



FACULDADE DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TRABALHO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TEMA: APLICAÇÃO DO MÉTODO DE CRANK NICHOLSON  
PARA A MODELAÇÃO DE PREÇO DE UM DERIVADO  
FINANCEIRO

**Autor:** Roménimo Carlos Cutana, Aluno do curso de licenciatura em Matemática

Maputo, Maio de 2025



FACULDADE DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TRABALHO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TEMA: APLICAÇÃO DO MÉTODO DE CRANK NICHOLSON  
PARA A MODELAÇÃO DE PREÇO DE UM DERIVADO  
FINANCEIRO

**Autor:** Roménimo Carlos Cutana, Aluno do curso de licenciatura em Matemática  
**Supervisora:** Dra Clarinda Vitorino Nhangumbe

Maputo, Maio de 2025

## Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de expressar minha profunda gratidão a Deus, pela saúde e força que me concedeu para enfrentar os desafios e concluir este trabalho.

A minha família, que tem sido o meu pilar de apoio, merece um agradecimento especial. Agradeço aos meus pais, irmãos e amigos pelo amor incondicional, incentivo e apoio contínuo, sem os quais não teria sido possível chegar até aqui.

À minha supervisora, sou imensamente grato pela oportunidade e orientação valiosa na elaboração desta monografia. Seu apoio e conhecimento foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço também a todos os colegas e professores que contribuíram para minha formação acadêmica. Em especial, gostaria de mencionar o Bernardo Pica, Arlinda Munguambe, Tasmin Varinde, Ernesto Machava, pela colaboração e apoio durante este percurso.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho, o meu sincero Khanimabo!

## Declaração

Declaro que este trabalho foi elaborado apenas para obtenção do grau de licenciatura em Matemática e que nunca foi apresentado para obtenção de qualquer grau académico. O trabalho resulta da minha investigação onde as obras usadas estão indicadas no texto e nas referências bibliográficas.

Maputo, Maio de 2025

---

Roménilo Carlos Cutana

## Resumo

As equações diferenciais parciais desempenham um papel fundamental em diversas áreas da ciência, devido à sua ampla aplicabilidade. Na Matemática Financeira, por exemplo, elas são utilizadas para modelar o crescimento econômico e o risco financeiro. No entanto, a maioria dos problemas reais que envolvem equações diferenciais parciais não possui uma solução analítica conhecida ou viável. Para superar essa limitação, recorre-se a métodos de aproximação numérica, dentre os quais o método das diferenças finitas se destaca como uma das técnicas mais empregadas. Esse método consiste em aproximar a solução ao substituir as derivadas contínuas por diferenças entre valores discretos em uma malha de pontos.

Neste trabalho, inicialmente, apresenta-se um resumo teórico dos conceitos matemáticos e financeiros que serão utilizados no desenvolvimento do tema. Em seguida, realiza-se uma revisão bibliográfica sobre as equações diferenciais, abordando aspectos relacionados à sua classificação e aos métodos analíticos e numéricos para a sua resolução. Considera-se um exemplo de aplicação do método de Crank-Nicholson na resolução de um modelo de precificação de uma opção europeia de compra. Analisa-se a convergência do método numérico desenvolvido e utiliza-se a metodologia do termo fonte para verificar se o método foi implementado corretamente. Além disso, desenvolve-se um algoritmo para o método, que é implementado com o auxílio do software MATLAB.

Com os testes numéricos realizados, verificou-se que o método de Crank-Nicholson apresenta uma ordem de convergência espacial e temporal próxima de 2, confirmando a teoria que fundamenta esse método. As simulações numéricas demonstraram que o erro espacial é mais dominante em malhas menos refinadas e que a precisão dos resultados melhora significativamente com o refinamento da malha.

**Palavras-Chave:** Equações Diferenciais com derivadas parciais, Método das Diferenças Finitas, Método de Crank- Nicholson, convergência, Derivados Financeiros, Equação de Black Scholes.

## Abstract

Partial differential equations play a fundamental role in various areas of science due to their wide applicability. In Financial Mathematics, for example, they are used to model economic growth and financial risk. However, most real-world problems involving partial differential equations do not have a known or feasible analytical solution. To overcome this limitation, numerical approximation methods are employed, among which the finite difference method stands out as one of the most widely used techniques. This method approximates the solution by replacing continuous derivatives with differences between discrete values on a grid of points.

In this work, a theoretical summary of the mathematical and financial concepts to be used in the development of the topic is first presented. Next, a literature review on differential equations is conducted, addressing aspects related to their classification and the analytical and numerical methods for their resolution. An application example of the Crank-Nicholson method is considered for solving a pricing model of a European call option. The convergence of the developed numerical method is analyzed, and the source term methodology is used to verify the correct implementation of the method. Additionally, an algorithm for the method is developed and implemented using MATLAB software.

Through the numerical tests performed, it was found that the Crank-Nicholson method exhibits a spatial and temporal convergence order close to 2, confirming the theory underlying this method. The numerical simulations demonstrated that the spatial error is more dominant in less refined grids, and the accuracy of the results improves significantly with grid refinement.

**Keywords:** Partial Differential Equations, Finite Difference Method, Crank-Nicholson Method, Convergence, Financial Derivatives, Black-Scholes Equation.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>7</b>
1.1	Objetivos . . . . .	8
1.1.1	Objetivo Geral . . . . .	8
1.1.2	Objetivos Específicos . . . . .	8
1.2	Delimitação do problema de pesquisa . . . . .	9
1.3	Motivação . . . . .	9
1.4	Metodologias . . . . .	10
1.5	Estrutura do Trabalho . . . . .	10
1.6	Conceitos Gerais . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Equações Diferenciais</b>	<b>13</b>
2.1	Classificação das equações diferenciais . . . . .	13
2.1.1	Classificação das equações diferenciais quanto ao numero de variáveis . . . . .	13
2.1.2	Classificação de equações diferenciais quanto a ordem . . . . .	14
2.1.3	Classificação de equações diferenciais quanto linearidade . . . . .	14
2.2	Solução de equação diferencial . . . . .	15
2.3	Métodos Para Resolução de Equações Diferencias . . . . .	17
2.3.1	Métodos Analíticos Para Resolução de Equações Diferencias . . . . .	17
2.3.2	Métodos Numéricos para Resolução de Equações Diferenciais . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Método de diferenças finitas</b>	<b>28</b>
3.1	Discretização do domínio . . . . .	28
3.2	Aproximações Diferenciais . . . . .	29
3.3	Tipos de Métodos de diferenças finitas . . . . .	31
3.3.1	Método Explícito . . . . .	31
3.3.2	Método Implícito . . . . .	32
3.3.3	Método de Crank-Nicolson . . . . .	34
3.4	Análise da Convergência do modelo . . . . .	36
3.4.1	Convergência . . . . .	36
3.4.2	Consistência . . . . .	37
3.4.3	Estabilidade . . . . .	38
3.4.4	Teoremas de Lax . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Derivados Financeiros</b>	<b>44</b>
4.1	Ambientes de negociação . . . . .	45
4.1.1	Mercado de Bolsas . . . . .	45
4.1.2	Mercado de balcão . . . . .	45
4.2	Participantes do mercado de derivativos . . . . .	46
4.2.1	Hedgers . . . . .	46
4.2.2	Especuladores . . . . .	46
4.2.3	Arbitradores . . . . .	46

4.3	Principais instrumentos derivativos . . . . .	47
4.3.1	Contratos a termo . . . . .	47
4.3.2	Contratos futuros . . . . .	48
4.3.3	Swaps . . . . .	49
4.3.4	Opções . . . . .	51
4.3.5	Classificação das opções . . . . .	51
4.3.6	Classificação das opções quanto a relação entre o preço de exercício e o preço atual . . . . .	54
4.3.7	Classificação das opções quanto ao instante de execução: . . . . .	55
4.4	Precificação de Derivados . . . . .	56
4.4.1	Introdução a precificação de derivados . . . . .	56
4.4.2	Factores que afetam o preço de uma opção. . . . .	56
<b>5</b>	<b>Resolução da Equação de Black Scholes Pelo Método de Crank Nicholcon</b>	<b>58</b>
5.1	Problema Modelo . . . . .	58
5.2	Discretização do Modelo . . . . .	59
5.3	Análise de convergência do método . . . . .	62
5.3.1	Consistência . . . . .	62
5.3.2	Estabilidade . . . . .	64
5.3.3	Convergência . . . . .	67
<b>6</b>	<b>Testes Numéricos do Método</b>	<b>68</b>
6.1	Problema modelo com termo fonte . . . . .	68
6.2	Resultados de Aproximação Numérica . . . . .	70
6.2.1	Ordem de Convergência do Método . . . . .	70
6.3	Discussão dos resultados . . . . .	72
<b>7</b>	<b>Conclusão e Recomendações</b>	<b>74</b>
	Referências Bibliográficas . . . . .	76
	Anexos . . . . .	78

# Capítulo 1

## Introdução

O estudo das equações diferenciais teve seu início juntamente com o surgimento do cálculo, desenvolvido por Newton e Leibniz, nos finais do século XVII e é de grande importância para o desenvolvimento da própria matemática e de outras disciplinas transversais. Com o avanço do cálculo diversos problemas nas áreas tais como Física, Química, Biologia, Economia, Engenharias, Matemática Financeira foram modelados matematicamente na forma de equações diferenciais. Por exemplo, no livro [9] faz-se a modelação de opções onde procura-se o preço real da opção pelo modelo de Black e Scholes, no livro [11] destacam-se: a modelação de oscilações envolvendo um sistema massa-mola vertical com um certo alongamento provocado na mola pela colocação da massa quando o sistema está em equilíbrio, a modelação do cálculo de juros onde faz-se um modelo para determinar o saldo obtido na aplicação de uma certa quantia em um banco a uma taxa de variação do investimento proporcional ao saldo em cada instante de tempo, a modelação da lei de resfriamento de Newton onde faz-se um modelo para obter o valor da taxa de perda de calor de um corpo, a modelação da datação de carbono onde faz-se um modelo para determinação da idade concreta de objetos que contenham carbono e a modelagem de problemas de crescimento populacional onde faz-se a modelação da taxa de crescimento populacional supondo que a taxa de crescimento de uma população é proporcional à população presente naquele instante.

As equações diferenciais podem ser resolvidas analiticamente ou numericamente. A resolução analítica consiste em resolver a equação diferencial através dos métodos de integração direta, método de separação, dentre outros, enquanto que a resolução numérica consiste em reduzir o problema contínuo, em um problema discreto, podendo ser resolvido por meio de programas computacionais. Os métodos de resolução analítica de uma equação diferencial ficam restritos a problemas mais simples e para os problemas mais complexos tornam-se difíceis a sua aplicação ou até mesmo impossíveis por conta do seu manuseamento. Enquanto isso, a abordagem numérica é capaz de solucionar (achando soluções aproximadas) as equações com alto nível de complexidade, não havendo restrições a geometrias e processos complicados [28]. Existem diversas metodologias numéricas utilizadas para encontrar a solução de uma equação diferencial. Uma dessas metodologias é o Método de Diferenças Finitas (MDF). A ideia básica deste é transformar o problema de resolver uma equação diferencial num problema de resolver um sistema de equações algébricas, usando para isso aproximações das derivadas que aparecem na equação, por diferenças finitas.

As equações diferenciais desempenham um papel importante na matemática financeira, especialmente na modelagem de fenômenos que variam ao longo do tempo. Esse tipo de modelagem é amplamente utilizado em situações como o crescimento de investimentos, onde as variações no capital podem ser descritas por equações diferenciais que relacionam a taxa de crescimento do capital à sua quantidade atual [2]. Na modelagem de risco, analisa-se e prevê-se o comportamento de ativos financeiros, permitindo determinar o impacto potencial de eventos adversos nas finanças de uma empresa ou investidor [1]. As equações diferenciais parciais desempenham um papel central na mo-

delagem e precificação de derivativos financeiros. Um exemplo notável é o modelo de Black-Scholes, que utiliza esse tipo de equação para determinar o valor teórico de opções. Esse modelo leva em consideração fatores como a volatilidade do ativo subjacente e a taxa de juros, permitindo calcular o valor de opções em mercados financeiros dinâmicos [9].

Os derivados financeiros são instrumentos cujo valor se baseia em ativos subjacentes, como ações, commodities e moedas. Eles surgiram ao longo do tempo como soluções para gerenciar riscos e especular sobre preços. Os primeiros contratos derivados foram os contratos futuros, utilizados no comércio de grãos na antiga Mesopotâmia. Desde então, a evolução dos mercados financeiros levou ao desenvolvimento de diversos tipos de derivados, como opções, swaps e forwards. Esses instrumentos são amplamente utilizados para cobertura contra riscos, especulação e arbitragem. Embora ofereçam oportunidades significativas para gerenciamento de risco e potencial de lucro, também trazem complexidade e riscos, exigindo que os investidores compreendam bem suas características e funcionamento [9].

## 1.1 Objetivos

### 1.1.1 Objetivo Geral

Este trabalho tem como objetivo geral fazer a aplicação dos métodos numéricos para resolução das equações diferenciais com derivadas parciais (EDDPs), aplicando-o a precificação de derivados financeiros

### 1.1.2 Objetivos Específicos

1. Fazer a revisão bibliográfica sobre as equações diferenciais.
2. Apresentar as metodologias numéricas usadas para discretizar uma equação diferencial (ED).
3. Apresentar os métodos usados para analisar a convergência dos métodos numéricos.
4. Aplicar o método de Crank-Nicolson na precificação de uma opção europeia de compra e analisar sua convergência numérica.
5. Fazer a revisão bibliográfica sobre derivados financeiros.
6. Desenvolver o algoritmo do método de Crank-Nicolson em Matlab, realizar testes numéricos e analisar os resultados obtidos.

## 1.2 Delimitação do problema de pesquisa

A maioria dos modelos de equações diferenciais usados na modelação de problemas do quotidiano apresenta uma estrutura tão complexa que impede a sua resolução através de métodos analíticos. Por isso, recorre-se frequentemente a métodos aproximados para encontrar as soluções. Através da análise de convergência afere-se o quanto o esquema de diferença finita usado é próximo da equação discretizada, sobre o acréscimo ou decréscimo dos erros cometidos ao longo dos cálculos e se a solução numérica encontrada é bastante próxima da solução exacta do problema.

As metodologias dos métodos aproximados são definidas em função do tipo e das características da equação diferencial. Na Matemática Financeira, em particular, o cálculo do preço dos derivados financeiros pode ser realizado através do modelo de Black-Scholes [28]. O modelo de Black-Scholes é amplamente empregado na precificação de opções, particularmente as opções europeias, que podem ser exercidas apenas na data de vencimento [9]. Este modelo fornece uma fórmula para calcular o preço teórico dessas opções com base em diversos parâmetros, como o preço do ativo subjacente, o preço de exercício, a taxa de juros livre de risco, o tempo até o vencimento e a volatilidade do ativo. Matematicamente, o modelo de Black-Scholes é uma equação diferencial com derivadas parciais do segundo grau, classificada como hiperbólica. Embora tenha uma solução analítica, tem a fragilidade de não precisar o preço de uma opção. Neste contexto, recorreremos aos métodos numéricos para determinar o preço aproximado da opção e aferir o quão próximo está do preço teórico.

## 1.3 Motivação

A motivação para esta monografia surgiu na busca por compreender de forma abrangente algumas aplicações das equações diferenciais (EDs) em modelação de problemas, principalmente, problemas financeiros. Neste sentido, tornou-se necessário o estudo mais aprofundado das EDs, descrevendo suas propriedades, características e os seus métodos de resolução. Entretanto, nos problemas de aplicação é comum deparar-se com equações diferenciais complexas, cujas soluções analíticas envolvem cálculos bastante complicados ou até mesmo impossíveis de serem efectuadas. Nestes casos, a literatura sugere a aplicação de métodos numéricos para obter-se soluções aproximadas. O objetivo é encontrar uma solução numérica bastante próxima da solução exata do problema, visando sempre diminuir a diferença entre as duas soluções, de tal forma que a aproximação possa ser considerada válida.

Atualmente, existem inúmeras metodologias numéricas utilizadas para obter soluções de equações diferenciais, que podem actuar directa ou indirectamente sobre a equação que modela o problema real. Uma das metodologias mais estudadas e aplicadas neste trabalho é o Método das Diferenças Finitas (MDF), conhecido pela sua simplicidade de aplicação. Dependendo do tipo de equação diferencial em causa, este método permite obter aproximações com um bom nível de precisão.

## 1.4 Metodologias

Para alcançar os objetivos propostos foi primeiro realizada uma revisão bibliográfica sobre os seguintes temas: Equações diferenciais, Diferenças finitas, Derivados Financeiros, e Modelo de Black Scholes para a precificação de ativos.

Para a realização deste estudo, foram utilizados dados e modelos extraídos do manual *Implementing Models in Quantitative Finance*, de Gianluca Fusai e Andrea Roncoroni (p. 144). Essa fonte apresenta exemplos ilustrativos da aplicação de métodos numéricos à precificação de opções no modelo de Black–Scholes, os quais serviram como base para a implementação e análise dos algoritmos utilizados nesta pesquisa.

No decorrer desta pesquisa foram usados diversos manuais, artigos na língua portuguesa e inglesa publicados nas revistas científicas e disponibilizados nas bases de dados como o Google School, Library Genesis, Academia.edu e entre outras fontes. A maior parte dos artigos pesquisados compreendem publicações dos últimos 30 anos.

Para a implementação computacional do método das diferenças finitas, utilizou-se o software MATLAB. O MATLAB é uma linguagem de programação voltada para cálculos numéricos, visualização de dados e simulação de sistemas dinâmicos. Suas funcionalidades incluem a análise estatística, o processamento de sinais, além de integração com outras linguagens e hardware, sendo complementado por toolboxes voltados a diversas áreas do conhecimento.

## 1.5 Estrutura do Trabalho

Esta Monografia está dividido em sete capítulos, cada um abordando aspectos distintos e importantes do estudo das equações diferenciais e suas aplicações, especialmente em Matemática Financeira.

No capítulo 1 apresenta-se o contexto histórico e a importância do estudo das equações diferenciais, destacando as suas aplicações em diversas áreas, como Física, Química, Biologia, Economia e Matemática Financeira, a delimitação do problema, a justificativa, os objetivos e as metodologias usadas para elaborar este trabalho.

No capítulo 2 apresentam-se os conceitos básicos sobre as equações diferenciais, as suas classificações, os métodos analíticos de resolução, alguns exemplos e suas respectivas resoluções detalhadas.

No capítulo 3 faz-se revisão bibliográfica sobre metodologias numéricas, com ênfase nos métodos de diferenças finitas, as técnicas usadas para a aproximações de equações diferenciais e suas aplicações. Neste mesmo capítulo apresentam-se as propriedades de consistência, convergência e estabilidade dos métodos numéricos e o teorema de Equivalência de Lax, que relaciona as propriedades de consistências e estabilidade para garantir a convergência do método numérico.

No Capítulo 4 apresenta-se uma visão abrangente dos derivativos financeiros, abordando suas classificações, os ambientes de negociação e suas principais finalidades no contexto dos mercados financeiros.

No capítulo 5 aplica-se a técnica de Crank-Nicholson num exemplo de precificação de derivativos financeiros e estuda-se a consistência, estabilidade e convergência do método.

