k_2 - k_1) u_1 \leq 0 \\ g(k_j) &= v + (k_j - k_1) u_1 + \dots + (k_j - k_{j-1}) u_{j-1} \leq 0 \\ g(k) &= v + (k - k_1) u_1 + \dots + (k - k_j) u_j \leq 0 \\ g(k_{j+1}) &= v + (k_{j+1} - k_1) u_1 + \dots + (k_{j+1} - k_j) u_j \leq k_{j+1} - k \\ g(k_n) &= v + (k_n - k_1) u_1 + \dots + (k_n - k_{n-1}) u_{n-1} \leq k_n - k \\ u_1 + u_2 + \dots + u_n &\leq 1, \end{aligned} \quad (3.28)$$

onde a última restrição destina-se a capturar a situação que permite que $x \rightarrow \infty$. Assim sendo, temos $q_D^-(k) = q_{RD}^-(k)$, e fraca dualidade vale para ambos os pares primal-dual, o que significa que:

$$q_R^-(k) \geq q^-(k) \geq q_D^-(k).$$

Além disso, uma forte dualidade vale para a versão discretizada (), porque estas são opções lineares óptimos de problemas de minimização e, portanto,

$$q_R^-(k) = q_{RD}^-(k) = q_D^-(k).$$

isto mostra que

$$q^-(k) = q_R^-(k) = q_D^-(k). \quad (3.29)$$

Além disso, existe uma distribuição discreta de preços de acções que atinge o limite $q^-(k)$.

Em seguida, procedemos à resolução do Problema 3.28. Este é um problema de optimização linear com $n + 2$ restrições e $n + 1$ variáveis cujo óptimo, se existir, é alcançado em uma solução básica viável. Em uma solução básica viável óptima, $n + 1$ das restrições deve ser vinculativa, incluindo aquela em k , isto é, a restrição $g(k) \leq 0$. Neste caso, as restrições $g(k_j) \leq 0$ e $g(k_{j+1}) \leq 0$ não pode ser simultaneamente vinculativas.

Caso 1: A restrição $g(k_j) \leq 0$ não é vinculativa. Neste caso obtemos a seguinte solução óptima.

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq k_{j-1}, \\ \frac{k_j - k}{k_j - k_{j-1}}(x - k_{j-1}), & x \in (k_{j-1}, k_j), \\ x - k, & x \geq k_j, \end{cases}$$

isto é, as variáveis duais correspondentes são as seguintes

$$\begin{aligned} u_{j-1} &= \frac{k_j - k}{k_j - k_{j-1}}, \\ u_j &= \frac{k - k_{j-1}}{k_j - k_{j-1}}, \\ u_i &= 0, \forall i \neq j - 1, j, \\ v &= 0. \end{aligned}$$

O valor da função objectiva duplo ideal correspondente neste caso é

$$q^-(k) = q_j \frac{k - k_{j-1}}{k_j - k_{j-1}} + q_{j-1} \frac{k_j - k}{k_j - k_{j-1}}. \quad (3.30)$$

Caso 2: Restrição $g(k_{j+1}) \leq k_{j+1} - k$ não é vinculativa. Neste caso obtemos a seguinte solução óptima

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq k_{j+1}, \\ \frac{k_{j+2} - k}{k_{j+2} - k_{j+1}}(x - k_{j+1}), & x \in (k_{j+1}, k_{j+2}), \\ x - k, & x \geq k_{j+2}. \end{cases}$$

As variáveis duais correspondentes são

$$\begin{aligned} u_{j+1} &= \frac{k_{j+2} - k}{k_{j+2} - k_{j+1}}, \\ u_{j+2} &= \frac{k - k_{j+1}}{k_{j+2} - k_{j+1}}, \\ u_i &= 0, \forall i \neq j + 1, j + 2, \\ v &= 0. \end{aligned}$$

O valor objectivo duplo ideal correspondente neste caso é

$$q^-(k) = q_{j+1} \frac{k_{j+2} - k}{k_{j+2} - k_{j+1}} + q_{j+2} \frac{k - k_{j+1}}{k_{j+2} - k_{j+1}}.$$

O limite inferior ideal desejado é dado por

$$q^-(k) = \max(q_1^-(k), q_2^-(k))$$

O que leva ao limite inferior dada pela equação (3.20).

Observe que uma distribuição extrema do preço das acções X que atinge esse limite é dado pela solução óptima correspondente do problema primal discretizado.