No Capítulo 6, avalia-se a precisão do método adotado. Para isso, adiciona-se um termo fonte à

equação principal e implementa-se o algoritmo em MATLAB, com o objetivo de verificar a precisão e a ordem de convergência da técnica de Crank-Nicholson aplicada à equação de Black-Scholes. Ao final do capítulo, discute-se os resultados obtidos e apresentam-se as respectivas conclusões.

No capítulo 7 são apresentadas as conclusões que sintetizam os principais achados e reflexões da pesquisa, destacando os objetivos que foram alcançados, as implicações dos resultados e possíveis recomendações para futuras pesquisas ou práticas.

## 1.6 Conceitos Gerais

Definimos de seguida alguns conceitos que serão usados ao longo da nossa monografia, sendo que foram retirados dos seguintes manuais [1], [3] e [9].

**Definição 1.6.1 (Norma):** Uma norma é uma função que atribui um número real não negativo a cada vector num espaço vectorial, de modo a quantificar o "tamanho" ou "comprimento" desse vector.

Seja  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , a norma de  $\mathbf{x}$ , denotada por  $\|\mathbf{x}\|$ , deve satisfazer as seguintes propriedades:

1. **Positividade:**  $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ , e  $\|\mathbf{x}\| = 0$  se, e somente se,  $\mathbf{x} = 0$ .
2. **Homogeneidade:** Para qualquer escalar  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$ .
3. **Desigualdade triangular:**  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ , para todos os vectores  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ .

**Definição 1.6.2 (Consistência):** A consistência refere-se à capacidade de um método aproximado para reproduzir as equações diferenciais originais à medida que o tamanho do passo ou a resolução do método é reduzida.

**Definição 1.6.3 (Estabilidade):** A estabilidade está relacionada com a capacidade de um método numérico de controlar e não amplificar erros ao longo do processo de aproximação, especialmente à medida que a solução evolui no tempo. Em outras palavras, um método estável garante que os erros iniciais, sejam de arredondamento ou de discretização, não cresçam de forma descontrolada à medida que a solução é calculada, permitindo que o método forneça resultados precisos mesmo após múltiplos passos de cálculo.

**Definição 1.6.4 (Convergência):** Um método é considerado convergente quando a solução numérica se aproxima da solução exacta do problema à medida que o tamanho da malha (ou o passo de discretização) diminui. Ou seja, conforme a resolução do método aumenta (isto é, à medida que a malha se torna mais fina), a solução obtida pelo método numérico aproxima-se da solução exacta do problema, e o erro de aproximação tende para zero.

**Definição 1.6.5 (Grandes Players):** São instituições ou investidores que exercem uma influência significativa num mercado ou sector, particularmente no sector financeiro. Este grupo inclui os bancos de investimento, que prestam serviços como assessoria financeira e mediação de negociações; os fundos de gestão de risco, que adoptam diversas estratégias de investimento para maximizar os retornos; os fundos de pensões, responsáveis por assegurar a aposentação dos seus participantes; os gestores de activos, que administram os investimentos de clientes individuais e institucionais; as empresas de private equity, que adquirem e reestruturam empresas com o objectivo de aumentar o seu valor; e os bancos centrais, que regulam a política monetária e asseguram a estabilidade económica.

**Definição 1.6.6 (Problema bem posto):** Uma equação ou um problema é considerado bem posto quando satisfaz as seguintes condições: existência, unicidade e continuidade.

# Capítulo 2

## Equações Diferenciais

O estudo das equações diferenciais teve seu início juntamente com o surgimento do cálculo, desenvolvido por Newton e Leibniz, nos finais do século XVII, e é de grande importância para o desenvolvimento da própria Matemática e de outras disciplinas transversais. Com o avanço do cálculo, diversos problemas em áreas como Física, Química, Biologia, Economia, Engenharias e Matemática Financeira foram modelados matematicamente na forma de equações diferenciais. Dessa forma, o estudo desse tipo de equações torna-se bastante importante para a nossa monografia. Definimos a seguir alguns conceitos que serão usados ao longo dessa monografia, sendo que foram retiradas dos seguintes manuais [3], [5] e [6].

**Definição 2.1 (Equação Diferencial):** Chamaremos **equação diferencial** a uma equação que envolve derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em ordem a uma ou mais variáveis independentes.

**Exemplos 2.1:**

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - xy \left( \frac{dy}{dx} \right)^4 = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{d^3 v}{dt^3} - 5v \frac{dv}{dt} = \cos(t) \quad (2.2)$$

$$\frac{d^v}{ds} - \frac{dw}{dt} = u - w \quad (2.3)$$

### 2.1 Classificação das equações diferenciais

As equações diferenciais (EDs) podem ser classificadas da seguinte forma: quanto ao número de variáveis independentes, ao número de funções incógnitas, à ordem da derivada mais elevada que nelas figura e à estrutura da equação diferencial (linearidade).

#### 2.1.1 Classificação das equações diferenciais quanto ao número de variáveis

As equações diferenciais podem ser classificadas quanto ao número de variáveis envolvidas, sendo divididas em dois tipos principais:

##### 2.1.1.1 Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs)

As equações diferenciais ordinárias (EDOs) envolvem apenas uma variável independente e as derivadas em relação a essa variável. A função desconhecida depende de uma única variável, e todas as derivadas presentes na equação são ordinárias, não parciais.

**Exemplo 2.2:**

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

Nesta equação diferencial envolve-se a função  $y(x)$  e suas derivadas em relação à variável independente  $x$ .

### 2.1.1.2 Equações Diferenciais Com Derivadas Parciais (EDDPs)

As equações diferenciais parciais (EDDPs) envolvem duas ou mais variáveis independentes. A função desconhecida depende de várias variáveis, e a equação inclui derivadas parciais em relação a essas variáveis.

**Exemplo 2.3:**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Esta é a equação de Laplace, uma equação diferencial parcial de segunda ordem que envolve a função  $u(x, y)$  e suas derivadas parciais em relação às variáveis  $x$  e  $y$ .

## 2.1.2 Classificação de equações diferenciais quanto a ordem

As equações diferenciais podem ser classificadas de acordo com a sua ordem. A ordem de uma equação diferencial é determinada pela maior derivada da função desconhecida presente na equação.

**Exemplos 2.4:**

$$\frac{dy}{dx} + y = e^x \quad (2.4)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} - y = \cos(x) \quad (2.6)$$

Na equação (2.4) a maior derivada de  $y$  é  $\frac{dy}{dx}$ , que é de primeira ordem, na equação (2.5) a maior derivada de  $y$  é  $\frac{d^2y}{dx^2}$ , que é de segunda ordem e na (2.6) a maior derivada de  $y$  é  $\frac{d^3y}{dx^3}$ , que é de terceira ordem.

## 2.1.3 Classificação de equações diferenciais quanto linearidade

A classificação das equações diferenciais quanto à linearidade baseia-se na forma como a função desconhecida (incógnita) e suas derivadas aparecem na equação.

### 2.1.3.1 Equação diferencial linear

Uma **equação diferencial é dita linear** se a função desconhecida  $y(x)$  (ou  $u(x, t)$  no caso de equações diferenciais parciais) e suas derivadas aparecem apenas na primeira potência e não são multiplicadas entre si. Em outras palavras, a equação diferencial é linear se ela pode ser escrita na forma geral:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \quad (2.7)$$

onde:

1.  $y = y(x)$  é a função desconhecida.
2.  $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_0(x)$  são coeficientes que podem ser funções de  $x$ , mas não dependem de  $y$  ou de suas derivadas.
3.  $g(x)$  é uma função conhecida que pode depender de  $x$ , mas não de  $y$  ou de suas derivadas.

### Exemplos 2.5:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^x \quad (2.8)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (2.9)$$

A Primeira equação é considerada **linear** porque a função desconhecida  $y(x)$  e suas derivadas,  $\frac{dy}{dx}$  e  $\frac{d^2y}{dx^2}$ , aparecem apenas na primeira potência. Além disso, essas funções não estão multiplicadas entre si, nem são elevadas a qualquer potência maior que 1 e a segunda é linear porque a função desconhecida  $x(t)$  e suas derivadas aparecem apenas na primeira potência e não estão multiplicadas entre si. Em outras palavras, todos os termos que envolvem  $x(t)$ ,  $\frac{dx}{dt}$ , e  $\frac{d^2x}{dt^2}$  são lineares.

#### 2.1.3.2 Equação diferencial não linear

Uma **equação diferencial é dita não linear** se a função desconhecida  $y(x)$  ou suas derivadas aparecem em potências diferentes de 1, multiplicadas entre si, ou envolvidas em funções não lineares (como seno, cosseno, exponencial). A forma geral de uma equação diferencial não linear não pode ser expressa como uma combinação linear das derivadas da função desconhecida.

### Exemplos 2.6:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = \cos(x) \quad (2.10)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + x^2 = 0 \quad (2.11)$$

Na equação (2.10) temos que o termo  $y \left( \frac{dy}{dx} \right)^2$  torna a equação não linear porque há uma multiplicação entre a função  $y$  e a sua derivada, e a derivada está elevada ao quadrado e na equação (2.11), a equação é não linear devido ao termo  $x^2$ , este termo representa uma não linearidade, pois a função desconhecida  $x(t)$  aparece elevada ao quadrado.

Em equações diferenciais lineares, todos os termos envolvendo a função desconhecida e suas derivadas devem ser de primeira potência.

## 2.2 Solução de equação diferencial

Uma solução de uma equação diferencial é uma função que a satisfaz, ou seja, ao ser substituída na equação, resulta em uma identidade verdadeira. As soluções podem ser gerais, envolvendo constantes arbitrárias, ou particulares, que atendem a condições iniciais específicas.

**Exemplo 2.7:** Sejam as seguintes equações diferenciais abaixo:

$$\frac{dy}{dx} - 2x = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{dy}{dx} + y = x(x + 2) \quad (2.13)$$

A função  $y = x^2 + c$  é a solução da equação diferencial dada (2.12) porque derivando a solução e substituindo na equação diferencial, verifica-se a equação.

$$\frac{dy}{dx} - 2x = 0 \leftrightarrow \frac{d(x^2)}{dx} - 2x = 0 \leftrightarrow 2x - 2x = 0$$

A relação (curva)  $y(x) = x^2$  é uma solução (explícita) da equação diferencial (2.13) porque uma vez que substituindo  $y$  por  $x^2$  na equação precedente se obtém uma identidade.

$$\frac{dy}{dx} + y = x(x + 2) \leftrightarrow \frac{d(x^2)}{dx} + x^2 = x(x + 2) \leftrightarrow 2x + x^2 = x(x + 2)$$

A relação diz-se explícita se é da forma  $y = f(x)$ , por exemplo  $y = x + 1$ , dizendo-se implícita se é da forma  $g(x, y) = 0$ , por exemplo  $y^2 - x^2 + 4 = 0$ .

## Tipos de Solução

Existem três tipos principais de soluções, que são a Solução Geral, Solução Particular e Solução Singular.

1. **Solução Geral** A solução geral de uma equação diferencial (ED) é aquela que contém todas as soluções possíveis e, geralmente, inclui constantes arbitrárias que podem ser determinadas por condições iniciais ou de contorno. Geometricamente, esse tipo de solução representa uma família de curvas dependentes do parâmetro  $C$ .

Exemplo 2.8:  $y = x^2 + c$  é solução geral da equação (2.12)

2. **Solução Particular**

A solução particular de uma ED é toda a solução obtida atribuindo-se valores às constantes arbitrárias da solução geral. Este tipo de solução é também representada por uma família de curvas chamadas curvas integrais, dependendo do valor do parâmetro  $C$ .

Pegando a solução geral da equação (2.12) e substituindo as variáveis  $x$  e  $y$  pelas condições iniciais  $x = 1$  e  $y = 2$  respectivamente teremos:

$$\begin{aligned} y(1) &= 2 \\ 2 &= 1^2 + C \rightarrow C = 1 \end{aligned}$$

como a constante arbitraria  $C=1$ , a solução particular para a condição dada assumirá a seguinte forma:  $y = x^2 + 1$ .

3. **Solução Singular**

A solução singular de uma equação diferencial (ED) é aquela que não pode ser obtida a partir da solução geral, sendo presente apenas em certos tipos de equações.

Exemplo 2.9: Seja a equação diferencial abaixo:

$$\frac{dy}{dx} = x\sqrt{y}$$

A sua solução geral é dada pela expressão  $y = (\frac{1}{4}x^2 + c)^2$ . Note que, para  $y = 0$ , obtemos uma solução singular, pois não há nenhuma forma de atribuir alguma constante em  $y = (\frac{1}{4}x^2 + c)^2$  de tal forma que se torne  $y = 0$ .

## 2.3 Métodos Para Resolução de Equações Diferenciais

Existem dois tipos de métodos de resolução de equações diferenciais, que são os métodos analíticos e os numéricos. Os métodos analíticos são técnicas que fornecem soluções exatas e explícitas para equações diferenciais, utilizando ferramentas matemáticas como álgebra, cálculo e transformadas e os métodos numéricos são técnicas matemáticas e computacionais empregadas para resolver problemas que são difíceis ou impossíveis de solucionar analiticamente [5].

### 2.3.1 Métodos Analíticos Para Resolução de Equações Diferenciais

#### 2.3.1.1 Métodos Analíticos Para Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias

As equações diferenciais ordinárias (EDOs) podem ser resolvidas por vários métodos, dependendo do tipo e da complexidade da equação. Geralmente, utilizam-se os métodos de separação de variáveis, fator integrante, equação característica e transformada de Laplace para obter a solução de uma equação diferencial ordinária (EDO).

##### 1. Método de separação de variáveis

O método de separação de variáveis é uma técnica amplamente utilizada para resolver equações diferenciais. Este método separa as variáveis em diferentes funções independentes e integram-se ambos os membros.

**Exemplo 2.10:** Seja dada a seguinte EDO:

$$\frac{dy}{dx} = xy \tag{2.14}$$

Para resolver a EDO (2.14) recorreremos a separação de variáveis, onde, multiplicamos ambos os membros por  $dx$  e dividimos ambos os membros por  $y$ , obtendo a seguinte expressão:

$$\frac{dy}{y} = x dx$$

Integra-se ambos lados e obtém-se a seguinte expressão resultante:

$$\ln |y| = \frac{x^2}{2} + C$$

E por fim isola-se o  $y$  obtendo-se a seguinte solução:

$$y = e^{\frac{x^2}{2} + C}$$

## 2. Método do Fator Integrante

O método do fator integrante é uma técnica geralmente usada para resolver EDOs lineares de primeira ordem da seguinte forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (2.15)$$

onde, o objetivo deste método é encontrar uma função, chamada de "fator integrante", que simplificará a equação diferencial de forma que possa ser resolvida por integração direta. O fator integrante é uma função dada pela seguinte expressão:

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx} \quad (2.16)$$

que será multiplicada a toda equação diferencial original. Após as operações de multiplicação e simplificação de alguns termos, integramos ambos os lados da expressão e isolamos a variável  $y$  para obter a função solução.

**Exemplo 2.11:** Consideremos a seguinte equação diferencial ordinária:

$$\frac{dy}{dx} + 2y = e^x \quad (2.17)$$

Primeiro, identificamos as funções  $P(x)$  e  $Q(x)$ . Comparando com a forma geral (2.15), temos:

$$P(x) = 2 \quad \text{e} \quad Q(x) = e^x$$

Em seguida, determinamos o fator integrante  $\mu(x)$ , dado por:

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx}$$

Calculamos  $\int P(x) dx$ :

$$\int P(x) dx = \int 2 dx = 2x$$

Portanto, o fator integrante é:

$$\mu(x) = e^{2x}$$

Multiplicamos ambos os lados da EDO pelo fator integrante  $\mu(x)$ :

$$e^{2x} \frac{dy}{dx} + e^{2x} \cdot 2y = e^{2x} \cdot e^x$$

Simplificando o lado direito:

$$e^{2x} \cdot e^x = e^{3x}$$

A equação diferencial se reescreve como:

$$e^{2x} \frac{dy}{dx} + 2e^{2x}y = e^{3x}$$

Observamos que o lado esquerdo corresponde à derivada do produto  $\mu(x)y$ :

$$\frac{d}{dx} (e^{2x}y) = e^{3x}$$

Integramos ambos os lados em relação a  $x$ :

$$\int \frac{d}{dx} (e^{2x}y) dx = \int e^{3x} dx$$

A integral à esquerda é simplesmente:

$$e^{2x}y$$

Para a integral à direita:

$$\int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3}$$

Assim, temos:

$$e^{2x}y = \frac{e^{3x}}{3} + C$$

Isolamos  $y$  dividindo ambos os lados por  $e^{2x}$ :

$$y = \frac{\frac{e^{3x}}{3} + C}{e^{2x}}$$

Simplificando:

$$y = \frac{e^{3x}}{3e^{2x}} + \frac{C}{e^{2x}}$$

$$y = \frac{e^x}{3} + Ce^{-2x}$$

Portanto, a solução geral da equação diferencial  $\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$  é:

$$y = \frac{e^x}{3} + Ce^{-2x}$$

onde  $C$  é uma constante arbitrária, que pode ser determinada a partir de condições iniciais, se fornecidas.

### 3. Método da Equação Característica

O método da equação característica é utilizado para resolver equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes. Consideremos a equação diferencial ordinária (EDO) da forma:

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{2.18}$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes.

Para resolver a EDO (2.18), substituímos  $y$  por  $e^{rt}$ , onde  $r$  é uma constante a ser determinada. Com isso, temos:

$$y = e^{rt}$$

Cujo as derivadas são:

$$\begin{aligned}y' &= re^{rt} \\y'' &= r^2e^{rt}\end{aligned}$$

Substituindo  $y$ ,  $y'$  e  $y''$  na equação diferencial original temos a seguinte expressão:

$$a(r^2e^{rt}) + b(re^{rt}) + c(e^{rt}) = 0$$

Fatorando  $e^{rt}$  (que nunca é zero), obtemos a **equação característica**:

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{2.19}$$

A equação característica é uma equação quadrática em  $r$ , que pode ser resolvida pela seguinte forma:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2.20}$$

Os valores de  $r$  são as raízes da equação característica e determinam a forma geral da solução da EDO.

Dependendo das raízes da equação característica, a solução geral têm:

- **Raízes Reais e Distintas**

Se as raízes  $r_1$  e  $r_2$  são reais e distintas, a solução geral é:

$$y(t) = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t} \tag{2.21}$$

- **Raízes Reais e Iguais**

Se a equação característica tem uma raiz real dupla  $r_1 = r_2$ , a solução é:

$$y(t) = (C_1 + C_2t)e^{r_1t} \tag{2.22}$$

- **Raízes Complexas Conjugadas**

Se as raízes são complexas conjugadas  $r = \alpha \pm \beta i$ , a solução geral é:

$$y(t) = e^{\alpha t} (C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)) \tag{2.23}$$

### Exemplo 2.12:

Neste exemplo, resolvera-se a equação diferencial ordinária (EDO) de segunda ordem com coeficientes constantes:

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \tag{2.24}$$

Primeiro substituí-se  $y$  por  $e^{rt}$ , onde  $r$  é uma constante a ser determinada. Calcula-se as derivadas de  $y$ :

$$\begin{aligned}y &= e^{rt} \\y' &= re^{rt} \\y'' &= r^2e^{rt}\end{aligned}$$

Substituindo estas derivadas na EDO original, obtemos:

$$y'' - 4y' + 4y = r^2e^{rt} - 4re^{rt} + 4e^{rt} = 0$$

Faturando  $e^{rt}$  (que nunca é zero), e obtém-se a seguinte **equação característica**:

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \tag{2.25}$$

Para resolver-se a equação característica, utiliza-se a fórmula quadrática (2.20). Neste caso,  $a = 1$ ,  $b = -4$ , e  $c = 4$ . Substituído estes valores, tem-se que:

$$r = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$

e fazendo operações matemáticas básicas obtemos o seguinte valor para o  $r$ :

$$r = 2$$

Portanto, a equação característica tem uma raiz dupla  $r = 2$ . Como a equação característica tem uma raiz real dupla  $r = 2$ , então a solução geral da EDO é dada por:

$$y(t) = (C_1 + C_2t)e^{2t} \tag{2.26}$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes determinadas pelas condições iniciais, se fornecidas.

$$y(t) = (1 - 2t)e^{2t} \tag{2.27}$$

#### 4. Método de Transformadas de Laplace

O método de transformadas de Laplace é tipicamente usado para resolver equações diferenciais ordinárias (EDOs), especialmente aquelas com condições iniciais.

**Exemplo 2.12:** Resolva a equação diferencial ordinária

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 0 \tag{2.28}$$

com as condições iniciais  $y(0) = 1$  e  $\frac{dy}{dx}(0) = 0$ .

Para resolver a equação (2.28), aplicamos a **Transformada de Laplace**, que é uma ferramenta poderosa na solução de equações diferenciais lineares, especialmente quando há condições iniciais envolvidas. O procedimento segue os passos abaixo:

(a) **Aplicação da Transformada de Laplace**

Aplicamos a transformada de Laplace  $\mathcal{L}$  em ambos os lados da equação diferencial:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dx^2}\right\} - 4\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{0\}$$

Utilizando a propriedade da transformada de Laplace para derivadas:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dx^2}\right\} = s^2Y(s) - sy(0) - \frac{dy}{dx}(0),$$

onde  $Y(s)$  representa a transformada de Laplace da função  $y(x)$ . Substituímos os valores das condições iniciais  $y(0) = 1$  e  $\frac{dy}{dx}(0) = 0$ :

$$s^2Y(s) - s \cdot 1 - 0 - 4Y(s) = 0$$

Simplificamos a equação:

$$(s^2 - 4)Y(s) = s$$

Resolvendo para  $Y(s)$ :

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 - 4}$$

(b) **Transformada Inversa de Laplace**

Agora, devemos calcular a transformada inversa de Laplace para encontrar  $y(x)$ . Para isso, decompomos a fração em frações parciais:

$$\frac{s}{s^2 - 4} = \frac{s}{(s - 2)(s + 2)}$$

Assumimos que pode ser escrita na forma:

$$\frac{s}{(s - 2)(s + 2)} = \frac{A}{s - 2} + \frac{B}{s + 2}$$

Multiplicamos ambos os lados da equação pelo denominador comum  $(s - 2)(s + 2)$ , obtendo:

$$s = A(s + 2) + B(s - 2)$$

Expandimos os termos do lado direito:

$$s = As + 2A + Bs - 2B$$

Agrupamos os termos semelhantes:

$$s = (A + B)s + (2A - 2B)$$

Comparando os coeficientes de  $s$  e os termos constantes, obtemos o sistema:

$$A + B = 1$$

$$2A - 2B = 0$$

Resolvemos o sistema da segunda equação, isolamos  $A$ :

$$A = B$$

Substituímos na primeira equação:

$$B + B = 1 \Rightarrow 2B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

Como  $A = B$ , então:

$$A = \frac{1}{2}$$

Assim, a decomposição em frações parciais fica:

$$Y(s) = \frac{1/2}{s-2} - \frac{1/2}{s+2}$$

Agora, aplicamos a transformada inversa de Laplace, usando a propriedade:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-a} \right\} = e^{ax}$$

Isso nos dá:

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}$$

Portanto, a solução da equação diferencial com as condições iniciais é:

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}$$

Esta solução representa uma combinação linear de exponenciais, o que é típico para equações diferenciais lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes.

### 2.3.1.2 Método Analítico para Resolução de Equações Diferenciais com Derivadas Parciais

Existem vários métodos analíticos para resolver as equações diferenciais com derivadas parciais, dentre os quais iremos destacar os seguintes métodos:

#### 1. Método de Separação de Variáveis

O método de separação de variáveis baseia-se na suposição de que a solução da EDP pode ser escrita como o produto de funções, cada uma dependendo de uma única variável. O objetivo é transformar a EDDP em uma ou mais equações diferenciais ordinárias (EDOs), que podem ser resolvidas individualmente.

**Exemplo 2.13:** Resolva a equação diferencial parcial (EDP)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.29)$$

com as condições de contorno  $u(0, t) = 0$ ,  $u(L, t) = 0$  e condição inicial  $u(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ .

Para resolver a equação diferencial parcial (2.29), iremos primeiro assumir uma solução separável: Suponha que a solução  $u(x, t)$  pode ser escrita como o produto de duas funções, uma dependente de  $x$  e outra de  $t$ :

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (2.30)$$

segundo, substituir a expressão (2.30) na EDP (2.29), onde ficamos com a seguinte expressão

$$X(x) \frac{dT(t)}{dt} = T(t) \frac{d^2 X(x)}{dx^2}$$

dividindo ambos os lados por  $X(x)T(t)$ :

$$\frac{1}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt} = \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -\lambda$$

onde,  $-\lambda$  é uma constante separada, conhecida como o parâmetro de separação.

e resolvemos as ODEs resultantes:

- Para  $T(t)$ :

$$\frac{dT(t)}{dt} = -\lambda T(t)$$

A solução geral é:

$$T(t) = e^{-\lambda t}$$

- Para  $X(x)$ :

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -\lambda X(x)$$

Esta é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem. A solução geral depende do valor de  $\lambda$ :

- Se  $\lambda = k^2$ , a solução é:

$$X(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx)$$

Aplicando as condições  $u(0, t) = 0$  e  $u(L, t) = 0$ :

- Para  $x = 0$ :

$$X(0) = A \sin(0) + B \cos(0) = B = 0$$

Portanto,  $X(x) = A \sin(kx)$ .

- Para  $x = L$ :

$$X(L) = A \sin(kL) = 0$$

Para que a função  $\sin(kL)$  seja zero,  $kL$  deve ser múltiplo de  $\pi$ :

$$k = \frac{n\pi}{L}$$

onde  $n$  é um número inteiro positivo.

Com a condição inicial  $u(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ , temos  $A = 1$  e:

$$u(x, t) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 t}$$

## 2. Método das Transformadas de Fourier

O Método das transformadas de Fourier é usado para resolver EDDPs, especialmente em domínios infinitos ou periódicos. Esse método converte a EDDP em uma equação diferencial ordinária, que é mais fácil de resolver.

**Exemplo 2.13 :** Consideremos a seguinte equação do calor :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

com condição inicial  $u(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ .

Para resolvermos essa equação aplicamos os seguintes passos:

### 1. Aplicar a Transformada de Fourier

Aplicamos a transformada de Fourier na equação do calor:

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \right\} = \alpha \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\}$$

usando a propriedade da transformada de Fourier para derivadas:

$$\frac{\partial \hat{u}(k, t)}{\partial t} = -\alpha k^2 \hat{u}(k, t)$$

a solução para  $\hat{u}(k, t)$  é:

$$\hat{u}(k, t) = \hat{u}(k, 0) e^{-\alpha k^2 t}$$

### 2. Aplicar a condição inicial

A condição inicial  $u(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$  leva à transformada de Fourier:

$$\hat{u}(k, 0) = \frac{L}{2} \left[ \delta\left(k - \frac{\pi}{L}\right) - \delta\left(k + \frac{\pi}{L}\right) \right]$$

### 3. Transformada Inversa de Fourier

Usando a transformada inversa de Fourier para recuperar  $u(x, t)$ :

$$u(x, t) = \frac{L}{2} \left[ e^{-\alpha \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right]$$

Assim:

$$u(x, t) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) e^{-\alpha \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 t}$$

## 2.3.2 Métodos Numéricos para Resolução de Equações Diferenciais

Métodos numéricos são técnicas matemáticas e computacionais usadas para resolver problemas que são difíceis ou impossíveis de resolver analiticamente. Estes métodos são amplamente utilizados em várias áreas da ciência e engenharia para encontrar soluções aproximadas para problemas matemáticos complexos.

### 2.3.2.1 Métodos Numéricos Para a Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias

Para se resolver numericamente as Equações Diferenciais Ordinárias recorreremos aos Métodos de Euler, Método de Runge-Kutta e aos Métodos de Adams-Bashforth e Adams-Moulton que definimos abaixo.

#### 1. Método de Euler

O método de Euler aproxima a solução de uma EDO passo a passo, usando a derivada para prever o valor da função no próximo ponto.

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

Onde:  $y_n$  é a aproximação da solução no ponto  $x_n$ ,  $h$  é o tamanho do passo e  $f(x_n, y_n)$  é a derivada de  $y$  avaliada em  $x_n$ .

#### 2. Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem (RK4)

O método de Runge-Kutta de quarta ordem é amplamente utilizado devido à sua precisão e estabilidade [5]. Este método avalia a função em quatro pontos intermediários, proporcionando uma aproximação mais precisa da solução. E a solução aproximada é obtida usando a seguinte expressão.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Onde:  $k_1 = f(x_n, y_n)$ ,  $k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1)$ ,  $k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2)$  e  $k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$ .

#### 3. Método de Adams-Bashforth e Adams-Moulton

Os métodos de Adams-Bashforth e Adams-Moulton fazem parte da classe de métodos multistep lineares, usados para resolver equações diferenciais ordinárias (EDOs) da forma:

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

O método de Adams-Bashforth é um método explícito que utiliza valores previamente calculados para estimar a solução no próximo ponto. Esse método é baseado na fórmula de integração de interpolação de Newton e usa o valor da função derivada  $f(t, y)$  em pontos anteriores e o método de Adams-Moulton é um método implícito, o que significa que a estimativa no próximo ponto depende tanto dos valores já calculados quanto do valor da função derivada no próprio ponto a ser calculado. Isso torna o método mais estável e preciso, especialmente em equações rígidas.

### 2.3.2.2 Métodos Numéricos para Equações Diferenciais com Derivadas Parciais (EDDPs)

Métodos numéricos para EDDPs geralmente discretizam tanto as variáveis em função do tempo quanto em função do espaço, transformando o problema contínuo em um problema discreto.

#### 1. Método das Diferenças Finitas

O método das diferenças finitas é uma das abordagens mais comuns para resolver equações diferenciais parciais (EDPs). Este método se baseia na substituição das derivadas parciais por aproximações que envolvem valores da função em pontos discretos, transformando assim o problema contínuo em um sistema que pode ser resolvido numericamente [27].

## 2. Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma técnica numérica que discretiza um domínio contínuo em pequenos elementos (triângulos ou quadrados) para resolver problemas. Ele envolve a aproximação da solução dentro de cada elemento por funções de base, a aplicação de equações locais, a montagem de um sistema global de equações e a aplicação de condições de contorno. Após resolver o sistema usando métodos numéricos, os resultados são processados para obter variáveis como tensões e deformações. O MEF é flexível para geometrias complexas e aplicável em diversas áreas, embora sua complexidade e o alto custo computacional possam ser desvantagens [31].

## 3. Método dos Volumes Finitos

O Método dos Volumes Finitos é uma técnica amplamente utilizada para resolver equações diferenciais parciais, especialmente em problemas de conservação de quantidades físicas, como massa e energia. Ele consiste em dividir o domínio em pequenos volumes de controle, onde se aplica o princípio de conservação, relacionando a variação da quantidade conservada dentro do volume à diferença entre os fluxos que entram e saem dele. Os fluxos são aproximados usando valores discretos nas superfícies adjacentes, resultando em um sistema de equações que é resolvido numericamente. Essa abordagem é especialmente útil para simulações em geometrias complexas e em situações onde as condições de contorno e interações de fluxos são críticas [30].

# Capítulo 3

## Método de diferenças finitas

Neste capítulo, apresentamos os conceitos sobre o método das diferenças finitas, amplamente utilizado na resolução de equações diferenciais. Começaremos com uma visão geral dos conceitos básicos, a formulação geral dos métodos de diferenças finitas, as suas principais características e aplicações. De seguida, detalharemos os métodos explícito e implícito. E, por fim, abordaremos o método de Crank-Nicolson, que combina aspectos dos dois métodos anteriores. A maioria das definições utilizadas neste resumo foi retirada das seguintes obras: [12], [16] e [22].

O método das diferenças finitas consiste em resolver equações diferenciais de domínio contínuo, transformando-as em pontos discretos. Ou seja, este método aproxima a derivada de uma função por expressões (fórmulas) discretas, calculadas apenas num conjunto finito de pares ordenados, que são  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ , onde  $y_i = f(x_i)$ , sendo  $i = 1, \dots, n$ . Estas fórmulas podem ser obtidas de várias maneiras, sendo que a forma mais simples consiste em utilizar os recursos básicos do cálculo diferencial.

### 3.1 Discretização do domínio

O primeiro passo de qualquer método numérico na resolução de E.D.s consiste em discretizar a região onde se procura a solução. A discretização consiste em dividir o domínio de cálculo em um certo número de subdomínios. Para tal, define-se uma malha, na qual se estipulam os pontos que delimitam os subdomínios, os quais, no caso de um domínio finito, são em número igual a  $(J + 1)$ .

Seja o intervalo  $[a, b]$ . Discretizamos  $x \in \mathbb{R}$  introduzindo uma malha unidimensional de pontos discretos  $x_i$ , e dividimos o domínio em

$$\dots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \dots$$

partições. Por uma questão de simplicidade, considerar-se-á uma partição uniforme, ou seja, tal que  $h = x_{i+1} - x_i$ , com  $i = 0, 1, \dots, n$ , conforme ilustrado na Figura (3.1).

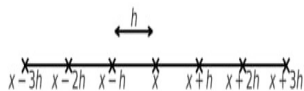


Figura 3.1: Malha Unidimensional

Para discretizar o domínio em  $\mathbb{R}^2$ , Inicialmente iremos discretizar a variável  $x$ . Consideremos o intervalo  $[a,b]$  na variável espacial  $x$ , escolhemos um inteiro positivo  $n$  e dividimos o intervalo  $[a,b]$  em  $n+1$  partes, sendo  $h$  o comprimento adotado na malha e obtemos  $n + 1$  pontos e cujos extremos são os pontos da malha  $x_i = a + ih$ , sendo  $i = 0, 1, \dots, n$ . De forma análoga, dividimos o intervalo  $[c,d]$  da variável temporal  $t$ , em  $m+1$  partes iguais de comprimento  $k$ , obtendo  $m + 1$  pontos e cujos extremos são os pontos da malha  $t_j = c + jk$ , sendo  $j = 0, 1, \dots, m$ .

Nos pontos  $(x_i, t_j)$  vamos obter as aproximações, e qualquer ponto  $(x_i, y_i)$  ficará representado na malha por  $(i, j)$  e os vizinhos a esse ponto vem representados por  $(i \pm 1, j \pm 1)$  conforme ilustrado na (figura 3.2).

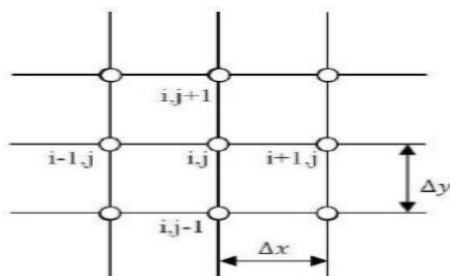


Figura 3.2: Malha Bidimensional

Uma vez efetuada a discretização do domínio do problema, aplica-se o Método das Diferenças Finitas para a determinação das incógnitas e, as derivadas que aparecem na equação original são substituídas (ou aproximadas) por fórmulas discretas de diferenças. A aplicação dessas fórmulas aos pontos do domínio discretizado gera um sistema de equações algébricas, cuja solução fornece os valores das incógnitas do problema nesses pontos discretos.

### 3.2 Aproximações Diferenciais

Como visto na secção anterior, um dos passos necessários na resolução de equações diferenciais por diferenças finitas é a aproximação das derivadas presentes nestas equações, aplicadas a um dado ponto arbitrário,  $x_j$  ou  $t_j$ . Uma maneira simples de se obter estas aproximações é através do uso da expansão de uma função em série de Taylor em torno de um dado ponto. Portanto seja  $x_j$  este um ponto base, podemos escrever o valor de  $f(x_{j+1}) = f_{j+1}$ , pela seguinte série infinita

$$f_{j+1} = f_j + f'_j(x_{j+1} - x_j) + f''_j \frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{2} + f'''_j \frac{(x_{j+1} - x_j)^3}{3!} + f^{(4)}_j \frac{(x_{j+1} - x_j)^4}{4!} + \dots \quad (3.1)$$

enquanto que o valor de  $f(x_{j-1}) = f_{j-1}$  é dado por :

$$f_{j-1} = f_j - f'_j(x_j - x_{j+1}) + f''_j \frac{(x_j - x_{j+1})^2}{2} + f'''_j \frac{(x_j - x_{j+1})^3}{3!} + f^{(4)}_j \frac{(x_j - x_{j+1})^4}{4!} - \dots \quad (3.2)$$

Considere, agora, a necessidade de se aproximar o valor de  $f_j$ , o que será feito utilizando as Equações (3.25) e (3.26). Estas equações podem ser escritas de forma mais compacta através da definição do comprimento do domínio  $j$

$$h = x_j - x_{j+1} \quad (3.3)$$

Desta forma, multiplicando-se a Equação (3.25) por  $h_{j+1}^2$  e diminuindo o resultado da Equação (3.26) multiplicada por  $h_j^2$ , obtemos a seguinte expressão, onde o  $f_j$  foi eliminado

$$\begin{aligned} h_j^2 f_{j+1} - h_{j+1}^2 f_{j-1} &= (h_j^2 h_{j+1}^2) f_j + (h_j^2 h_{j+1} + h_j h_{j+1}^2) f_j' + f_j''' \frac{(h_j^2 h_{j+1}^3 + h_j^3 h_{j+1}^2)}{3!} \\ &\quad + f_j \frac{(h_j^2 h_{j+1}^4 - h_j^4 h_{j+1}^2)}{4!} + \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

que permite escrever uma aproximação para  $f_j$  por

$$f_j' = \frac{h_j^2 f_{j+1} + (h_{j+1}^2 - h_j^2) f_j - h_{j+1}^2 f_{j-1}}{h_j^2 h_{j+1} + h_j h_{j+1}^2} + O\left(\frac{h_j^2 h_{j+1}^3 + h_j^3 h_{j+1}^2}{h_j^2 h_{j+1} + h_j h_{j+1}^2}\right) \quad (3.5)$$

Onde  $O(z)$  indica que a aproximação tem ordem de grandeza de  $z$ , isto é, o valor da derivada da função no ponto considerado é obtido a partir da expressão aproximada, no limite quando  $z \rightarrow 0$ . Esta ordem de grandeza é oriunda do termo de menor ordem (ou primeiro termo) entre aqueles que envolvem as derivadas de maior ordem. O conjunto destes termos, ou a sua forma simplificada de representação por ordem de grandeza, é denominado de erro de truncamento.