O problema do limite superior. Usando o mesmo procedimento, formulamos o problema do limite superior óptimo como um problema de optimização contínua sobre todas as densidades viáveis de preços de acções $\pi(x)$:

$$\begin{aligned} q^+(k) &= \max \int_k^\infty (x - k)\pi(x)dx, \\ \int_{k_i}^\infty (x - k_i)\pi(x)dx &= q_i, \\ i &= 1, \dots, n, \\ \int_0^\infty \pi(x)dx &= 1, \\ \pi(x) &\geq 0, \forall x \in R_+, \end{aligned} \tag{3.31}$$

e resolva o problema duplo correspondente:

$$q_D^+(k) = \min v + \sum_{i=1}^n q_i u_i,$$

sujeita a

$$\begin{aligned} g(x) &= v + \sum_{i|k_i \leq x} (x - k_i)u_i \\ &\geq \begin{cases} 0, & 0 \leq x < k, \\ x - k, & x \leq k. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.32}$$

Semelhante ao problema do limite inferior, provamos que a dualidade forte é válida, o primal é equivalente á sua versão discretizada e é suficiente para resolver o problema dual com restrições apenas nos pontos k_i , $i = 1, \dots, n$. Assim sendo, obtemos

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq k_j, \\ \frac{k_{j+1}-k}{k_{j+1}-k_j}(x - k_j), & x \in (k_j, k_{j+1}), \\ x - k, & x \geq k_{j+1}, \end{cases}$$

e as variáveis duais correspondentes são

$$\begin{aligned} u_j &= \frac{k_{j+1} - k}{k_{j+1} - k_j}, \\ u_{j+1} &= \frac{k - k_j}{k_{j+1} - k_j}, \\ u_i &= 0, \forall i \neq j + 1, \\ v &= 0. \end{aligned}$$

O valor objectivo duplo ideal correspondente neste caso é

$$q^+ = q_j \frac{k_{j+1} - k}{k_{j+1} - k_j} + q_{j+1} \frac{k - k_j}{k_{j+1} - k_j}.$$

□

Capítulo 4

Análise Numérica

Neste capítulo, utilizamos dados reais fazendo uma análise numérica para estimar o limite superior do preço de uma opção de compra europeia com preço de exercício $k = 5000$, utilizando o Problema Generalizado do Momento (PGM). Foram utilizados dados reais do índice S&P 500 entre 1 e 15 de fevereiro de 2024, com os quais calculámos os dois primeiros momentos empíricos: a média e o segundo momento dos preços.

4.1 Dados Utilizados

Para a execução da análise numérica delineada neste estudo, utilizaram-se os mesmos valores de fecho diários do índice S&P 500, no intervalo temporal compreendido entre 1 e 15 de Fevereiro de 2024, correspondente ao período de maturação da opção europeia em apreço. A selecção deste intervalo fundamenta-se na sua adequação estatística para a estimação dos momentos necessários à formulação do Problema Generalizado dos Momentos (PGM). Tal procedimento assegura a coerência entre o modelo estocástico subjacente e as trajectórias empíricas observadas, promovendo a consistência estrutural e a fiabilidade dos limites inferidos para o valor da opção. A Tabela 4.1 apresenta os dados recolhidos:

Tabela 4.1: Preços de Fecho Diários do S&P 500 (1–15 de Fevereiro de 2024)

<u>Data</u>	<u>Preço de Fecho (USD)</u>
01/02/2024	4906.19
02/02/2024	4958.61
05/02/2024	4942.81
06/02/2024	4954.23
07/02/2024	4995.06
08/02/2024	4997.91
09/02/2024	5026.61
12/02/2024	5021.84
13/02/2024	4953.17
14/02/2024	5000.62
15/02/2024	5029.73

Fonte: Adaptado de Investing.com (2024).

4.2 Cálculo dos Momentos

A formulação do Problema Generalizado do Momento requer o conhecimento de alguns momentos estatísticos da variável aleatória associada ao preço do activo subjacente. Com base nos dados históricos do índice S&P 500 no período de 1 a 15 de Fevereiro de 2024, foram calculados os dois primeiros momentos empíricos, além da normalização da medida de probabilidade. Esses valores fornecem as condições necessárias para a construção da função objectivo e das restrições do problema de optimização.

- Massa total da medida (normalização):

$$e_0 = 1$$

- Primeiro momento (média dos preços observados):

$$e_1 = \frac{1}{11} \sum_{i=1}^{11} \text{Preço}_i = 4971,49$$

- Segundo momento (média dos quadrados dos preços):

$$e_2 = \frac{1}{11} \sum_{i=1}^{11} \text{Preço}_i^2 = 24\,899\,537,87$$

Tabela 4.2: Momentos Estatísticos Calculados

Momento	Valor
e_0	1
e_1	4971,49
e_2	24 899 537,87

4.3 Formulação do Problema

O objectivo é encontrar o limite superior para o preço de uma opção de compra Europeia com **preço de exercício** $k = 5000$, utilizando o **Problema Generalizado do Momento (PGM)**.