Para uma malha uniforme

$$h_j = h, \quad \forall j$$

de modo que a aproximação dada pela Equação (5.33) é simplifica para

$$f_j' = \frac{f_{j+1} - f_{j-1}}{2h} + O(h^2) \quad (3.6)$$

que é a chamada aproximação por diferença central da derivada primeira de  $y$ .

Podemos, ainda, usar as Equações (3.26) e (3.25), para obter mais duas aproximações para a primeira derivada de  $y$ , que para uma malha uniforme são dadas por

$$f_j' = \frac{f_j - f_{j-1}}{h} + O(h) \quad (3.7)$$

que é obtida a partir da Equação (3.25), sendo chamada de aproximação por diferença para trás (“backward differentiation”), e

$$f_j' = \frac{f_{j+1} - f_j}{h} + O(h) \quad (3.8)$$

que é obtida a partir da Equação (3.26), sendo chamada de aproximação por diferença para frente (“forward differentiation”).

As Equações (3.25) e (3.26) podem ser utilizadas para obter uma aproximação para  $f_j''$  se as mesmas forem combinadas de modo a eliminar o termo em  $f_j'$ . Assim, multiplicando a Equação (3.25) por  $h_j$  e somando o resultado à Equação (3.26) multiplicada por  $h_{j+1}$ , obtém-se

$$f_j'' = \frac{h_j f_{j+1} - (h_j + h_{j+1})y_j + h_{j+1} f_{j-1}}{h_{j+1} h_j \frac{h_{j+1} + h_j}{2}} + f_j''' \frac{2 h_{j+1}^2 - h_j^2}{3! h_{j+1} + h_j} - f^{(4)} \frac{2 h_{j+1}^3 - h_j^3}{4! h_{j+1} + h_j} + \dots \quad (3.9)$$

O segundo termo do lado esquerdo da Equação (3.30) é da ordem de  $h_{j+1} - h_j$ , que se anula para malhas uniformes, para as quais a aproximação simplifica para

$$f_j' = \frac{f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}}{h^2} + O(h^2) \quad (3.10)$$

que é a chamada aproximação por diferenças centrais de segunda derivada de  $f$ .

### 3.3 Tipos de Métodos de diferenças finitas

Existem vários tipos de Método de Diferenças Finitas para a resolução de equações diferenciais. Para o estudo em causa irei me restringir aos seguintes: Método Explícito, Método Implícito e Método de Crank-Nicolson.

#### 3.3.1 Método Explícito

Para definir os métodos em estudo usaremos o modelo fundamental das equações parabólicas que é a equação do calor. A equação de calor ou difusão de calor é de extrema importância na Matemática e em vários outros campos científicos. Na estatística, a equação do calor esta vinculada com o estudo do movimento Browniano através da equação de Fokker-Planck, em probabilidade é usada para descrever passeios aleatórios e na Matemática Financeira usa-se este tipo de equações para a modelação de opções (Títulos) [21]. Podemos encontrar mais aplicações e modelações de problemas pela equação do calor na Matemática Financeira nos seguintes livros: [22], [33] e [18].

Seja a equação do calor dada pela seguinte forma:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (3.11)$$

com  $a(x, t) > 0$ ,  $0 \leq x \leq L$ ,  $0 < t < T$ , sujeita à condição inicial  $f(x, 0) = \psi(x)$ , e às condições de fronteira  $f(0, t) = f(t)$  e  $f(L, t) = g(t)$ .

O método explícito consiste em aproximar as derivadas temporal e espacial por derivadas progressiva e central respetivamente, ou seja, usa as diferenças centradas de segunda ordem na variável espacial para aproximar a derivada de segunda ordem e diferenças progressivas no tempo para aproximar a derivada de primeira ordem.

A derivada de segunda ordem no espaço pode ser aproximação pela diferença central de segunda ordem da seguinte maneira:

$$\frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (3.12)$$

e a primeira derivada em função do tempo pode ser aproximada utilizando a diferença progressiva, da seguinte forma:

$$\frac{\partial f_{i,j}}{\partial t} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (3.13)$$

substituído as expressões (3.12) e (3.13) em (3.11) e descartando os termos de erro obtemos à equação:

$$\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta t} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta x^2} \quad (3.14)$$

e resolvendo para  $f_{i,j+1}$  obtemos:

$$f_{i,j+1} = f_{i,j} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}). \quad (3.15)$$

seja  $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$  (a relação entre os espaçamentos da malha) e o método numérico explícito (15) terá a seguinte forma compacta:

$$f_{i,j+1} = \lambda f_{i-1,j} + (1 - 2\lambda)f_{i,j} + \lambda f_{i+1,j} \quad (3.16)$$

Veja que, a equação (3.16) e a Figura 3 sugerem uma avaliação organizada por níveis de tempo e conhecidos os valores  $f_{i-1,j}, f_{i,j}$  e  $f_{i+1,j}$  calculamos  $f_{i,j+1}$  conforme a Figura 3. Esta Figura nos mostra graficamente como acontece a dependência e o cálculo de um determinado ponto. No método explícito, o ponto  $(i, j + 1)$  depende dos pontos  $(i - 1, j), (i, j)$  e  $(i + 1, j)$ , todos do nível anterior e daí a palavra explícito. Na figura 3 é possível notar que, como os valores sobre a linha  $j = 0$  são conhecidos (condições iniciais), então é possível calcular os valores da linha  $j = 1$  a menos do primeiro e do último, mas esses dois valores são dados exatamente pelas condições de fronteira completando assim o cálculo da linha  $j = 1$ . Tendo a linha  $j = 1$  procedemos de maneira análoga para calcular a linha  $j = 2$  e, assim, sucessivamente.

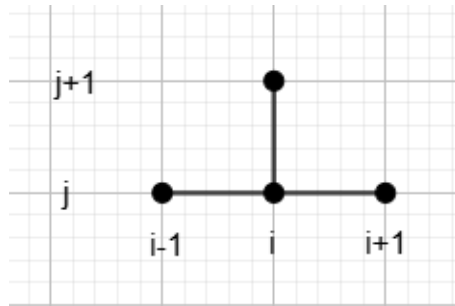


Figura 3.3: Molécula do método Explícito

### 3.3.2 Método Implícito

O método implícito possui uma vasta gama de aplicações em diversas áreas da Matemática e das Ciências Computacionais. Em [36] destaca-se o uso do método implícito na resolução de equações diferenciais parciais, especialmente em problemas relacionados com a estabilidade numérica e a eficiência computacional. Em [37], este método está associado a simulações de dinâmica dos fluidos, onde a sua capacidade de lidar com grandes passos temporais é crucial. Outro campo significativo é a modelação de fenómenos térmicos, em que o método permite uma maior precisão na solução de equações de difusão. Para além disso, o método implícito é utilizado em problemas de mecânica dos sólidos, como evidenciado por [38], que demonstraram a sua eficiência na simulação de materiais não lineares. Estas aplicações evidenciam a versatilidade do método implícito, sublinhando

a sua importância na resolução de problemas complexos em diversas disciplinas científicas e de engenharia.

O **método implícito** consistem em aproximar a derivada em função do tempo pela diferença regressiva e a derivada em função do espaço pela derivada central de segunda ordem. Deste modo a derivada parcial em função do tempo  $f_t$  no ponto  $f(x_i, t_j)$  será aproximada pela diferença regressiva (Backward) da seguinte forma:

$$\frac{\partial f_{i,j}}{\partial t} = \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (3.17)$$

e a aproximação da segunda derivada no espaço  $f_{xx}$  ponto  $f(x_i, t_j)$  pela diferença central de segunda ordem será representada da seguinte maneira:

$$\frac{\partial^2 f_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (3.18)$$

substituído as expressões (3.17) e (3.18) na equação (3.11), obtemos a equação seguinte:

$$-\lambda f_{i+1,j} + (2\lambda + 1)f_{i,j} - \lambda f_{i-1,j} = f_{i,j-1} \quad (3.19)$$

onde  $\lambda = \alpha^2 \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$

A equação (3.19) é a chamada equação de diferença finitas do método implícito e esse método será representado pela seguinte molécula computacional (Figura 3.4) abaixo.

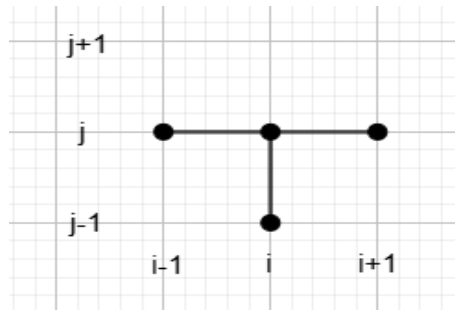


Figura 3.4: Molécula do método Implícito

Este método denomina-se implícito, pois cada ponto  $f_{(i,j-1)}$  depende dos pontos  $(i-1, j)$ ,  $(i, j)$  e  $(i+1, j)$ , todos do nível posterior daí a palavra implícito. Da figura (4) veja que não é possível o cálculo direto de  $f_{i,j}$ , pois os elementos da linha  $f_{i,j}$  são especificados em termos do valor conhecido  $f_{i,j-1}$ . Para contornar esta situação, é necessário a resolução de um sistema linear para cada estágio  $j$ . Fixando um estágio  $j$  e variando  $i$ , obtemos o sistema tridiagonal de  $n-1$  equações e  $n-1$  incógnitas dado abaixo:

$$\begin{bmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \cdots \\ -\lambda & 1+2\lambda & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & \vdots & 0 \\ \cdots & \ddots & 1+2\lambda & -\lambda \\ 0 & \vdots & -\lambda & 1+2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{1,j} \\ f_{2,j} \\ \vdots \\ f_{n-2,j} \\ f_{n-1,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1,j-1} \\ f_{2,j-1} \\ \vdots \\ f_{n-2,j-1} \\ f_{n-1,j-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda f_{i,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda g_{i,j} \end{bmatrix}$$

ou, na notação vetorial,  $Af_j = f_{j-1} + b_j$ .

### 3.3.3 Método de Crank-Nicolson

O método Crank-Nicolson é um método numérico amplamente utilizado para a resolução de equações diferenciais parciais. Em [30] o método Crank-Nicolson é empregado na modelagem de processos de difusão, como por exemplo na transferência de calor em sólidos e líquidos, demonstrando desta a capacidade de fornecer soluções estáveis e precisas. Em [34] é aplicado na modelagem problemas de escoamentos de fluidos em diferentes condições de contorno, evidenciando suas vantagens em termos de precisão e estabilidade. Ademais este método é aplicado na modelagem financeira, particularmente na avaliação de opções e outros derivativos. Em [35] utiliza-se técnicas numéricas semelhantes para resolver a equação de Black-Scholes, mostrando como este método pode ser usado para opções de avaliação em finanças.

O **método de Crank-Nicolson** consiste em aproximar a EDP no ponto médio, ou seja, aproximar a derivada em função do tempo pela diferença central e a derivada em função do espaço pela média das diferenças centrais nos níveis de tempo  $j$  e  $j + 1$ .

Considerando a equação da difusão de calor (3.11). Em [35] sugere-se usar a média das diferenças centrais de segunda ordem para aproximar a derivada em função do espaço da seguinte forma:

O método explícito será aproximado pela diferença central do seguinte modo:

$$\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta t} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta x^2} \quad (3.20)$$

e o método implícito será aproximado pela diferença central do seguinte modo:

$$\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta t} = \frac{f_{i+1,j+1} - 2f_{i,j+1} + f_{i-1,j+1}}{\Delta x^2} \quad (3.21)$$

e fazendo a média de (3.20) e (3.21) obtemos a seguinte expressão:

$$\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta t} = \alpha \frac{1}{2\Delta x^2} (f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j} + f_{i+1,j+1} - 2f_{i,j+1} + f_{i-1,j+1}) \quad (3.22)$$

onde  $\lambda = \alpha \frac{\Delta t}{2(\Delta x)^2}$  é a relação entre os espaçamentos da malha.

A expressão numérica (3.22) será chamada de diferença finita de Crank-Nicholson e terá a seguinte forma compacta:

$$-\lambda f_{i-1,j+1} + (1 + 2\lambda)f_{i,j+1} - \lambda f_{i+1,j+1} = \lambda f_{i-1,j} + (1 - 2\lambda)f_{i,j} - \lambda f_{i+1,j} \quad (3.23)$$

A equação (3.23) envolve em cada um dos níveis de tempo  $j$  e  $j + 1$  três valores de  $f$  como podemos ver na ver Figura (5), que e representa a molécula computacional deste método.

Note que este é um método implícito também pois para conseguir os valores posteriores de  $f$  no tempo, um sistema de equações algébricas deve ser resolvido. Os valores dos novos níveis de tempo  $j + 1$  podem ser obtidos pelo sistema de equações dado pela equação (3.23) ou pela matriz triangular dada abaixo, com as condições iniciais e de contorno dadas em (3.11). Desenvolvendo a equação (3.23) acima, para valores de  $j$  de 1 ate  $n$ , obtém o seguinte sistema de equações:

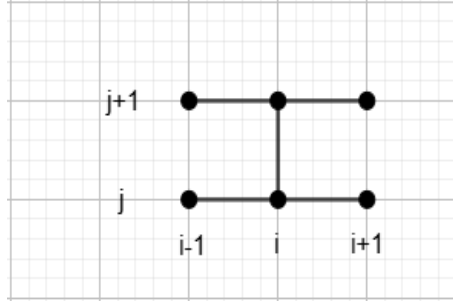


Figura 3.5: Representação da Molécula do Método Crank-Nicolson

$$\begin{aligned}
 (1 + 2\lambda)f_{i+1,1} - \lambda f_{i+2,2} &= \lambda f_{i,2} - (2\lambda - 1)f_{i,1} + 2\lambda f_{i,0} \\
 \lambda f_{i+1,1} + (1 + 2\lambda)f_{i+1,2} - \lambda f_{i+1,3} &= \lambda f_{i,1} - (2\lambda - 1)f_{i,2} + \lambda f_{i,3} \\
 -\lambda f_{i+1,2} + (1 + 2\lambda)f_{i+1,3} - \lambda f_{i+1,4} &= \lambda f_{i,2} - (2\lambda - 1)f_{i,3} + 2\lambda f_{i,4} \\
 &\dots = \dots \\
 -\lambda f_{i+1,n-1} + (1 + 2\lambda)f_{i+1,n} &= \lambda f_{i,n-1} - (2\lambda - 1)f_{i,n} + 2\lambda f_{i,1}
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

onde se verifica-se que o 1º membro pode ser colocado na mesma forma matricial do método implícito e o 2º fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 &\lambda f_{i,2} - (2\lambda - 1)f_{i,1} + 2\lambda f_{i,0} \quad \text{para } j = 1 \\
 \lambda f_{i,j+1} - (2\lambda - 1)f_{i,j} + \lambda f_{i,j-1} &\quad \text{para } j = 2, \dots, n - 1 \\
 &\lambda f_{i,1} - (2\lambda - 1)f_{i,n} + \lambda f_{i,n-1} \quad \text{para } j = n
 \end{aligned}$$

Este esquema é também desenvolvido, mediante um sistema tridiagonal de equações, as quais são resolvido em cada passo de tempo.

Reunido as equações do 1º e 2º membro resulta nas seguintes matrizes dada em notação vetorial  $Af^{j+1} = Bf^j$ , de ordem  $n - 1 \times n - 1$ , onde A e B são matrizes trigonais,

$$A = \begin{bmatrix} 1 + 2\lambda & \lambda & & 0 \\ \lambda & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & \ddots & 0 \\ \dots & \ddots & \vdots & -\lambda \\ 0 & \ddots & -\lambda & 1 + 2\lambda \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 - 2\lambda & \lambda & & 0 \\ \lambda & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & \ddots & 0 \\ \dots & \ddots & \vdots & \lambda \\ 0 & \ddots & -\lambda & 1 - 2\lambda \end{bmatrix}$$

## 3.4 Análise da Convergência do modelo

A análise da convergência é fundamental no estudo dos métodos numéricos, pois assegura que a solução aproximada de um problema se aproxima da solução exacta à medida que a discretização é refinada. Esta análise envolve a avaliação da taxa de aproximação, da estabilidade e da consistência de um método. Para a sua realização, podem ser empregues diversas ferramentas e métodos, como a análise do erro, que examina a diferença entre a solução exacta e a aproximada, a ordem de convergência que mede a rapidez com que o erro diminui quando o passo de discretização é reduzido e o Teorema de Lax, que relaciona a consistência e a estabilidade de um método para garantir a convergência do método numérico. A maioria das definições, teoremas e propriedades utilizadas neste capítulo foram obtidas das seguintes obras: [7] e [8].

### 3.4.1 Convergência

Um método numérico é considerado convergente quando, à medida que a discretização (como o tamanho do passo de tempo ou o espaçamento da malha) é refinada, a solução numérica se aproxima da solução exacta do problema.

Considere a equação diferencial parcial de valor inicial dada a seguir:

$$\begin{cases} Lv = F & \text{se } x \in \mathbf{IR} \text{ e } t > 0 \\ v(x, 0) = f(x) & \text{se } x \in \mathbf{IR} \end{cases} \quad (3.25)$$

e uma aproximação correspondente através de um esquema de diferenças finitas.

$$\begin{cases} L_k^n v_k^n = F_k^n & \text{se } k \in \mathbf{Z} \text{ e } n \in \mathbf{IN} \\ v_k^0 = f(x_k) & \text{se } k \in \mathbf{Z} \end{cases} \quad (3.26)$$

onde  $L$  é um operador diferencial parcial,  $v$  e  $F$  são funções definidas em todo intervalo real. Denotaremos por  $L_k^n$  o esquema de diferenças finitas para este problema, sendo que  $n$  corresponde a variável temporal e  $k$  a variável de espaço e  $v_k^n$  é definido na malha e satisfaz as seguintes condições iniciais  $v_k^0 = f(K\Delta x)$ , com  $k = -\infty, \dots, +\infty$ . Geralmente usaremos a letra  $v$  para denotar a solução exata e  $u$  para denotar a solução aproximada obtida através de um esquema de diferenças finitas.

**Definição 3.1 (Convergência pontualmente):** Um esquema de diferença finita  $L_k^n u_k^n = F_k^n$  aproximando a equação diferencial parcial  $Lv = F$  é um esquema pontualmente convergente se para todo  $(x, t) \in \mathbf{IR} \times (0, +\infty)$  temos:

$$u_k^n \rightarrow v(x, t) \quad (3.27)$$

quando  $(k\Delta x, (n+1)\Delta t) \rightarrow (x, t)$  e  $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ .

**Definição 3.2 (Convergência Uniforme):** Um esquema de diferenças finitas  $L_k^n u_k^n = F_k^n$  aproximando a equação diferencial parcial  $Lv = F$  é um esquema uniformemente convergente em  $t$  se :

$$|u^{n+1} - v^{n+1}|_\infty \rightarrow 0 \quad (3.28)$$

quando  $(n+1)\Delta t \rightarrow t$  e  $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ .

Mais precisamente, diremos que se trata de esquema espacialmente uniformemente convergente de ordem  $(p; q)$  em  $t$  se:

$$|u^n - v^n|_\infty = O(\Delta x^p) + O(\Delta t^q) \quad (3.29)$$

quando  $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$  e  $(n+1)\Delta t \rightarrow t$ .

Se as constantes presentes em  $O(\Delta x^p)$  e  $O(\Delta t^q)$  não dependerem do instante de tempo  $t$  considerado, dizemos simplesmente que o esquema é uniformemente convergente de ordem  $(p; q)$ .

Geralmente não é fácil provar a convergência de um método numérico pela definição. E como alternativa são usados os conceitos de consistência e estabilidade que são relacionados pelo teoremas de Lax que será abordado nos próximos subtítulos.

### 3.4.2 Consistência

Considerando a equação diferencial parcial definida em (3.25) e a sua aproximação correspondente em (3.26), podemos definir a consistência do seguinte modo:

**Definição 3.3 (Consistência Pontual):** Um esquema diferenças finitas  $L_k^n u_k^n = F_k^n$  é **pontualmente consistente** com a equação diferencial parcial  $Lv = F$  se para todo ponto  $(x, t) \in \mathbf{IR} \times (0, +\infty)$  e para toda a função suave  $\psi = \psi(x, t)$ :

$$(L\phi - F)|_k^n - [L_k^n \phi(k\Delta x, n\Delta t) - F_k^n] \rightarrow 0 \quad (3.30)$$

quando  $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$  e  $(k\Delta x, (n+1)\Delta t) \rightarrow (x, t)$ .

**Definição 3.4 (Consistência uniforme):** Um esquema diferenças finitas  $L_k^n u_k^n = F_k^n$  é **uniformemente consistente** com a equação diferencial parcial  $Lv = F$  se

$$\|p\phi - p_k^n \phi\|_\infty \rightarrow 0 \quad (3.31)$$

quando  $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ , independentemente de  $t$ .

Ao analisar a consistência, pode se escolher  $\phi$  como sendo a solução e  $v$  a equação diferencial parcial e portanto a definição (3.30) tornará-se a seguinte:

$$L_k^n v_k^n - F_k^n \rightarrow \Delta x, \Delta t \rightarrow 0 \quad (3.32)$$

Se escrevermos o esquema de diferenças como

$$u^{n+1} = Qu^n + \Delta t F^n \quad (3.33)$$

onde

$$\begin{aligned} u^n &= (\dots, u_{-1}^n, u_0^n, u_1^n, \dots)^T \\ F^n &= (\dots, u_{-1}^n, u_0^n, u_1^n, \dots)^T \end{aligned}$$

e  $Q$  é um operador que atua no próprio espaço, podemos definir a consistência da seguinte forma:

**Definição 3.5 (consistência normada):** O esquema de diferença (3.33) é consistente com a equação diferencial parcial com norma  $\|\cdot\|$ , se a solução da equação diferencial parcial  $v$  satisfaz a seguinte expressão:

$$v^{n+1} = Qv^n + \Delta t F^n + \Delta \tau^n \quad (3.34)$$

e

$$\|\tau^n\| \rightarrow 0 \quad (3.35)$$

quando  $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ , onde  $v^n$  denota o vector  $K$ th com componente  $v(k\Delta x, n\Delta t)$ .

Uma pequena variação da definição da consistência é dada abaixo onde a ordem pela qual  $\tau^n$  tende a 0 (a qual é a mesma ordem com qual o esquema de diferenças finitas aproxima a equação diferencial parcial) é incluída.

**Definição 3.6 (Consistência de Ordem Exacta):** O esquema de diferença finita (3.33) é dito de ordem exata  $(p, q)$  para a equação diferencial parcial dada se:

$$\|\tau^n\| = O(\Delta x^p) + O(\Delta t^q) \quad (3.36)$$

Denotamos por erro de truncamento as seguinte expressões:  $\tau^n$  ou  $\|\tau^n\|$ . Observe que é fácil ver que se um esquema de diferença finita é de ordem exata  $(p, q)$ ,  $p, q \geq 1$ , então é um esquema consistente, e também é fácil ver que se um esquema é consistente ou de ordem exata  $(p, q)$ , então o esquema é pontualmente consistente.

Observe que a consistência é uma condição necessária para convergência, mas um esquema consistente não é necessariamente convergente. Por outro lado, a maioria dos esquemas de diferenças finitas usados são de fato consistentes.

### 3.4.3 Estabilidade

A estabilidade está relacionada a ampliação ou anulação de erros de arredondamentos e de aproximações, quando um esquema anula tais erros não afetando a solução dizemos que o esquema é estável, entretanto quando tais erros são ampliados fazendo a solução divergir da solução real dizemos que o esquema é instável. A interpretação da estabilidade de um esquema de diferenças finitas leva-nos a compreender que pequenas diferenças nas condições iniciais podem pequenos erros na solução aproximada.

A definição de estabilidade de um esquema diferenças finitas é similar a definição da equação diferencial parcial bem posto. Sabe-se que um problema é dito bem posto se ele tem uma única solução que depende continuamente dos valores iniciais ou de fronteira, ou de ambos.

Vamos considerar os esquemas numéricos que podem ser escritos como:

$$u^{n+1} = Qu^n, n \geq 0 \quad (3.37)$$

que é um esquema para resolver um dado problema de valor inicial em  $\mathbf{IR}$  e que inclui uma equação diferencial parcial linear homogênea.

**Definição 3.7 (Estabilidade em norma):** Dizemos que um esquema de diferenças finitas é estável com norma  $\|\cdot\|$  se: existem constantes positivas  $\Delta x_o$  e  $\Delta t_o$ , e constantes não negativas  $k$  e  $\beta$  tal que:

$$\|u^{n+1}\| \leq Ke^{\beta t} \|u^0\|, \quad (3.38)$$

quando  $0 \leq t = (n+1)\Delta t$ ,  $0 < \Delta x \leq \Delta x_o$  e  $0 < \Delta t \leq \Delta t_o$ .

Note que a definição da convergência e consistência tanto como da estabilidade é dada em termos da norma e essa norma pode variar dependendo das condições iniciais e de contorno, também observa-se que a definição da estabilidade permite que a solução cresça com tempo e não com o número de passos de tempo.

**Proposição 1:** Dizemos que um esquema diferencial (12) é dito estável com norma  $\|\cdot\|$  se e somente se existem constantes positivas  $\Delta x_o$  e  $\Delta t_o$  e constantes não negativas  $k$  e  $\beta$  tal que:

$$\|Q^{n+1}\| \leq K e^{\beta t} \quad (3.39)$$

para  $0 \leq t = (n+1)\Delta t, 0 < \Delta x \leq \Delta x_o$  e  $0 < \Delta t \leq \Delta t_o$ .

## Demonstração

Consideremos um esquema de discretização temporal e espacial de uma equação diferencial. A solução é calculada em iterações, onde  $Q_n$  representa a solução na iteração  $n$ .

Supomos que a norma  $\|Q_n\|$  seja finita e que, para perturbações iniciais pequenas, a norma da solução  $\|Q_{n+1}\|$  não cresce descontroladamente.

Para a norma  $\|Q_{n+1}\|$ , temos:

$$\|Q_{n+1}\| \leq \|Q_n\| + \|E_n\|,$$

onde  $E_n$  representa o erro introduzido na iteração  $n$ .

Assumimos que existem constantes  $K$  e  $\beta$  tais que:

$$\|E_n\| \leq C e^{\beta t},$$

para uma constante  $C$  que depende das condições iniciais e da discretização. Isso implica que o erro é controlado exponencialmente.

Iremos usar a indução para mostrar que, se  $\|Q_n\|$  é controlado, então  $\|Q_{n+1}\|$  também é.

Para  $n = 0$ , temos  $\|Q_0\|$  finito.

Suponha que  $\|Q_n\| \leq K e^{\beta n \Delta t}$  para algum  $n$ . Então:

$$\|Q_{n+1}\| \leq \|Q_n\| + \|E_n\| \leq K e^{\beta n \Delta t} + C e^{\beta n \Delta t} = (K + C) e^{\beta n \Delta t}.$$

Assim, se escolhermos  $K' = K + C$ , temos que:

$$\|Q_{n+1}\| \leq K' e^{\beta(n+1)\Delta t}$$

As constantes  $\Delta x_o$  e  $\Delta t_o$  garantem que a discretização não introduza instabilidades adicionais. Portanto, ao controlar a norma da solução em função do tempo e das discretizações, concluímos que o esquema é estável conforme definido.  $\square$

### 3.4.3.1 Critérios de Estabilidade

Existem diversos critérios para a análise da estabilidade de um esquema numérico, entre os quais se destacam os seguintes: critério da matriz, critério de Von Neumann e critério CFL.

#### 1. Critério da Matriz

Este critério é utilizado principalmente para analisar a estabilidade de métodos numéricos na resolução de equações diferenciais com derivadas parciais (EDDPs), especialmente em métodos explícitos.

Consideremos uma equação diferencial com derivadas parcial (EDDP) que, após discretização, pode ser expressa da seguinte forma:

$$\mathbf{U}^{n+1} = A\mathbf{U}^n$$

onde:

- $\mathbf{U}^n$  é o vetor das soluções numéricas nos pontos discretos do espaço no tempo  $t = n\Delta t$ .
- $A$  é a matriz de evolução, que determina como o vetor de soluções  $\mathbf{U}$  é atualizado de um passo de tempo para o próximo.

Para que o método seja estável, precisamos garantir que pequenos erros não cresçam descontroladamente a cada iteração. Matematicamente, a condição de estabilidade requer que o raio espectral de  $A$  seja menor ou igual a 1. O *raio espectral*  $\rho(A)$  é o maior módulo dos autovalores  $\lambda_i$  de  $A$ :

$$\rho(A) = \max |\lambda_i|$$

assim, o método será estável se:

$$\rho(A) \leq 1$$

isso significa que todos os autovalores de  $A$  devem estar dentro ou no limite do círculo unitário no plano complexo. Em outras palavras, para cada autovalor  $\lambda_i$  de  $A$ , temos:

$$|\lambda_i| \leq 1$$

se essa condição não for satisfeita, qualquer erro presente em  $\mathbf{U}^n$  será amplificado a cada passo de tempo, levando a uma solução instável.

#### 2. Critério de Von Neumann

O critério de Von Neumann é um método de análise de estabilidade específico para equações diferenciais parciais lineares e é particularmente útil para métodos explícitos. Ele se baseia em uma análise de Fourier, onde a solução numérica é representada como uma combinação de ondas harmônicas, ou seja, funções de seno e cosseno. Para aplicar este critério, assumimos que a solução numérica  $u_j^n$  em um ponto de malha  $x = j\Delta x$  e no tempo  $t = n\Delta t$  pode ser expressa como:

$$u_j^n = G^n e^{ikj\Delta x}$$

onde:

- $G$  é o *fator de amplificação*, que determina o crescimento ou a dissipação do modo de onda.
- $k$  é o número de onda associado ao modo de Fourier.
- $j\Delta x$  representa a posição espacial.

Substituindo essa representação na equação de diferenças finitas, obtemos uma expressão para  $G$  em função de  $k$ ,  $\Delta t$  e  $\Delta x$ . Para que o método seja estável, é necessário que:

$$|G| \leq 1$$

para todos os valores de  $k$ . Em termos práticos, essa condição implica que, para cada componente de frequência (modo de onda), o fator de amplificação não deve ser maior que 1, garantindo que os erros de alta frequência não se amplifiquem ao longo do tempo.

### 3. Critério CFL (Courant-Friedrichs-Lewy)

O critério CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) é uma condição fundamental para garantir a estabilidade de métodos numéricos ao resolver EDDPs hiperbólicas e parabólicas. Ele relaciona o passo de tempo  $\Delta t$ , o passo de espaço  $\Delta x$  e a velocidade de propagação da informação (ou velocidade característica) na equação. A ideia central do critério CFL é que o método numérico deve permitir que a "informação" da solução se propague de forma controlada dentro da malha, se essa propagação não for respeitada, o método pode gerar resultados instáveis e imprecisos [27].

Consideremos a equação de advecção simples:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

onde  $c$  é a velocidade de propagação, o critério CFL estabelece que o método numérico será estável apenas se:

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

esta relação, chamada de número de Courant impõe uma limitação na escolha do passo de tempo  $\Delta t$  em relação ao passo de espaço  $\Delta x$  e à velocidade  $c$ . Em termos práticos, isso significa que a "informação" propagada em uma iteração do tempo ( $c\Delta t$ ) não pode percorrer uma distância maior do que o espaçamento entre dois pontos consecutivos na malha ( $\Delta x$ ).

De forma mais geral, para problemas multidimensionais com velocidades características  $c_i$  em cada direção  $i$ , o critério CFL é expresso como:

$$\text{CFL} = \max_i \left( \frac{c_i \Delta t}{\Delta x_i} \right) \leq 1$$

Se essa relação não for satisfeita, o método numérico pode gerar soluções instáveis, em que os erros crescem de maneira descontrolada ao longo do tempo. O critério CFL assegura que a velocidade de propagação numérica da solução, na malha, não ultrapasse a velocidade física com que a informação se propaga, evitando, assim, instabilidades no processo numérico.

#### 3.4.4 Teoremas de Lax

Os teoremas de Lax são fundamentais na análise de métodos numéricos para equações diferenciais parciais, pois estabelecem uma conexão clara entre a consistência, a estabilidade e a convergência dos esquemas numéricos. A seguir apresentamos o teorema, suas características e a respectiva demonstração.

**Teorema 3.1 (Teorema de Equivalência de Lax):** *Um esquema de diferenças finitas consistente para um problema de valor inicial bem-posto é convergente, se e somente se ele é estável.*

#### *Demonstração*

Inicialmente, assume-se que o esquema é consistente e estável. Definimos  $u(x, t)$  como a solução exacta do problema, e  $u_i^n$  como a solução numérica no ponto  $x_i$  e no tempo  $t_n$ . O erro é então definido como  $e_i^n = u_i^n - u(x_i, t_n)$ .

A consistência do método garante que, conforme os passos de discretização,  $\Delta t$  e  $\Delta x$ , se aproximam de zero, o erro de discretização tende a zero. Isso pode ser formalmente expresso como:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} e_i^n = 0.$$

Essa relação significa que, para discretizações suficientemente finas, a diferença entre a solução numérica e a solução exacta se torna desprezível.

Por outro lado, a estabilidade do método implica que a norma do vetor de erros não aumenta a cada iteração. Portanto, existe uma constante  $C < 1$  tal que:

$$\|e^{n+1}\| \leq C\|e^n\|.$$

Isso sugere que os erros em iterações sucessivas estão controlados e não crescem descontroladamente.

Para mostrar isso de maneira mais rigorosa, considera-se o erro inicial  $e^0$ . Aplicando a condição de estabilidade, pode-se derivar a seguinte relação através de um argumento por indução:

$$\|e^1\| \leq C\|e^0\|,$$

$$\|e^2\| \leq C\|e^1\| \leq C^2\|e^0\|,$$

e assim por diante. Portanto, em geral, tem-se:

$$\|e^n\| \leq C^n\|e^0\|.$$

À medida que  $n \rightarrow \infty$ , se  $C < 1$ , então  $C^n \rightarrow 0$ . Isso implica que:

$$\|e^n\| \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Consequentemente, se o método é estável e consistente, ele converge para a solução exata, ou seja:

$$u_i^n \rightarrow u(x_i, t_n) \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Na segunda parte da demonstração, assume-se que o esquema de diferenças finitas é convergente. Isso significa que existe um limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_i^n = u(x_i, t_n) \quad \text{para cada } x_i \text{ e } t_n.$$

Para mostrar que o método é consistente, deve-se demonstrar que a diferença entre a solução numérica e a solução exata, ou seja, o erro, deve se aproximar de zero à medida que os passos de discretização se tornam mais finos.

Caso o método não fosse consistente, existiria uma discrepância fixa  $D$  entre a discretização e a equação que não desapareceria com o refinamento da malha. Isso levaria à conclusão de que, mesmo ao se refinar a malha, a diferença entre a solução numérica e a solução exata não se tornaria arbitrariamente pequena.

Contudo, à medida que  $\Delta t \rightarrow 0$  e  $\Delta x \rightarrow 0$ , a consistência implica que os erros de discretização devem se tornar pequenos. Se o método é convergente, então, para qualquer  $\epsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$  tal que, se a discretização é menor que  $\delta$ , temos:

$$|u_i^n - u(x_i, t_n)| < \epsilon.$$

Isso significa que, ao refinar a malha, a solução numérica se aproxima da solução exata.

Assim, como  $e_i^n = u_i^n - u(x_i, t_n) \rightarrow 0$  com o refinamento da malha, isso implica que o erro de discretização também tende a zero, provando que o método é consistente.

Portanto, a demonstração do Teorema de Equivalência de Lax evidencia que a estabilidade é uma condição necessária para a convergência de um método numérico. Além disso, se um método é convergente, ele deve ser consistente. Assim, para garantir a convergência, é essencial assegurar que um método numérico seja tanto consistente quanto estável.

# Capítulo 4

## Derivados Financeiros

Os derivados financeiros são instrumentos cujo valor é baseado ou derivado do valor de um activo subjacente. Este activo pode ser uma acção, uma moeda, um título, uma mercadoria, um índice de mercado, entre outros. A principal função dos derivados financeiros é garantir protecção contra o risco de flutuação do valor de um activo, permitindo a realização de operações de cobertura. Neste contexto, os derivados financeiros oferecem às entidades a oportunidade de reduzir os seus riscos, transferindo-os para uma contraparte (banco ou especulador) disposta a assumi-los.

Para além disso, podem ser utilizados para especulação, quando se assumem riscos com o objectivo de obter ganhos no mercado, por meio da compra e venda de contratos, visando lucrar com a diferença entre os preços de compra e de venda. Neste caso, o especulador não tem interesse no activo em si, mas procura obter lucro explorando imperfeições do mercado, que podem atribuir preços distintos ao mesmo produto. Assim, ao assumir o risco, o especulador viabiliza a outra ponta da operação de cobertura, fornecendo liquidez ao mercado e facilitando a arbitragem [15].

Em seguida, definimos alguns conceitos que serão utilizados ao longo da nossa monografia, sendo que a maior parte deles foi extraída dos seguintes manuais: [11], [9] e [15].

**Definição 4.1 (Título ou Obrigação)** *É o reconhecimento formal, por escrito, de uma dívida, pelo qual uma das partes promete pagar certa importância, em determinada data futura, e mais juros, em datas pré-fixadas, até o vencimento.*

**Definição 4.2 (Ativo Financeiro):** *É qualquer título representativo de uma parte patrimonial ou de uma dívida. Exemplos: títulos da dívida pública, contratos derivativos, acções.*

**Definição 4.3 (Ativo-objeto):** *É o bem ou mercadoria que se está negociando;*

**Definição 4.4 (Acção):** *É o valor mobiliário emitido pelas companhias e representativos de parcela do capital, ou seja, é o documento que indica ser o possuidor ou proprietário de certa fracção de determinada empresa. As acções representam a menor fracção do capital social em partes iguais. O investidor torna-se, portanto sócio da empresa da qual adquiriu acções e os poderes a ele atribuídos são limitados pelo tipo de acções que comprou e também pela quantidade de acções que possui.*

**Definição 4.5 (Titular):** *É o comprador da opção, aquele que adquire os direitos de comprar ou de vender a opção.*

**Definição 4.6 (Lançador):** *É o vendedor da opção, aquele que cede os direitos ao titular, assumindo a obrigação de comprar ou de vender o objeto da opção.*

**Definição 4.7 (Preço do Ativo-objeto):** *É o valor de mercado de um activo específico que é objeto de uma transacção ou análise financeira.*

**Definição 4.8. Prémio:** é o valor pago pelo titular ao lançador da opção para ter direito de comprar ou de vender o objeto da opção;

**Definição 4.9. Preço de exercício (Strike  $k$ ):** O preço pelo qual o ativo objeto poderá ser comprado ou vendido pelo titular.