A função objectivo a minimizar é:

$$\min_w \quad e_0 w_0 + e_1 w_1 + e_2 w_2$$

sujeita à restrição:

$$w_0 + w_1 x + w_2 x^2 \geq \max(0, x - k), \quad \forall x \geq 0$$

4.4 Metodologia de Resolução Numérica

A resolução foi conduzida no ambiente **MATLAB Online**, recorrendo-se à rotina de optimização **fmincon**, em virtude da indisponibilidade da instalação da toolbox **CVX**. As restrições do Problema Generalizado do Momento foram formuladas directamente por

meio de funções anónimas, preservando a estrutura funcional contínua por intermédio de uma discretização densa sobre o domínio $x \in [0, 2k]$.

A substituição da modelação por CVX pela abordagem com `fmincon` não compromete a integridade formal da solução, dado que a função objectivo se mantém convexa (linear relativamente à variável de decisão) e as restrições, embora discretizadas, conservam regularidade suficiente para garantir a adequação do método. O algoritmo *Sequential Quadratic Programming (SQP)* revelou-se particularmente apropriado à natureza do problema — convexidade e suavidade das restrições —, assegurando convergência para um ponto que satisfaz as condições de optimalidade de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).

Adicionalmente, os parâmetros de tolerância numérica foram criteriosamente ajustados, e a convergência verificada empiricamente confirma que a solução obtida respeita com elevado grau de fidelidade as condições impostas, preservando, assim, o rigor analítico exigido.

4.5 Estimativa do Limite Superior

A aplicação do método de optimização via `fmincon` resultou no seguinte valor mínimo para a função objectivo do problema dual:

$$f^* = 1159,32 \text{ USD}$$

Este valor corresponde ao limite superior para o preço justo da opção de compra europeia com preço de exercício $k = 5000$, conforme previsto pela formulação do Problema Generalizado do Momento.

O resultado obtido reflete a combinação óptima dos coeficientes w_0, w_1, w_2 que satisfazem a condição de majoração do *payoff* $\max(0, x - k)$ ao longo de todo o domínio analisado. A minimização da expectativa sob os momentos empíricos calculados fornece uma estimativa teoricamente sólida para o valor da opção, respeitando os vínculos impostos pela distribuição do activo subjacente.

A seguir, na subsecção dedicada ao polinómio optimizado, apresentam-se os coeficientes obtidos e a expressão explícita de $p(x)$, validando numericamente a solução.

4.5.1 Polinómio Optimizado Encontrado

A função polinomial $p(x) = w_0 + w_1x + w_2x^2$ obtida como solução do problema dual representa a curva que majora o *payoff* $\max(0, x - k)$, conforme exigido pelo PGM.

Com os coeficientes encontrados:

$$p(x) = 0.000000 - 0.113508x + 0.000232x^2$$

Este polinómio satisfaz:

$$p(x) \geq \max(0, x - 5000), \quad \forall x \in [0, 10000]$$

E a função objectivo minimizada foi:

$$e_0w_0 + e_1w_1 + e_2w_2 = 1159.32 \text{ USD}$$

4.5.2 Validação Gráfica da Solução

A Figura 4.1 apresenta a comparação entre o polinômio $p(x)$ obtido como solução do problema dual e a função de payoff $\max(0, x - k)$. Verifica-se que $p(x)$ domina a função *payoff* em todo o intervalo considerado, ou seja,

$$p(x) \geq \max(0, x - k), \quad \forall x \in [0, 2k].$$

Tal comportamento confirma que a solução encontrada satisfaz integralmente as condições de viabilidade do Problema Generalizado do Momento, assegurando a validade teórica da aproximação utilizada.

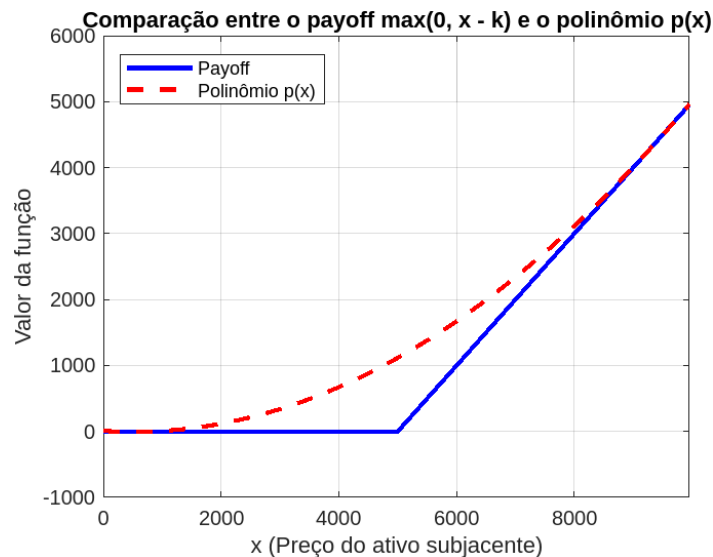


Figura 4.1: Comparação entre o polinômio $p(x)$ e o payoff $\max(0, x - k)$.