**Definição 4.10 (Vencimento):** É a data em que cessa o direito do titular, ou seja, É data a partir da qual a opção deixa de existir.

## 4.1 Ambientes de negociação

De acordo com [9] a negociação dos instrumentos financeiros geralmente é feito em dois ambientes distintos que são:

### 4.1.1 Mercado de Bolsas

*Os Mercados de bolsas São instituições onde os participantes se reúnem para negociar contratos previamente padronizados.* Com o avanço tecnológico e a evolução dos meios de comunicação, a negociação vem dando espaço para a negociação eletrônica. Nesse ambiente, as transações são realizadas por meio de um sistema que promove o encontro dos negociadores, permitindo que estes manifestem seus interesses e condições para negociar determinado contrato.

Entre os principais produtos negociáveis em bolsas, destacam-se as ações, que representam frações do capital social de empresas e oferecem aos investidores a possibilidade de participar nos lucros por meio de dividendos. Os Títulos públicos, como os do Tesouro Direto, proporcionam uma alternativa segura de investimento, enquanto os derivativos, como contratos futuros e opções, permitem tanto a proteção contra riscos quanto a especulação em relação a ativos subjacentes.

Os ETFs (Fundos de Índice) oferecem diversificação instantânea ao replicar a performance de índices, e as commodities, como petróleo e ouro, são negociadas por meio de contratos futuros, sendo influenciadas por fatores globais. Essa variedade de produtos, aliada à agilidade da negociação eletrônica, torna os mercados de bolsas uma plataforma atractiva e dinâmica para investidores de diferentes perfis. [10].

### 4.1.2 Mercado de balcão

O mercado de balcão é composto por uma rede de operadores em diversas instituições, interligados por telefone ou computador. Os negócios são fechados por meio de ligações telefônicas ou chats, cujas conversas são geralmente gravadas para garantir segurança às partes. As negociações nesse ambiente normalmente envolvem montantes maiores do que os observados no mercado de bolsa. O ativo objeto dessas negociações, na maioria dos casos, é um contrato listado em bolsa, mas a transação ocorre no mercado de balcão por envolver formadores de mercado ou grandes players que não encontrariam liquidez suficiente no mercado padrão para absorver suas ordens. Após o fechamento do negócio, as partes registram a operação na bolsa, que passa a ser responsável por sua liquidação. No entanto, esse tipo de mercado também permite a negociação de instrumentos não listados, criados exclusivamente para atender à demanda de dois participantes.

Como exemplo, podemos considerar um contrato de negociação futura de um ativo para liquidação em uma data não disponível nos contratos negociados em bolsa. Essa é a principal vantagem

do mercado de balcão: a flexibilidade para atender necessidades específicas dos participantes. A desvantagem, no entanto, é o maior risco de crédito, pois, nesses casos, como o contrato é bilateral e não exige, a princípio, o depósito de garantias pelas partes, há uma maior probabilidade de uma das partes não conseguir honrar o compromisso.

Nesse mercado, investidores podem negociar uma variedade de produtos, como por exemplo ações de empresas menores, títulos de dívida corporativa, derivativos, como opções e swaps, além de moedas no mercado de câmbio [10].

## 4.2 Participantes do mercado de derivativos

Segundo [13], os participantes do mercado de derivativos podem ser divididos em dois segmentos: investidores e instituições. O grupo dos investidores é composto por operações de cobertura, especuladores e arbitradores. Já o segmento institucional é representado pela clearing house da Bolsa de Mercados e Futuros, responsável pela compensação e liquidação das operações.

### 4.2.1 Hedgers

*O termo operação de cobertura refere-se a uma posição em um instrumento financeiro ou ativo com o objetivo de reduzir perdas potenciais de um investimento.* Os operações de cobertura recorrem ao mercado de derivativos para estruturar operações que minimizem os riscos a que estão expostos devido às flutuações de variáveis como preços, taxas de câmbio e juros. Como exemplo de cobertura, podemos citar empresas que possuem faturamento em moeda local, mas têm despesas em dólar, ficando expostas ao risco de oscilações desfavoráveis na taxa de câmbio; agricultores sujeitos à variação dos preços de sua produção; e gestores de carteiras que precisam limitar o risco de seus investimentos.

Um exemplo clássico de cobertura é a compra de puts para proteger carteiras de activos. Nesse caso, a aquisição da opção garante o direito de vender a carteira por um preço mínimo, limitando a perda máxima que pode ser enfrentada caso o mercado passe por um período de turbulência.

### 4.2.2 Especuladores

*Especuladores são investidores que buscam lucrar com a compra e venda de ativos financeiros, como ações, commodities, moedas e derivativos, baseando-se em expectativas sobre a movimentação futura dos preços.*

Os especuladores recorrem ao mercado de derivativos para assumir uma posição no mercado, que pode visar à valorização ou desvalorização do activo, ou ainda ao grau de oscilação de seus preços. A escolha por operar via derivativos pode ter diversas razões, entre elas: a busca por alavancagem da posição, a falta de um mercado líquido para o activo objecto e a impossibilidade de montar determinada posição no mercado à vista devido a restrições regulatórias no ambiente em que o activo é negociado.

### 4.2.3 Arbitradores

*Arbitragem é a prática de tirar proveito das discrepâncias nos preços de um activo negociado em mais de um mercado, entre um activo e seu derivativo ou entre dois activos/derivativos que possuam uma relação intrínseca.*

Por meio de transações realizadas em dois ou mais mercados, é possível obter ganhos com pequeno ou nenhum risco, aproveitando distorções momentâneas na relação entre os preços desses instrumentos. Quando o preço de um contrato futuro está abaixo ou acima do preço do activo objeto no mercado à vista, ajustado a valor futuro, surge uma oportunidade de obter um ganho livre de risco por meio da execução de operações em ambos os mercados, conforme exposto acima.

### 4.3 Principais instrumentos derivativos

O mercado de derivativos oferece diversos instrumentos financeiros para investidores e empresas. Dessa forma, podem ser destacados quatro tipos principais de derivativos, que variam de acordo com as características do contrato em questão: contratos a termo, contratos futuros, opções e swaps.

#### 4.3.1 Contratos a termo

*Um contrato a termo é um acordo de compra ou venda de um activo a um determinado preço em uma data futura. Uma das partes envolvidas na negociação assume a posição comprada, comprometendo-se a adquirir o activo objecto pelo preço acordado na data futura, enquanto a outra parte assume a posição vendida, comprometendo-se a vendê-lo pelo mesmo preço na mesma data [9]. Esse tipo de contrato é negociado no mercado de balcão.*

Ao comprar uma acção a termo, o investidor precisará desembolsar o valor apenas no futuro, sendo necessário apenas depositar um percentual do valor do contrato como garantia. Dessa forma, cria-se uma possibilidade de alavancagem, pois é possível adquirir um volume financeiro maior do que o disponível no presente.

O resultado de uma operação de compra de um contrato a termo pode ser expresso pela seguinte equação:

$$P = S_t - K \tag{4.1}$$

Onde:

$K$ : Preço estabelecido no contrato.

$S_t$ : Preço do activo objeto no mercado a vista na data de vencimento do contrato.

O gráfico dessa equação evidencia a relação direta entre o resultado da operação e o preço no mercado à vista.

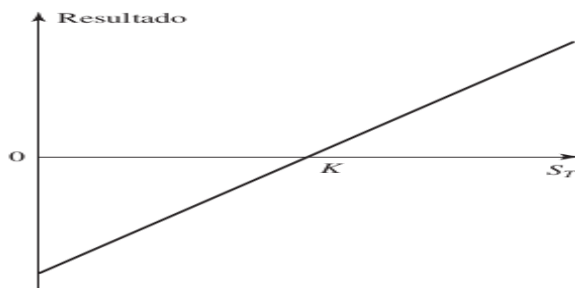


Figura 4.1: Resultado de posição comprada a termo.

Como pode ser observado, quanto maior for o preço do activo objecto em relação ao preço estabelecido no contrato na data de liquidação, maior será o ganho obtido pelo comprador.

De forma análoga, uma operação de venda a termo pode ser representada pela equação abaixo.

$$P = K - S_t \quad (4.2)$$

Onde:

$k$ : Preço estabelecido no contrato

$S_t$ : Preço do ativo objecto no mercado a vista na data de vencimento do contrato.

O gráfico da equação (4.2) abaixo mostra a relação entre resultado da operação e o preço no mercado a vista na venda de uma opção de venda.

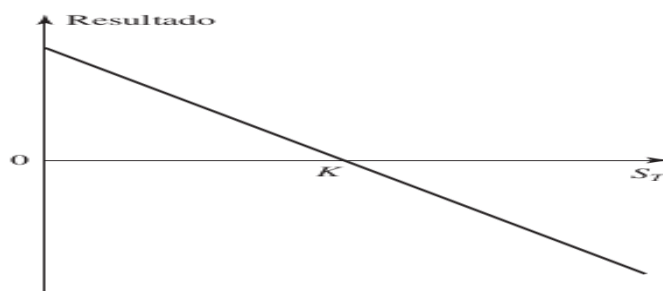


Figura 4.2: Resultado de posição venda a termo.

Em um mercado equilibrado, o preço a termo de um determinado activo deve corresponder ao seu preço à vista levado a valor futuro pela taxa de juros do período. Caso isso não ocorra e o preço a termo do activo objecto seja inferior ao seu preço à vista ajustado pela taxa de juros, será possível obter financiamento a um custo abaixo da taxa de mercado por meio da compra do activo a termo. Nesse caso, o investidor vende o activo no presente, recebendo o valor negociado no mercado à vista, e simultaneamente adquire o mesmo activo a termo. Essa operação resulta em um fluxo de caixa de renda fixa, porém com um montante de juros pagos inferior ao que seria obtido por meio de instrumentos convencionais.

Portanto, se o preço a termo divergir do preço à vista ajustado a valor futuro, surgirá uma oportunidade de ganhos sem risco por meio de uma operação que arbitra as taxas praticadas nos dois mercados. Em um ambiente de mercado com simetria de informação, tais oportunidades não persistirão por muito tempo, levando o preço a termo a gravitar em torno de seu valor justo.

### 4.3.2 Contratos futuros

*Um contrato futuro é um acordo entre duas partes para comprar ou vender um activo por um determinado preço em uma data futura [9] e é negociado no mercado de bolsa.*

Os contratos a termo e os contratos futuros possuem a mesma definição, porém apresentam as seguintes diferenças: os contratos futuros são negociados em bolsa e padronizados pela própria instituição, ou seja, a bolsa define características como os vencimentos disponíveis e o lote mínimo de negociação. Por outro lado, os contratos a termo não são negociados em bolsa e não seguem um padrão predefinido para os ativos subjacentes [9].

Outra característica peculiar dos contratos futuros são os ajustes diários de ganhos ou perdas. A bolsa determina, diariamente, um valor chamado preço de ajuste, geralmente calculado com base na observação dos preços praticados no mercado ao longo do dia. Após a apuração do preço de ajuste, as posições em aberto são ajustadas: aqueles que compraram a um preço inferior ao preço de ajuste recebem um crédito correspondente à diferença, enquanto aqueles que compraram a um preço superior arcam com o débito dessa diferença. O mesmo mecanismo se aplica, de forma análoga, às posições vendidas [15].

Supondo-se que alguém adquira um contrato na data  $t$ , sendo o valor do contrato  $F(t)$ ; no dia seguinte, o valor passa a  $F(t + 1)$ . Caso a diferença  $F(t + 1) - F(t)$  seja positiva, o comprador receberá o valor dessa diferença; sendo negativa, o montante será pago ao vendedor.

Seguidamente, seriam computados  $F(t + 2)$ ,  $F(t + 3)$ ,  $F(t + 4)$ , etc. Do mesmo modo, calcular-se-iam as diferenças  $F(t + 2) - F(t + 1)$ ,  $F(t + 3) - F(t + 2)$ , e assim sucessivamente, havendo pagamentos e recebimentos conforme os sinais dessas diferenças.

No último dia, a diferença seria computada entre o valor de mercado do activo  $S(t)$  e o valor obtido no dia anterior, ou seja,  $S(t) - F(t - 1)$ .

A soma geral dos ganhos e perdas assumiria a expressão:

$$S(t) - F(t - 1) + F(t - 1) - F(t - 2) + \dots + F(t + 3) - F(t + 2) + F(t + 2) - F(t + 1) + F(t + 1) - F(t) = S(t) - F(t) \quad (4.3)$$

Consideremos o seguinte exemplo: se o preço do contrato futuro hoje for de 20,00 MT e, amanhã, o preço for de 22,00 MT, então a conta será creditada em 2,00 MT. Se, no entanto, o preço amanhã for de 19,00 MT, então a conta será debitada em 1,00 MT [14].

### 4.3.3 Swaps

Segundo [16], o **swap** é um contrato derivativo por meio do qual dois indivíduos trocam fluxos financeiros futuros, por um determinado período, indexados a um índice de reajuste específico. O contrato de swap pode ter como objecto moedas, commodities ou activos financeiros.

O swap é estabelecido por um período determinado e, ao atingir o vencimento, ocorre um acerto de contas entre as partes contratantes. Apesar de consistir na troca de indicadores, e não em um instrumento financeiro único, o swap é amplamente utilizado como estratégia de proteção em diversas situações, tanto por investidores individuais quanto por empresas.

#### 4.3.3.1 Tipos de swaps

De acordo com [9], podemos encontrar os seguintes tipos de swaps no mercado de derivados financeiros:

##### 1. Swaps de taxa de juros

Em um swap de taxas de juros, uma empresa concorda em pagar a outra fluxos de caixa iguais aos juros, a uma taxa fixa predeterminada, sobre um principal notional por um número de anos também predeterminado. Em troca, ela recebe da outra empresa juros a uma taxa flutuante sobre o mesmo principal notional e pelo mesmo período de tempo.

Um swap de taxas de juros vale quase zero quando é iniciado. Após algum tempo, seu valor pode se tornar positivo ou negativo.

Os pagamentos de principal não são trocados em um swap de taxas de juros. Contudo, podemos pressupor que os pagamentos de principal são recebidos e pagos ao final do swap sem alteração de seu valor. No processo, descobrimos que, do ponto de vista do pagador da taxa flutuante, um swap pode ser considerado uma posição comprada em um título de taxa fixa e uma posição vendida em um título de taxa flutuante, de modo que:

$$V_{swap} = B_{fixa} + B_{flutuante} \quad (4.4)$$

onde  $V_{swap}$  é o valor do swap,  $B_{flutuante}$  é o valor do título de taxa flutuante (correspondente aos pagamentos realizados) e  $B_{fixa}$  é o valor do título de taxa fixa (correspondente aos pagamentos recebidos). Da mesma forma, do ponto de vista do pagador de taxa fixa, um swap é uma posição comprada em um título de taxa flutuante e uma posição vendida em um título de taxa fixa, de modo que o valor do swap é:

$$V_{swap} = B_{flutuante} - B_{fixa} \quad (4.5)$$

## 2. Swaps de commodities Swaps

Os swaps de commodities são basicamente uma série de contratos a termo sobre uma commodity com diferentes datas de maturidade e os mesmos preços de entrega. Um swap de commodities funciona muito semelhante a um swap de taxa de juros. Vou dar um exemplo para facilitar a explicação:

Temos uma troca de 2 anos sobre ouro. Essa transação é uma troca de dinheiro com base no preço do ouro (X não entrega ao ouro Y). O swap é responsável por compensar diferenças no preço variável (mercado) e no preço estabelecido (fixo) no contrato. Portanto, no caso de o preço do ouro cair abaixo do preço fixo, Y pagaria X a diferença. Caso contrário, se o preço subir, X pagará Y o valor da diferença.

## 3. Swaps na taxa de câmbio

Outro tipo popular de swap é conhecido como swap de moeda fixa por fixa (cambio). Ele envolve trocar os pagamentos de principal e juros a uma taxa fixa em uma moeda pelos pagamentos de principal e juros a uma taxa fixa em outra moeda. Um contrato de swap de moeda exige que o principal seja especificado em ambas as moedas. Os montantes do principal normalmente são trocados no início e ao final da vida do swap. Normalmente, os principais são escolhidos para serem aproximadamente equivalentes usando a taxa de câmbio no início do swap. Quando são trocados no final da vida do swap, seus valores podem ser bastante diferentes.

Se definirmos  $V_{swap}$  como o valor em dólares americanos de um swap em circulação no qual dólares são recebidos e uma moeda estrangeira é paga, então:

$$V_{swap} = B_D - S_0 B_F \quad (4.6)$$

onde  $B_F$  é o valor, mensurado na moeda estrangeira, do título definido pelos fluxos de caixa estrangeiros sobre o swap e  $B_D$  é o valor do título definido pelos fluxos de caixa nacionais sobre o swap, e  $S_0$  é a taxa de câmbio à vista (expressa como número de dólares por unidade de moeda estrangeira). O valor de um swap pode, assim, ser determinado a partir de taxas de juros nas duas moedas e a taxa de câmbio à vista. Da mesma forma, o valor de um swap no qual a moeda estrangeira é recebida e os dólares são pagos é:

$$V_{swap} = S_0 B_F - B_D \quad (4.7)$$

## 4. Swaps de crédito

Um swap de crédito, também conhecido como CDS (Credit Default Swap), é um contrato de swap de um determinado instrumento de crédito no qual o comprador paga periodicamente ao vendedor e, em troca, o vendedor paga uma quantia em dinheiro, caso o instrumento do crédito não é pago no vencimento ou a entidade incorre em suspensão de pagamentos.

### 4.3.4 Opções

*Uma opção, tal como definida por [11], é um contrato que dá ao seu proprietário, chamado titular ou comprador, o direito de comprar ou vender, a um preço fixo chamado preço de exercício  $K$ , um activo subjacente especificado, como uma acção, um índice ou uma moeda estrangeira, a qualquer momento antes ou apenas em uma data específica, chamada de vencimento ou data de vencimento.*

A principal diferença entre o contrato de opção e os demais contratos é que, no contrato de opção, o titular não tem a obrigação de exercer seu direito; ele apenas o fará se for favorável. No entanto, há um custo para se adquirir uma opção, ao passo que não existem custos para se tomar uma posição em um contrato a termo ou em um contrato futuro.

### 4.3.5 Classificação das opções

De acordo com [28] as opções podem ser classificadas quanto à finalidade e o instante da sua execução.

#### 4.3.5.1 Classificação das opções quanto à finalidade:

1. **Opções de compra (Call Option):** Concedem ao comprador da opção o direito (não uma obrigação) de comprar um determinado activo em uma data futura, acordada na negociação do contrato, por um preço pré-determinado, também definido no instante da negociação. Por esse direito, o adquirente da opção de compra paga ao vendedor da opção, chamado lançador, uma comissão denominada prêmio, que será perdida se o comprador não exercer a opção até a data combinada. Portanto, o adquirente de uma opção de compra especula, esperando que o preço do ativo suba dentro do período especificado.

Exemplo: Suponhamos que um negociante pretenda adquirir um contrato de opção de compra europeia de 100 acções da IBM, cujo preço de exercício é de 60 por acção e cuja data de maturidade ocorre dentro de quatro (4) meses. Suponhamos ainda que o prêmio da opção seja de 5 por acção, ou seja, o comprador deverá pagar 500 no total. Consideremos que o preço corrente da acção (preço de mercado) seja de 58.

Se, na data de maturidade, o preço da acção for inferior a 60, é evidente que o comprador não exercerá a opção, pois não faria sentido adquirir uma acção por 60 quando esta vale menos no mercado. Nestas circunstâncias, o comprador perde todo o investimento inicial de 500.

Por outro lado, se na data de maturidade o preço da acção for superior a 60, o comprador exercerá a opção. Suponhamos, por exemplo, que o preço da acção seja de 75 na maturidade. Ao exercer a opção, o comprador adquirirá 100 acções a 60 cada. Caso estas sejam imediatamente vendidas ao preço de mercado, obterá um ganho de 15 por acção, ou seja, 1.500 (ignorando-se os custos de transacção). Tendo em consideração o custo inicial da opção (500), o lucro líquido

do comprador será de 10 por acção, ou seja, 1.000.

Consideremos agora a situação em que o preço da acção, na maturidade, seja de 63. Neste caso, o comprador também exercerá a opção, ainda que o lucro líquido seja de apenas 3 por acção, ou seja, 300. Mesmo assim, é preferível perder 200 em relação ao valor potencial máximo do lucro (1.000), do que perder os 500 pagos inicialmente, caso a opção não fosse exercida [9].

A Figura 4.3 apresenta o payoff da opção de compra europeia no seu vencimento, sendo que 5 é o prémio pago pelo comprador para adquirir o direito de compra. Observa-se, a partir da figura, que à medida que o activo subjacente se valoriza, o titular da opção reduz o prejuízo inicial e passa a gerar lucro.

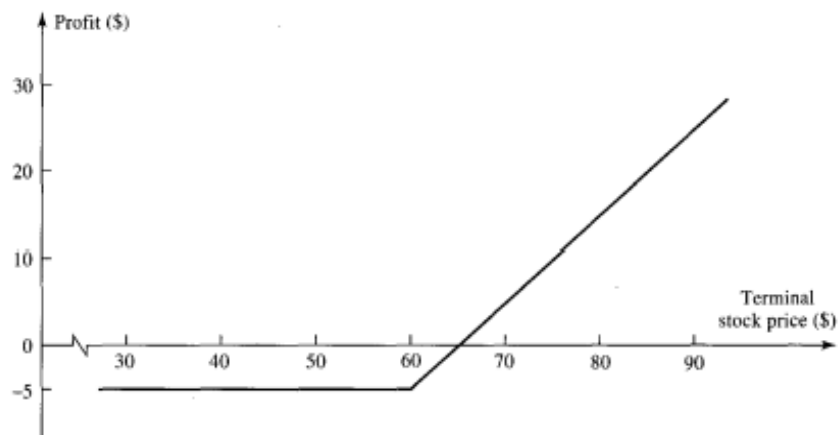


Figura 4.3: Resultado da compra de uma opção europeia em uma acção da Microsoft, o preço da opção é de 5mts e o preço de exercício é de 60mts [9]

- Opções de venda (Put Option):** Concedem ao detentor o direito de vender um determinado activo por um preço e em uma data futura pré-estabelecidos. O vendedor da opção assume a obrigação de comprar o activo nas condições estabelecidas no contrato, caso o detentor da opção a execute. Os adquirentes de opções de venda apostam na queda do preço do ativo subjacente.

Exemplo: Consideremos um negociante que pretenda adquirir um contrato de opção de venda europeia de 100 acções da IBM, cujo preço de exercício é de 70MTs. Ou seja, o comprador adquire o direito de vender 100 acções da IBM por 70MTs cada. Suponhamos que o preço corrente da acção seja de 66MTs, a data de maturidade ocorra em três meses, e o prémio (preço da opção) seja de 7MTs por acção, totalizando um investimento inicial de 700MTs.

Se, na data de maturidade, o preço da acção for inferior a 70MTs, o comprador exercerá a opção. Suponhamos, por exemplo, que o preço da acção seja de 50MTs na maturidade. Ao exercer a opção, o comprador poderá adquirir 100 acções no mercado por 50MTs cada e, ao abrigo do contrato da opção de venda, revendê-las por 70MTs cada, obtendo um ganho bruto de 20MTs por acção, ou seja, 2.000,00MTs (ignorando custos de transacção).

Considerando o custo inicial da opção (700MTs), o lucro líquido será de 13MTs por acção, totalizando 1.300,00MTs.

Por outro lado, se o preço da acção for superior a 70MTs na maturidade, o comprador não exercerá a opção, uma vez que esta não terá valor intrínseco — ninguém venderia por 70MTs algo que vale mais no mercado. Nesse cenário, o comprador perde o montante total pago pelo prémio, ou seja, 7MTs por acção, correspondentes a uma perda total de 700MTs [9].

A Figura 4.4 ilustra o payoff da opção de venda europeia no vencimento. Observa-se que o resultado começa positivo, com o recebimento do prémio, e vai-se transformando em prejuízo à medida que o activo subjacente ultrapassa o preço de exercício da opção lançada. O lucro máximo da operação corresponde ao valor do prémio recebido, enquanto o prejuízo máximo poderá ser tão elevado quanto o valor de mercado do activo no momento do exercício, caso o lançador da opção tenha de entregar as acções.

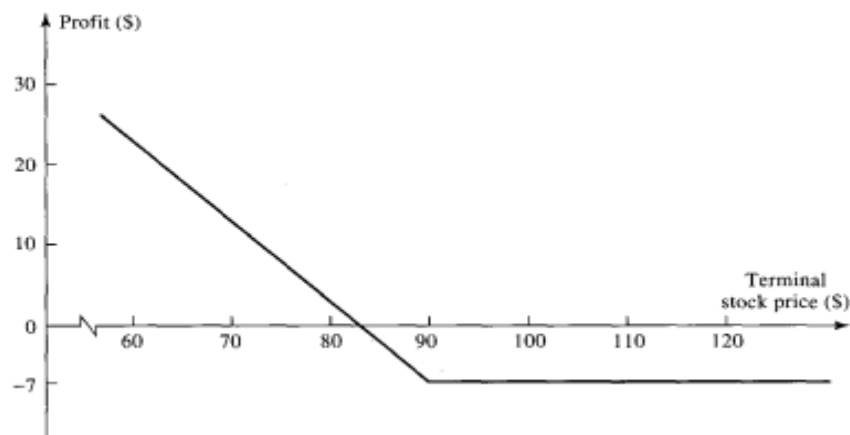


Figura 4.4: Resultado na venda de uma opção europeia em uma ação da IBM, sendo que o preço da opção é de 7mts e o preço de exercício é de 90mts.

#### 4.3.5.2 Posição em opções

De acordo com [9], todo contrato de opção tem dois lados. Um lado é o do investidor que assumiu a posição comprada (ou seja, adquiriu a opção). O outro lado é o do investidor que assumiu a posição short ou vendida (ou seja, vendeu ou lançou a opção). O lançador de uma opção recebe caixa à vista, mas tem um passivo potencial no futuro. O lucro ou perda do lançador é o contrário daquele do comprador da opção.

Existem quatro tipos de posições em opções que são:

- Uma posição comprada em uma opção de compra.
- Uma posição comprada em uma opção de venda.
- Uma posição vendida em uma opção de compra.
- Uma posição vendida em uma opção de venda.

Se  $K$  é o preço de exercício e  $S_T$  é o preço final do ativo subjacente, o resultado de uma posição comprada em uma opção de compra europeia é:

$$\max(S_T - k, 0)$$

Isso reflete o fato de que a opção será exercida se  $S_t > K$  e não será exercido se  $S_t \leq K$ . O resultado para o detentor de uma posição vendida na opção de compra europeia será dado por

$$\max(S_t - k, 0) = \min(k - S_t, 0)$$

O resultado para o titular de uma posição comprada em uma opção de venda europeia é dada por

$$\max(k - S_t, 0)$$

resultado de uma posição vendida em uma opção de venda europeia é

$$\max(k - S_t, 0) = \min(S_t - K, 0)$$

As figuras abaixo mostram os resultados obtidos pelos detentores das posições compradas e vendidas das opções europeias de compra e venda.

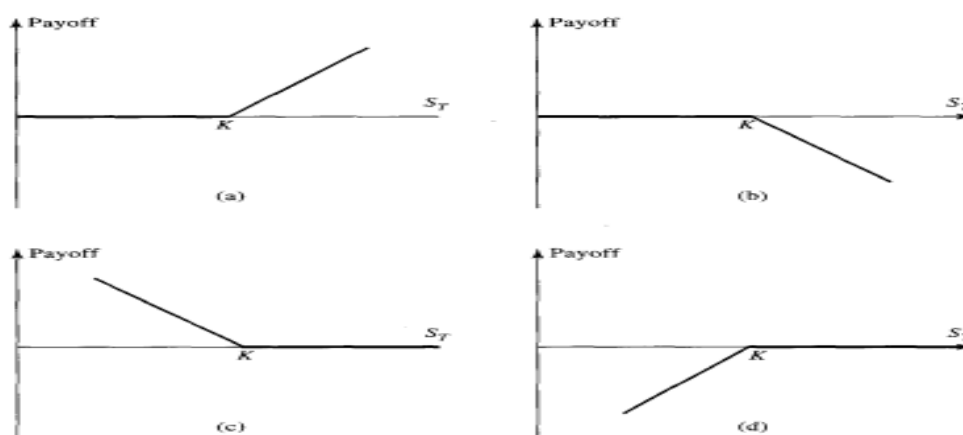


Figura 4.5: A figura (a) corresponde a posição cumprida de compra, (b) corresponde a posição curta de compra, (c) corresponde a posição cumprida de venda e (d) corresponde a posição curta de venda.  $K$  é o preço de exercício e  $S_t$  é preço da ação na data de vencimento.

### 4.3.6 Classificação das opções quanto a relação entre o preço de exercício e o preço atual

As opções podem ser classificadas de três formas de acordo com a relação entre o strike da opção e a cotação atual do activo-objecto [9] e a classificação da opção impacta diretamente na formação de seu preço.

- **No dinheiro” (in the money):**

No caso de uma opção de compra, se o preço da acção for maior que o preço de exercício, isto é,  $S(t) > K$ , diremos que a opção está *dentro do dinheiro* (*in the money*). Para o caso de uma opção de venda, diremos o mesmo quando o preço de exercício for maior que o preço da acção, isto é,  $K > S(t)$ .

Exemplo: A acção da Cahora Bassa de Moçambique está a ser avaliada em 45mts e você possui uma opção de compra com preço de exercício  $K = 40$  mts, então valeria a pena exercer o seu direito. No entanto, para uma opção de venda, esta não estaria dentro do dinheiro, pois o preço de exercício é inferior ao preço da acção na data do seu vencimento, e assim estaria a perder ao vender a opção.

- **No Preço” (at the money):**

Quando o preço da ação e o preço de exercício são iguais,  $S(t) = K$ , dizemos que a opção está *no dinheiro*, isto é, no caso de uma opção de compra. No caso de uma opção de venda, dizemos que a opção está *no dinheiro* se  $K = S(t)$ . Esse tipo de opções traz mais incertezas e, portanto, geralmente são as mais negociadas no mercado devido à alta liquidez, além de apresentarem um prêmio de risco elevado.

- **Fora do dinheiro” (out of the money):**

Uma opção de compra sobre ações está fora do dinheiro quando o preço de exercício é maior que a cotação da ação, isto é,  $S(t) < K$ , e, desta forma, não valeria a pena exercer a opção. No entanto, para uma opção de venda sobre ações, estará fora do dinheiro se  $K < S(t)$ .

**Exemplo:** A ação da Cahora Bassa de Moçambique está sendo avaliada em 45 mts e você possui uma opção de compra com preço de exercício de 50 mts. Neste caso, ela não possui valor intrínseco (não há ganhos), e seu valor reflete apenas a possibilidade da ação vir a subir antes da data de exercício. O mesmo não acontece para a opção de venda, pois o preço de exercício está acima do preço da ação na data de vencimento.

### 4.3.7 Classificação das opções quanto ao instante de execução:

De acordo com [9] as opções quanto ao instante de execução podem ser classificadas em três categorias principais: opções europeias, americanas e exóticas. Cada uma dessas classificações possui características distintas que impactam diretamente a forma como os investidores e traders abordam suas estratégias de negociação e avaliação.

1. Opção Europeia:

A opção europeia é um tipo de contrato financeiro que permite ao titular exercer seu direito de compra ou venda de um activo subjacente somente na data de vencimento, e não antes. Esse tipo de opção é considerado mais simples em comparação com as opções americanas, que podem ser exercidas a qualquer momento antes do vencimento. As opções europeias são frequentemente referidas como "opções do tipo Vanilla" devido à sua estrutura básica e clara, que não possui características adicionais ou complexidades. Essa simplicidade torna as opções europeias uma escolha popular entre os investidores que buscam uma abordagem direta para a negociação de opções.

2. Opção Americana:

A opção americana é um tipo de contrato financeiro que concede ao titular o direito de exercer a opção a qualquer momento após a sua aquisição até a data de vencimento. Isso significa que o comprador pode optar por exercer a opção a qualquer momento, proporcionando maior flexibilidade em comparação com as opções europeias.

3. Opções Exóticas:

As opções exóticas são contratos financeiros que possuem características e estruturas mais complexas do que as opções padrão (como as opções americanas e europeias). Elas podem ter diferentes condições de exercício, pagamento e características de liquidação, o que as torna mais personalizáveis e adaptáveis às necessidades específicas dos investidores. Como exemplo deste tipo de opções podemos citar as opções asiática, opções bermudas, etc.

A compreensão dessas classificações é essencial para investidores e traders, pois elas influenciam não apenas as decisões de compra e venda, mas também a avaliação do risco e o potencial de retorno de diferentes activos financeiros. A escolha entre esses tipos de opções pode ter um impacto

significativo na performance do portfólio, tornando essa análise uma parte crítica da estratégia de investimento.

O quadro a seguir apresenta o resumo das principais diferenças entre os contratos a termo, contratos futuros, opções e Swaps.

	<b>Termo</b>	<b>Futuro</b>	<b>Opções</b>	<b>Swaps</b>
Negociação	Entre as partes	Bolsa	Bolsa/Balcão	Balcão
Contrato	Não Padronizado	Padronizado	Padronizado	A combinar
Vencimento	Data específica	Várias datas	Data específica	A combinar
Liquidação	Vencimento	Diária	Diária/Vencimento	Final
Exercício	Até ao vencimento	Antes do vencimento	Até o vencimento	Vencimento

Tabela 1. Principais diferenças entre contratos a termo, contratos futuros, opções e Swaps.

## 4.4 Precificação de Derivados

### 4.4.1 Introdução a precificação de derivativos

*Modelo de precificação* é um conjunto de equações matemáticas que visam calcular o preço justo de um instrumento financeiro em determinado cenário [19].

Existem vários métodos de precificação de derivativos, para o caso das opções temos o modelo Binomial citado por [20] e modelo de Black e Scholes citado por [20] e [21].

O modelo binomial de precificação de opções, é um método de avaliação de opções desenvolvido em 1979 por [29], este modelo usa um procedimento iterativo, e baseado em árvores de decisão, binomiais ou recombinantes e permite a especificação de nós ou pontos no tempo, durante o período entre a data de avaliação e a data de vencimento da opção.

O modelo de Black e Scholes foi elaborado pelos cientistas Fisher Black e Myron Scholes no final da década de 1960. Este modelo consiste em um conjunto de equações matemáticas avançadas e uma série de variáveis, como os preços atuais das ações, preço de exercício da opção, dividendos esperados, taxas de juros projetadas, tempo de expiração e volatilidade esperada para descrever a dinâmica do preço teórico do ativo subjacente a uma opção .

### 4.4.2 Factores que afetam o preço de uma opção.

De acordo com [9] o preço de uma opção de compra deve respeitar a função abaixo em seu vencimento:

$$V(S, t) = \max(S - K, 0) \tag{4.8}$$

Onde:

- V= Preço da opção;
- S= Preço do ativo objecto;
- T= Momento t;
- K= Preço de exercício da opção.

Os três factores mais importantes que afectam o preço de uma opção são o preço do activo objecto, o tempo para o vencimento do contrato e a volatilidade do activo objecto que é uma medida do “grau de flutuação” de seu preço e é particularmente interessante por conta da dificuldade de ser estimada. Os outros factores que afectam o preço do contrato são o seu preço de exercício e a taxa de juros livre de risco praticada no mercado durante a vida da opção.

A forma pela qual os factores citados acima impactam o preço das opções são:

**Preço de exercício (K):** Para uma call, espera-se que, à medida que o preço de exercício sobe, diminua a probabilidade de que a opção termine com o preço de exercício inferior e, portanto, seja exercida. Por isso, qualquer pessoa que deseje comprar uma call preferirá pagar menos por uma opção com um preço de exercício mais alto. No caso de uma put, um preço de exercício maior aumenta as chances de exercício, elevando o preço da opção.

**Preço do activo objecto (S):** Para uma call, à medida que o preço do activo objecto sobe, aumenta a probabilidade de exercício e, conseqüentemente, eleva-se o preço da opção. No caso de uma put, por analogia, um aumento no preço do ativo objeto implica em uma redução no preço da opção.

**Tempo para o vencimento (T):** A passagem do tempo é um factor importante na precificação das opções, pois reduz a probabilidade de que oscilações favoráveis ocorram no preço do activo. Comparando duas opções do estilo americano, verifica-se que o detentor da opção com prazo mais longo possui mais direitos do que aquele com um contrato de prazo mais curto. Dessa forma, tanto para calls quanto para puts americanas, à medida que o tempo passa, o preço da opção tende a cair.

No caso das calls europeias, operações de arbitragem permitem demonstrar que essa relação se mantém, conforme exposto por [28]. No entanto, para puts europeias, essa relação não é necessariamente válida, pois dois efeitos atuam em direções opostas, tornando imprevisível qual deles prevalecerá: por um lado, quanto maior o tempo restante até o vencimento da opção, maior a probabilidade de que oscilações favoráveis ocorram; por outro, o valor presente do lucro potencial obtido com o exercício da opção diminui.

**Taxa de juros (r):** Quando as taxas de juros aumentam, a taxa de crescimento esperada do preço das ações tende a subir, mas o valor presente dos fluxos financeiros futuros decorrentes de um possível exercício se reduz. Ambos os efeitos actuam na mesma direção em uma put, diminuindo seu valor. No entanto, em uma call, esses efeitos são opostos. Ainda assim, é possível demonstrar, como faz [28], que o primeiro efeito sempre prevalece sobre o segundo, resultando no aumento do preço da call quando as taxas de juros sobem.

**Volatilidade ( $\sigma$ ):** A volatilidade dos retornos do preço do activo objecto actua de forma semelhante à passagem do tempo. Quanto maior a volatilidade, maior a probabilidade de que a opção termine com um valor de exercício inferior e, portanto, seja exercida. Isso ocorre porque a maior volatilidade amplia o intervalo de variação possível para o preço do activo objecto. Dessa forma, quanto maior a volatilidade, maior a chance de ocorrerem oscilações favoráveis, elevando, conseqüentemente, o preço das opções.

# Capítulo 5

## Resolução da Equação de Black Scholes Pelo Método de Crank Nicholson

Neste capítulo discretizamos a equação de Black Scholes com os parâmetros dados pelo método de Crank Nicholson e verificamos as propriedades de consistência, estabilidade e Convergência. Ademais usamos um problema teste para verificar numericamente a precisão do método de Crank Nicholson.