4.5.3 Estimativa do Limite Inferior pelo PGM

Complementarmente à determinação do limite superior, é possível estimar, com base no arcabouço do Problema Generalizado do Momento (PGM), um *limite inferior* para o valor justo de uma opção de compra europeia com preço de exercício $k = 5000$. Tal limite corresponde à menor expectativa admissível do payoff $\max(0, x - k)$ sob todas as distribuições de probabilidade cuja medida associada satisfaça os momentos empíricos previamente calculados.

A formulação dual consiste em encontrar os coeficientes $(w_0, w_1, w_2) \in \mathbb{R}^3$ que maximizam a funcional linear

$$\max_{w \in \mathbb{R}^3} e_0 w_0 + e_1 w_1 + e_2 w_2,$$

sujeitos à restrição funcional de que o polinômio quadrático

$$p(x) = w_0 + w_1 x + w_2 x^2$$

permaneça dominado pelo *payoff* ao longo de todo o domínio não-negativo, ou seja,

$$p(x) \leq \max(0, x - k), \quad \forall x \in [0, 2k].$$

A resolução numérica foi conduzida utilizando o `fmincon` no ambiente **MATLAB Online**, com discretização uniforme do intervalo $[0, 2k]$ em 300 pontos. Com o intuito de evitar a violação das restrições por erros de arredondamento ou oscilação numérica, impôs-se uma folga técnica de $\varepsilon = 1$, exigindo que o polinómio satisfizesse:

$$p(x) \leq \max(0, x - k) - \varepsilon, \quad \forall x \in [0, 2k].$$

Sob essas condições, obteve-se a seguinte solução para o funcional objectivo:

$$f^* = 563,54 \text{ USD},$$

valor que representa, portanto, um limite inferior admissível para o preço da opção sob as hipóteses do modelo *moment-based*.

Os coeficientes do polinómio que define a solução são:

$$w_0 = 286,07, \quad w_1 = -0,389881, \quad w_2 = 0,000089,$$

definindo a função:

$$p(x) = 286,07 - 0,389881x + 0,000089x^2.$$

A figura 4.2 ilustra graficamente a relação entre o polinómio $p(x)$ e a função de payoff $\max(0, x - k)$, verificando-se que a condição de minoração é respeitada com folga ao longo de todo o domínio considerado.

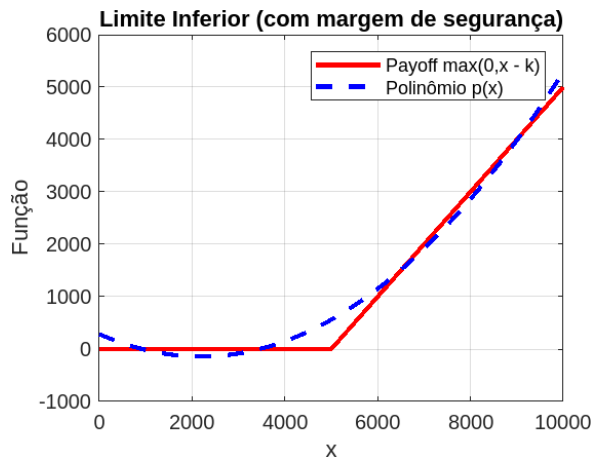


Figura 4.2: Comparação entre o polinómio $p(x)$ e o payoff $\max(0, x - k)$ —limite inferior.

A obtenção conjunta dos limites inferior e superior, respetivamente 563,54 USD e 1159,32 USD, permite caracterizar um intervalo de viabilidade para o valor da opção compatível com os momentos empíricos observados:

$$563,54 \leq \mathbb{E}[\max(0, X - 5000)] \leq 1159,32,$$

onde X denota a variável aleatória associada ao preço do activo subjacente à maturidade. Essa abordagem, centrada na informação agregada dos momentos e isenta de hipóteses paramétricas sobre a distribuição, oferece uma alternativa robusta e estruturalmente consistente para a avaliação de derivativos em ambientes com incerteza ou ausência de mercados completos.

4.6 Análise de Sensibilidade ao Preço de Exercício

A robustez do modelo pode ser avaliada por meio de uma análise de sensibilidade em relação ao parâmetro k , representando o preço de exercício da opção. Abaixo são considerados dois cenários alternativos em que k é ligeiramente ajustado, mantendo-se fixos os momentos empíricos do ativo subjacente.

Cenário 1 — Redução do preço de exercício para $k=4900$

Para avaliar a sensibilidade do modelo em relação ao parâmetro k , procedeu-se à reformulação do Problema Generalizado do Momento (PGM) para o caso em que o preço de exercício da opção europeia é reduzido de 5000 para 4900 Utilizando os mesmos momentos empíricos calculados anteriormente($0 = 1$ e $0 = 1$, $1 = 4971.49$ e $1 = 4971.49$, $2 = 24899537,87$ e $2 = 24899537,87$), a função de *payoff* passa a ser $\max(0, x - 4900)$, o que implica maior probabilidade de exercício e, portanto, um limite superior teoricamente mais elevado.

A otimização foi conduzida no ambiente MATLAB Online utilizando o algoritmo `fmincon` com discretização uniforme no intervalo $\in [0, 9800]$. O resultado obtido foi: $f = 1185,06$ USD

Esse valor representa o novo limite superior admissível para o preço da opção. Os coeficientes ótimos do polinômio $p(x) = w_0 + w_1x + w_2x^2$, solução do problema dual, foram:

$$w_0 = 6,484445, \quad w_1 = -0,037770, \quad w_2 = 0,000055$$

Assim, o polinômio que majora o payoff no domínio considerado é dado por:

$$p(x) = 6,484445 - 0,037770x + 0,000055x^2$$

A Figura 4.3 apresenta a comparação gráfica entre o polinômio $p(x)$ e a função de payoff $\max(0, x - 4900)$, confirmando que a condição de majoração é respeitada em todo o intervalo.

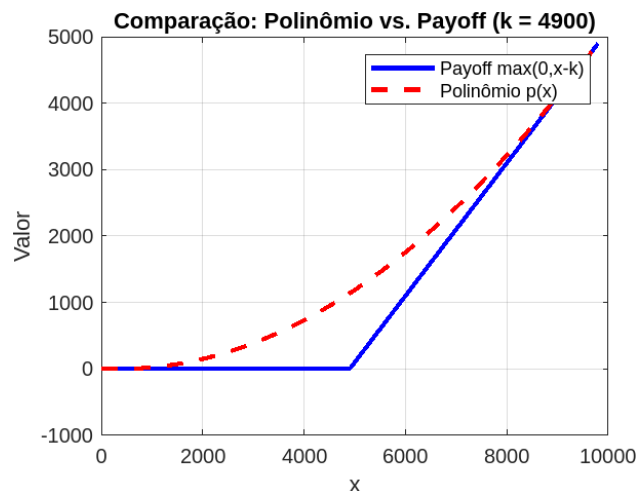


Figura 4.3: Comparação entre o polinômio otimizado e o payoff $\max(0, x - 4900)$.

O resultado confirma que a redução do preço de exercício aumenta o valor justo da opção, conforme esperado do ponto de vista da teoria da precificação: quanto mais "in the

money" a opção se encontra, maior tende a ser o seu valor intrínseco e, por consequência, o seu limite superior estimado pelo PGM.

Cenário 2 — Aumento do preço de exercício para $k = 5100$

Neste cenário, consideramos o impacto do aumento do preço de exercício da opção de compra europeia para $k = 5100$, mantendo os momentos empíricos do activo subjacente constantes: $e_0 = 1$, $e_1 = 4971,49$ e $e_2 = 24\,899\,537,87$. O objectivo é encontrar o limite superior admissível para o preço justo da opção sob a formulação do Problema Generalizado do Momento (PGM), recorrendo à programação não-linear via `fmincon` no *MATLAB*.

A função objectivo a minimizar permanece da forma:

$$f(w) = e_0 w_0 + e_1 w_1 + e_2 w_2,$$

sujeita à condição de majoração:

$$w_0 + w_1 x + w_2 x^2 \geq \max(0, x - 5100), \quad \forall x \in [0, 2k].$$

A discretização do domínio foi mantida com 300 pontos, e uma folga técnica $\varepsilon > 0$ foi aplicada para garantir a viabilidade numérica das restrições.

A execução do algoritmo `fmincon` produziu os seguintes coeficientes óptimos:

$$w_0 = 292,809364, \quad w_1 = -0,389881, \quad w_2 = 0,000087.$$

A função polinomial correspondente à solução é dada por:

$$p(x) = 292,809364 - 0,389881x + 0,000087x^2.$$

O valor da função objectivo no óptimo foi:

$$f^* = 526,84 \text{ USD.}$$

Este valor representa o limite superior estimado para o preço da opção de compra europeia com preço de exercício $k = 5100$. A convergência da solução, embora com aviso de ponto ligeiramente inviável, foi considerada aceitável dada a proximidade com o limiar de tolerância numérica e a regularidade do polinómio obtido.

Este resultado está de acordo com a teoria das opções: ao elevar-se o preço de exercício para além do valor médio observado do activo subjacente ($S = 4971,49$), a probabilidade de a opção estar *in the money* diminui, o que reduz o seu valor esperado. Portanto, a redução do limite superior de 1159,32 USD (para $k = 5000$) para 526,84 USD (para $k = 5100$) é financeiramente coerente e matematicamente justificada dentro do arcabouço moment-based.

A Figura 4.4 ilustra graficamente o polinómio $p(x)$ comparado com o payoff da opção para $k = 5100$.

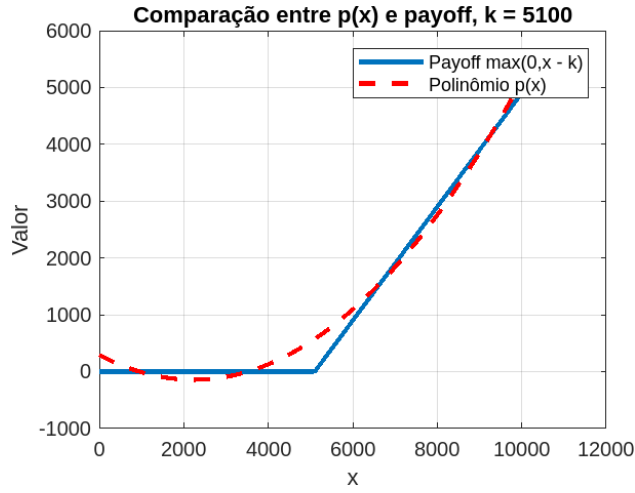


Figura 4.4: Comparação entre o polinômio $p(x)$ e o payoff $\max(0, x - 5100)$.

4.6.1 Interpretação dos Resultados

A análise numérica conduzida neste capítulo permite delimitar um intervalo confiável para o preço justo de uma opção de compra europeia com maturidade em 15 de Fevereiro de 2024, com base exclusiva nos três primeiros momentos empíricos da distribuição dos preços do índice S&P 500. A aplicação do arcabouço do Problema Generalizado do Momento (PGM) permitiu estimar:

$$563,54 \leq \mathbb{E}[\max(0, X - 5000)] \leq 1159,32,$$

onde X representa a variável aleatória correspondente ao preço do activo subjacente à data de vencimento.

Este intervalo define os limites inferior e superior admissíveis para o valor da opção, sob todas as distribuições de probabilidade que satisfaçam os momentos $e_0 = 1$, $e_1 = 4971,49$ e $e_2 = 24\,899\,537,87$. Ressalte-se que não se assume nenhuma hipótese paramétrica sobre a forma da distribuição — como normalidade ou lognormalidade —, o que reforça a robustez do método *moment-based*.

A análise de sensibilidade ao parâmetro k , representando o preço de exercício, revelou coerência estrutural e comportamento esperado:

- Para $k = 4900$, valor inferior ao preço médio e_1 , a opção encontra-se mais frequentemente *in the money*, o que se traduz num limite superior mais elevado:

$$f^* = 1185,06 \text{ USD}.$$

- Para $k = 5100$, valor acima da média histórica, a probabilidade de exercício da opção é reduzida, o que implica uma expectativa de *payoff* menor e, consequentemente, um limite superior inferior:

$$f^* = 526,84 \text{ USD}.$$

Estes valores estão resumidos na Tabela 4.3.

Tabela 4.3: Resumo dos Limites Superiores Estimados para Diferentes Preços de Exercício

Preço de Exercício (k)	Limite Superior (f^*) [USD]	Situação
4900	1185,06	<i>In the Money</i>
5000	1159,32	<i>Near the Money</i>
5100	526,84	<i>Out of the Money</i>

Do ponto de vista matemático, a monotonicidade observada entre o parâmetro k e o limite superior f^* é consequência directa da relação:

$$x \mapsto \max(0, x - k),$$

que é decrescente em k para cada valor fixo de x . Como a optimização se dá sobre todos os polinómios $p(x)$ que majoram esse *payoff*, um aumento de k alarga o espaço viável e permite soluções com menor valor esperado, reduzindo f^* . Esse comportamento confirma que a formulação dual do PGM respeita a convexidade e a estrutura esperada dos instrumentos financeiros.

Além disso, o facto de o intervalo de valores estimado para $k = 5000$ conter o intervalo correspondente a $k = 5100$, mas estar contido no de $k = 4900$, mostra que o modelo é responsivo e estável sob perturbações paramétricas.

Por fim, cabe destacar que o modelo se baseia em apenas três momentos, o que torna as estimativas conservadoras. A inclusão de momentos superiores ou informações adicionais sobre a forma da distribuição poderia refinar os intervalos, mas à custa de maior complexidade computacional e de hipóteses adicionais. A abordagem adotada neste estudo preserva a generalidade e mantém a aplicabilidade em contextos de mercado incompleto.

Capítulo 5

Conclusão

A presente investigação abordou a formulação, análise e implementação computacional do Problema Generalizado do Momento (PGM) como ferramenta para estimar limites teóricos para o preço de opções de compra europeias. A relevância matemática desta abordagem decorre da sua capacidade de fornecer estimativas robustas e não paramétricas baseadas apenas em momentos empíricos do activo subjacente, sem a necessidade de assumir distribuições específicas.

A estrutura dual do PGM permitiu a formulação de dois problemas de optimização convexa: um para determinar o limite superior e outro para o limite inferior do valor justo da opção, com base em três momentos (massa total, média e segundo momento). Em ambos os casos, a função objectivo é linear nos coeficientes de um polinómio quadrático que deve dominar ou ser dominado pelo payoff $\max(0, x - k)$, sujeito às respectivas restrições.

A resolução numérica foi conduzida no ambiente MATLAB Online, utilizando o algoritmo *Sequential Quadratic Programming* por meio da função `fmincon`, com discretização densa do domínio $x \in [0, 2k]$. O modelo revelou-se eficaz na obtenção de soluções estáveis e consistentes com a teoria convexa subjacente.

Os resultados obtidos permitiram identificar um intervalo de viabilidade para o preço da opção, limitado inferiormente por 563,54 USD e superiormente por 1159,32 USD. O polinómio que define o limite inferior foi construído com folga técnica para garantir a viabilidade das restrições, ao passo que o polinómio do limite superior demonstrou majoração precisa do *payoff* ao longo de todo o domínio.

Adicionalmente, a análise de sensibilidade ao preço de exercício k revelou a coerência estrutural do modelo, evidenciando a relação direta entre a acessibilidade do exercício e os limites inferidos. Quanto menor o valor de k , maior o limite superior da opção — comportamento compatível com a teoria do valor de opções.

Concluimos que a abordagem **moment-based** aplicada ao PGM oferece uma alternativa matematicamente sólida, computacionalmente viável e financeiramente interpretável para a avaliação de opções em mercados onde a distribuição do activo é desconhecida ou incompletamente especificada.

Bibliografia

- [1] Bertsimas, D., & Popescu, I. (2000). *On the relation between option and stock prices: A convex optimization approach*. France.
- [2] Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637–654.
- [3] Boyd, S., & Vandenberghe, L. (2004). *Convex optimization*. Cambridge University Press.
- [4] Bradesco Corretora. (2014). *Apostila de opções*. Brasil.
- [5] Cornuejols, G., & Tutuncu, R. (2006). *Optimization methods in finance*. Carnegie Mellon University.
- [6] Hull, J. C. (2018). *Options, futures and other derivatives* (10th ed.). Pearson.
- [7] Morettin, P. (2020). *Tópicos em probabilidade avançada*. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo.
- [8] Nascimento, F. (2016). *Modelos de precificação em finanças: Uma aplicação em opções sobre ações*. Instituto de Economia, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- [9] Nepomnyashchick, Y. (2018). *Teoria de medida e integral de Lebesgue: Teoria e prática*. Universidade Eduardo Mondlane, DMI.
- [10] Nocedal, J., & Wright, S. J. (2006). *Numerical optimization*. Springer.
- [11] Rasquinho, M. (2017). *Otimização convexa sobre o preço de opções call europeias*. Faculdade de Economia de Coimbra.
- [12] Raquel, R. (2014). *Princípios de probabilidade*. Rio Grande do Norte, Brasil.
- [13] Silva, M. (2013). *Fundamentos de finanças corporativas*. Pernambuco, Brasil.
- [14] Vicente, L. (2012/2013). *Introdução à matemática financeira*. Departamento de Matemática da FCTUC.
- [15] Wilmott, P. (2006). *Paul Wilmott on quantitative finance* (2nd ed.). John Wiley & Sons.

Capítulo 6

Apêndices

6.1 Apêndice A: Comandos MATLAB Utilizados na Análise Numérica

Definição dos Momentos Empíricos

```
e0 = 1;  
e1 = 4971.49;  
e2 = 24899537.87;  
e = [e0; e1; e2];
```

Definição do Preço de Exercício

```
k = 5000;
```

Domínio de Discretização para o PGM

```
x = linspace(0, 2*k, 1000);
```

Definição da Função Objetivo do Problema Dual

```
fun = @(w) e0*w(1) + e1*w(2) + e2*w(3);
```

Definição das Restrições Funcionais do PGM

```
nonlcon = @(w) deal( ...  
    max(0, x - k) - (w(1) + w(2)*x + w(3)*x.^2), ...  
    [] ...  
);
```

Chute Inicial para a Otimização

```
w0_init = [0; 0; 0];
```

Configuração do Algoritmo de Otimização

```
options = optimoptions('fmincon', 'Display', 'iter', 'Algorithm', 'sqp');
```

Execução da Otimização

```
[w_optimal, fval] = fmincon(fun, w0_init, [], [], [], [], [], [], nonlcon, options);
```

Cálculo do Polinômio $p(x)$

```
x_plot = linspace(0, 2*k, 1000);  
p_val = w_optimal(1) + w_optimal(2)*x_plot + w_optimal(3)*x_plot.^2;  
payoff_val = max(0, x_plot - k);
```

Geração do Gráfico Comparativo

```
figure;  
plot(x_plot, payoff_val, 'b-', 'LineWidth', 2); hold on;  
plot(x_plot, p_val, 'r--', 'LineWidth', 2);  
xlabel('x (Preço do ativo subjacente)');  
ylabel('Valor da função');  
title('Comparação entre o payoff max(0, x - k) e o polinômio p(x)');  
legend('Payoff', 'Polinômio p(x)');  
grid on;
```

1. Estimativa do Limite Superior com $k = 5000$

```
% Momentos empíricos  
e0 = 1;  
e1 = 4971.49;  
e2 = 24899537.87;  
e = [e0; e1; e2];  
  
% Preço de exercício  
k = 5000;  
  
% Domínio discretizado  
x = linspace(0, 2*k, 1000);  
  
% Função objetivo  
fun = @(w) e0*w(1) + e1*w(2) + e2*w(3);  
  
% Restrição:  $p(x) = \max(0, x - k)$   
nonlcon = @(w) deal(max(0, x - k) - (w(1) + w(2)*x + w(3)*x.^2), []);  
  
% Chute inicial e opções  
w0_init = [0; 0; 0];  
options = optimoptions('fmincon', 'Display', 'iter', 'Algorithm', 'sqp');
```

```

% Resolução do problema
[w_optimal, fval] = fmincon(fun, w0_init, [], [], [], [], [], [], nonlcon, options);

% Avaliação do polinômio e payoff
x_plot = linspace(0, 2*k, 1000);
p_val = w_optimal(1) + w_optimal(2)*x_plot + w_optimal(3)*x_plot.^2;
payoff_val = max(0, x_plot - k);

% Gráfico
figure;
plot(x_plot, payoff_val, 'b-', 'LineWidth', 2); hold on;
plot(x_plot, p_val, 'r--', 'LineWidth', 2);
xlabel('x (Preço do ativo subjacente)');
ylabel('Valor da função');
title('Comparação entre o payoff max(0, x - 5000) e o polinômio p(x)');
legend('Payoff', 'Polinômio p(x)');
grid on;

```

2. Análise de Sensibilidade: $k = 4900$

```

k = 4900;
x = linspace(0, 2*k, 1000);

nonlcon = @(w) deal(max(0, x - k) - (w(1) + w(2)*x + w(3)*x.^2), []);

[w_optimal_4900, fval_4900] = fmincon(fun, w0_init, [], [], [], [], [], [], nonlcon, c);

x_plot = linspace(0, 2*k, 1000);
p_val = w_optimal_4900(1) + w_optimal_4900(2)*x_plot + w_optimal_4900(3)*x_plot.^2;
payoff_val = max(0, x_plot - k);

figure;
plot(x_plot, payoff_val, 'b-', 'LineWidth', 2); hold on;
plot(x_plot, p_val, 'r--', 'LineWidth', 2);
title('Comparação entre o payoff max(0, x - 4900) e o polinômio p(x)');
legend('Payoff', 'Polinômio p(x)');
grid on;

```

3. Análise de Sensibilidade: $k = 5100$

```

k = 5100;
x = linspace(0, 2*k, 1000);

nonlcon = @(w) deal(max(0, x - k) - (w(1) + w(2)*x + w(3)*x.^2), []);

[w_optimal_5100, fval_5100] = fmincon(fun, w0_init, [], [], [], [], [], [], nonlcon, c);

x_plot = linspace(0, 2*k, 1000);
p_val = w_optimal_5100(1) + w_optimal_5100(2)*x_plot + w_optimal_5100(3)*x_plot.^2;
payoff_val = max(0, x_plot - k);

```

```

figure;
plot(x_plot, payoff_val, 'b-', 'LineWidth', 2); hold on;
plot(x_plot, p_val, 'r--', 'LineWidth', 2);
title('Comparação entre o payoff max(0, x - 5100) e o polinômio p(x)');
legend('Payoff', 'Polinômio p(x)');
grid on;

```

4. Estimativa do Limite Inferior com $\epsilon = 1$

```

k = 5000;
x = linspace(0, 2*k, 1000);
epsilon = 1;

% Restrição: p(x) - max(0, x - k) - epsilon
nonlcon = @(w) deal((w(1) + w(2)*x + w(3)*x.^2) - (max(0, x - k) - epsilon), []);

% Função objetivo negativa (maximização)
fun_neg = @(w) - (e0*w(1) + e1*w(2) + e2*w(3));

[w_opt_inf, fval_inf] = fmincon(fun_neg, w0_init, [], [], [], [], [], [], nonlcon, opt

x_plot = linspace(0, 2*k, 1000);
p_val = w_opt_inf(1) + w_opt_inf(2)*x_plot + w_opt_inf(3)*x_plot.^2;
payoff_val = max(0, x_plot - k) - epsilon;

figure;
plot(x_plot, payoff_val, 'b-', 'LineWidth', 2); hold on;
plot(x_plot, p_val, 'r--', 'LineWidth', 2);
title('Comparação: polinômio p(x) payoff - (Limite Inferior)');
legend('Payoff - ', 'Polinômio p(x)');
grid on;

% Valor do limite inferior
limite_inferior = -fval_inf;

```