### 5.1 Problema Modelo

Consideremos a seguinte equação diferencial parcial definida por:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(S, t) + rS \frac{\partial f}{\partial S}(S, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(S, t) - rf(S, t) = 0 \quad (5.1)$$

$$f(S, 0) = \max(S - k, 0), S > 0 \quad (5.2)$$

$$f(0, t) = 0, t > 0 \quad (5.3)$$

$$f(S, t) = S - Ke^{-r(t)}, S \rightarrow \infty, t > 0 \quad (5.4)$$

que é uma equação de Black Scholes sujeita as condições iniciais (5.2) e de fronteira (5.3)-(5.4), onde  $r$ ,  $\sigma$ ,  $K$ ,  $T$  e  $S$  representam respetivamente a taxa de juros, a volatilidade, a taxa de exercício, o tempo de vencimento e o preço da opção.

Para esse estudo iremos considerar os seguintes valores  $r = 0.1$ ,  $\sigma = 0.4$ ,  $K = 1$  e  $T = 1$ , onde passamos a ter a seguinte equação:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(S, t) + 0.1S \frac{\partial f}{\partial S}(S, t) + 0.08S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(S, t) - 0.1f(S, t) = 0 \quad (5.5)$$

com as condições (5.2)-(5.4) transformados para:

$$f(S, 0) = \max(S - 1, 0), S > 0 \quad (5.6)$$

$$f(0, t) = 0, t > 0 \quad (5.7)$$

$$f(S, t) = S - e^{-0.1t}, S \rightarrow \infty, t > 0 \quad (5.8)$$

A equação (5.1) é amplamente empregada na precificação de opções, particularmente nas opções europeias, que podem ser exercidas apenas na data de vencimento [9]. Matematicamente, o modelo de Black-Scholes é uma equação diferencial com derivadas parciais do segundo grau, classificada como hiperbólica [27].

## 5.2 Discretização do Modelo

Apresentamos a seguir a discretização da equação (5.1) pelo método de Crank-Nicolson. O método de Crank-Nicolson é escolhido para discretizar a Equação de Black-Scholes por ser um método implícito de segunda ordem em espaço e tempo, o que o torna mais confiável para avaliações financeiras [27]. Ele permite um tratamento eficiente de condições de contorno essenciais na avaliação de opções e a utilização de malhas não uniformes, adaptando-se bem a áreas com variações bruscas nos preços.

O primeiro passo para discretizar este problema, é discretizar o domínio contínuo em pontos discretos. O domínio temporal ( $t$ ) é dado pelo intervalo  $[0, T]$  e o domínio em função da variável espacial ( $S$ ) que representa o preço, em princípio, é dado pelo intervalo  $[0, +\infty[$ , mas substituímos  $+\infty$  por algum número grande  $S_{max}$  e desta forma nosso intervalo fica  $[0, S_{max}]$ . Agora vamos dividir o intervalo de tempo em  $N$  partes igualmente espaçadas e o intervalo do preço em  $M$  peças igualmente espaçadas produzindo uma malha (Figura 5.1) cujos os passos e os nós são coordenadas formadas pelo produto cartesiano.

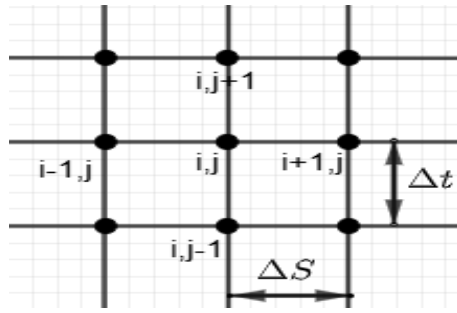


Figura 5.1: Malha Bidimensional

Neste contexto definimos os seguintes incrementos:

$$\Delta S = \frac{S_{max}}{M} \quad S = (0, \Delta S, 2\Delta S, \dots, M\Delta S = S_{max})$$

e

$$\Delta t = \frac{T}{N} \quad t = (0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, N\Delta t = T)$$

Denotaremos as extremidades dos intervalos em  $S$  por  $S_i = i\Delta S$ , e em  $t$  por  $t_j = j\Delta t$ , e seguindo esta notação, chamaremos  $f_{i,j} = f(S_i, t_j)$ .

Sejam as equações das derivadas progressivas e regressivas seguintes:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(S, t) = \frac{f(S, t + \Delta t) - f(S, t)}{\Delta t} + O(\Delta t), \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(S, t) = \frac{f(S, t) - f(S, t - \Delta t)}{\Delta t} + O(\Delta t), \quad (5.10)$$

com os erros de truncatura que são iguais a  $O(\Delta t)$ .

E sejam também as fórmulas de aproximação da 1ª derivada em função de  $x$  e da aproximação de 2ª derivada em função a  $x$  dadas abaixo:

$$\frac{\partial f}{\partial S}(S, t) \approx \frac{f(S + \Delta S, t) - f(S - \Delta S, t)}{2\Delta S} + O(S^2) \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(S, t) \approx \frac{f(S + \Delta S, t) - 2f(S, t) + f(S - \Delta S, t)}{2\Delta S^2} + O(S^2) \quad (5.12)$$

com os erros de truncatura que são iguais a  $O(\Delta S^2)$ .

Substituindo as equações (5.10), (5.11) e (5.12) na equação (5.5) obtemos a equação (5.13) abaixo, onde aproximamos a derivada em função do tempo pela diferença regressiva e a derivada em função do espaço pelas diferenças centrais de 1ª e de 2ª ordem respectivamente.

$$\begin{aligned} & \frac{f(S, t) - f(S, t - \Delta t)}{\Delta t} + \left[ 0.08S^2 \frac{f(S + \Delta S, t - \Delta t) - 2f(S, t - \Delta t) + f(S - \Delta S, t - \Delta t)}{2\Delta S^2} \right. \\ & \left. + 0.08S^2 \frac{f(S + \Delta S, t) - 2f(S, t) + V(S - \Delta S, t)}{2\Delta S^2} \right] + (0.1)S \frac{f(S + \Delta S, t - \Delta t) - f(S - \Delta S, t - \Delta t)}{4\Delta S} \\ & + (0.1)S \frac{f(S + \Delta S, t) - f(S - \Delta S, t)}{4\Delta S} - [0.05f(S, t - \Delta t) + 0.05f(S, t)] \approx 0 \quad (5.13) \end{aligned}$$

Considerando a relação (5.13) apenas nos pontos  $(S_i, t_j)$  e definindo uma aproximação dos valores exatos  $f(S_i, t_j)$  por  $f_i^j$ , deduzimos que o método de Crank-Nicolson para a equação de Black-Scholes é dada por

$$\begin{aligned} & \frac{f_i^j - f_i^{j-1}}{\Delta t} + \left[ 0.08(i\Delta S)^2 \frac{f_{i+1}^{j-1} - 2f_i^{j-1} + f_{i-1}^{j-1}}{2\Delta S^2} + 0.08(i\Delta S)^2 \frac{f_{i+1}^j - 2f_i^j + f_{i-1}^j}{2\Delta S^2} \right] \\ & + \left[ 0.1(i\Delta S) \frac{f_{i+1}^{j-1} - f_{i-1}^{j-1}}{4\Delta S} + 0.1(i\Delta S) \frac{f_{i+1}^j - f_{i-1}^j}{4\Delta S} \right] - [0.05f_i^{j-1} + 0.05f_i^j] = 0 \quad (5.14) \end{aligned}$$

o que se pode reescrever da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & -\frac{\Delta t}{4}(0.16i^2 - 0.1i)f_{i-1}^j + \frac{\Delta t}{2}(1 + (0.16i^2 + 0.1))f_i^j - \frac{\Delta t}{4}(0.16i^2 + 0.1i)f_{i+1}^j = \\ & \frac{\Delta t}{4}(0.16i^2 - 0.1i)f_{i-1}^{j-1} + \frac{\Delta t}{2}(1 - (0.16i^2 + 0.1))f_i^{j-1} + \frac{\Delta t}{4}(0.16i^2 + 0.1i)f_{i+1}^{j-1} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Aqui, os coeficientes que multiplicam  $f_{i-1}^j$ ,  $f_i^j$  e  $f_{i+1}^j$  representam a parte implícita do método, enquanto que os  $f_{i-1}^{j-1}$ ,  $f_i^{j-1}$  e  $f_{i+1}^{j-1}$  a parte explícita. Finalmente, podemos reescrever a equação de forma simplificada como:

$$-a_i f_{i-1}^j + (1 - b_i) f_i^j - c_i f_{i+1}^j = a_i f_{i-1}^{j-1} + (1 + b_i) f_i^{j-1} + c_i f_{i+1}^{j-1} \quad (5.16)$$

com os coeficientes

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{\Delta t}{4}(0.16i^2 - 0.1i); \\ b_i &= -\frac{\Delta t}{2}(0.16i^2 + 0.1); \\ c_i &= \frac{\Delta t}{4}(0.16i^2 + 0.1i); \end{aligned}$$

para  $j = 1, \dots, n$  e  $i = 1, \dots, M - 1$ .

A discretização pelo método de Crank Nicholcon resulta matrizes tridiagonais que podem ser resolvidas em cada passo de tempo. A equação (5.16) pode ser expressa na forma matricial abaixo:

$$A\mathbf{F}^{j-1} = B\mathbf{F}^j + K^j \quad (5.17)$$

onde  $A$  e  $B$  são as seguintes matrizes tridiagonais abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 + b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 1 + b_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & 1 + b_3 & c_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{M-1} & 1 + b_{M-1} & c_{M-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_M & 1 + b_M \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 - b_1 & -c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 1 - b_2 & -c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_3 & 1 - b_3 & -c_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -a_{M-1} & 1 - b_{M-1} & -c_{M-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_M & 1 - b_M \end{bmatrix}$$

Vetores  $f^{j-1}$ ,  $f^j$  e  $K^j$ :

$$\mathbf{f}^{j-1} = \begin{bmatrix} f_1^{j-1} \\ f_2^{j-1} \\ f_3^{j-1} \\ \vdots \\ f_{M-1}^{j-1} \\ f_{M-1}^{j-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}^j = \begin{bmatrix} f_1^j \\ f_2^j \\ f_3^j \\ \vdots \\ f_{M-2}^j \\ f_{M-1}^j \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}^j = \begin{bmatrix} a_1 f_0^j + a_1 f_0^{j-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_{M-1} f_{M-1}^j + c_1 f_{M-1}^{j-1} \end{bmatrix}$$

A equação matricial (5.17) pode ser resolvida diretamente ou utilizando métodos numéricos, como decomposição LU, eliminação de Gauss ou métodos iterativos, como Gauss-Seidel.

## 5.3 Análise de convergência do método

Geralmente, para aferir se a solução numérica encontrada é aceitável ou se se aproxima da solução real do problema, realiza-se a análise de convergência. Esta análise consiste em verificar se a solução numérica converge para a solução analítica em cada ponto  $(s, t)$  do domínio, quando  $\Delta t$  e  $\Delta s$  tendem a zero, mantendo-se os pontos  $(s, t)$  fixos, com  $s = i\Delta s$  e  $t = i\Delta t$  (isto é, quando a malha é refinada). No entanto, conforme descrito no Capítulo 3, pelo Teorema de Lax, o estudo da convergência está relacionado com o estudo da consistência e da estabilidade. Este teorema garante que, se um esquema diferencial cumpre as propriedades de consistência e estabilidade, então é convergente.

### 5.3.1 Consistência

A consistência procura mostrar quão próxima a equação discretizada está da equação diferencial parcial original. Para demonstrar a consistência de um método numérico, vamos determinar o erro de truncamento, expandindo os termos  $f(x_i, t_{j+1})$  e  $f(x_i, t_j)$  pela série de Taylor. Fazendo a diferença entre estas expressões e, após algumas manipulações matemáticas, obtemos a ordem do esquema.

Consideremos a expressão do erro de truncamento dada abaixo por:

$$T_{i,j} = \frac{f_i^j - f_i^{j-1}}{\Delta t} + [0.08(i\Delta S)^2 \frac{f_{i+1}^{j-1} - 2f_i^{j-1} + f_{i-1}^{j-1}}{2\Delta S^2} + 0.08(i\Delta S)^2 \frac{f_{i+1}^j - 2f_i^j + f_{i-1}^j}{2\Delta S^2}] + [0.1(i\Delta S) \frac{f_{i+1}^{j-1} - f_{i-1}^{j-1}}{4\Delta S} + 0.1(i\Delta S) \frac{f_{i+1}^j - f_{i-1}^j}{4\Delta S}] - [0.05f_i^{j-1} + 0.05f_i^j] \quad (5.18)$$

para determinar o erro de truncamento vamos expandir os termos  $f_{i-1,j}$ ,  $f_{i+1,j}$ ,  $f_{i-1,j-1}$ ,  $f_{i,j-1}$  e  $f_{i+1,j-1}$  em serie de Taylor, em torno do ponto  $(s_i, t_j)$ :

sejam as expansões dos termos  $f_{i-1,j}$ ,  $f_{i+1,j}$ ,  $f_{i-1,j-1}$ ,  $f_{i,j-1}$  e  $f_{i+1,j-1}$  dadas abaixo:

$$f_{i,j-1} = f - \Delta t f_t + \frac{\Delta t^2}{2} F_{tt} + \dots \quad (5.19)$$

$$f_{i-1,j} = f - \Delta s f_s + \frac{\Delta s^2}{2} f_{ss} + \dots \quad (5.20)$$

$$f_{i+1,j} = f + \Delta s f_s + \frac{\Delta s^2}{2} f_{ss} + \dots \quad (5.21)$$

$$f_{i-1,j-1} = f - \Delta t f_t - \Delta s f_s + \frac{1}{2!} [\Delta t^2 f_{tt} + 2\Delta t \Delta s F_{st} + \Delta s^2 f_{ss}] + \dots \quad (5.22)$$

$$f_{i+1,j-1} = f - \Delta t f_t + \Delta s f_s + \frac{1}{2!} [\Delta t^2 f_{tt} - 2\Delta t \Delta s f_{st} + \Delta s^2 f_{ss}] + \dots \quad (5.23)$$

substituído-se o termo  $f_{i,j-1}$  pela expansão (5.19) na primeira parte da equação (5.18), obtemos a seguintes expressão:

$$\frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta t} = \frac{f_{i,j} - (f - \Delta t f_t + \frac{\Delta t^2}{2} f_{tt} + O(\Delta t)^3)}{\Delta t} \quad (5.24)$$

depois de somar os termos iguais e efetuar a simplificação do  $\Delta t$ , resulta o seguinte:

$$f_t - \frac{\Delta t}{2} f_{tt} + O(\Delta t)^2 \quad (5.25)$$

consideremos ainda em (5.18) o termo seguinte:

$$[0.08(i\Delta S)^2 \frac{f_{i+1}^{j-1} - 2f_i^{j-1} + f_{i-1}^{j-1}}{2\Delta S^2} + 0.08(i\Delta S)^2 \frac{f_{i+1}^j - 2f_i^j + f_{i-1}^j}{2\Delta S^2}] \quad (5.26)$$

iremos evidenciar os fatores  $\frac{0.08(i\Delta S)^2}{2\Delta S^2}$  e substituiremos os termos  $f_{i+1}^{j-1}, f_{i-1}^{j-1}, f_i^{j-1}, f_i^{j-1}$  e  $f_{i+1,j}$  pelas respectivas expansões em serie de Taylor, onde teremos:

$$\begin{aligned} & \frac{0.08(i\Delta S)^2}{2\Delta S^2} \left[ \left[ f - \Delta t f_t + \Delta s f_s + \frac{1}{2!} [\Delta t^2 f_{tt} - 2\Delta t \Delta s f_{st} + \Delta s^2 f_{ss}] + \frac{1}{3!} \left[ -\Delta t^3 f_{ttt} + 3\Delta t^2 \Delta s f_{tts} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - 3\Delta t \Delta s^2 f_{tss} + \Delta s^3 f_{sss} \right] + O((\Delta t)^4 + (\Delta s)^4) \right] - 2 \left( f - \Delta s f_s + \frac{\Delta t^2}{2} f_{ss} + \frac{1}{3!} \Delta t^3 f_{sss} + O(\Delta s)^4 \right) + \left[ f - \Delta t f_t + \right. \right. \\ & \left. \left. - \Delta s f_s + \frac{1}{2!} [\Delta t^2 f_{tt} + 2\Delta t \Delta s f_{st} + \Delta s^2 f_{ss}] + \frac{1}{3!} \left[ -\Delta t^3 f_{ttt} - 3\Delta t^2 \Delta s f_{tts} - 3\Delta t \Delta s^2 f_{tss} - \Delta s^3 f_{sss} \right] + O((\Delta t)^4 \right. \right. \\ & \left. \left. + (\Delta s)^4) \right] + \left[ f_i^j + \Delta s f_s + \frac{\Delta t^2}{2} f_{ss} + \frac{\Delta s^3}{3!} f_{sss} + O(\Delta s)^4 - 2f_i^j + f_i^j - \Delta s f_s + \frac{\Delta s^2}{2} f_{ss} + \frac{\Delta s^3}{3!} f_{sss} + O(\Delta s)^4 \right] \right] \quad (5.27) \end{aligned}$$

após as operações de soma e subtração obtemos a seguinte expressão resultante:

$$\frac{0.08(i\Delta S)^2}{2\Delta S^2} [2\Delta s^2 f_{ss} - \Delta t \Delta s^2 f_{tss} + O(\Delta s)^4 + O(\Delta t)^4] \quad (5.28)$$

depois de simplificar  $\Delta s$  obtemos a seguinte expressão resultante:

$$0.08(i\Delta S)^2 [f_{ss} - \frac{1}{2} \Delta t f_{tss}] + O((\Delta t)^4 + (\Delta s)^2) \quad (5.29)$$

para o terceiro termo da equação (5.18) iremos considerar

$$[0.1(i\Delta S) \frac{f_{i+1}^{j-1} - f_{i-1}^{j-1}}{4\Delta S} + 0.1(i\Delta S) \frac{f_{i+1}^j - f_{i-1}^j}{4\Delta S}] \quad (5.30)$$

para essa expressão evidenciamos o fator  $\frac{0.1(i\Delta S)}{4\Delta S}$  e expandiremos os termos  $f_{i+1}^{j-1}, f_{i-1}^{j-1}, f_{i+1}^j$  e  $f_{i-1}^j$  pelas correspondentes expansões em serie de Taylor:

$$\begin{aligned} & \frac{0.1(i\Delta S)}{4\Delta S} \left[ \left[ f - \Delta t f_t + \Delta s f_s + \frac{1}{2!} [\Delta t^2 - 2\Delta t \Delta s f_{st} + \Delta s^2] + \frac{1}{3!} \left[ -\Delta t^3 f_{ttt} + 3\Delta t^2 \Delta s f_{tts} - 3\Delta t \Delta s^2 f_{tss} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \Delta s^3 f_{sss} + O((\Delta t)^4 + (\Delta s)^4) \right] - (f - \Delta t f_t - \Delta s f_s + \frac{1}{2!} [\Delta t^2 + 2\Delta t \Delta s f_{st} + \Delta s^2] + \frac{1}{3!} \left[ -\Delta t^3 f_{ttt} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - 3\Delta t^2 \Delta s f_{tts} - 3\Delta t \Delta s^2 f_{tss} - \Delta s^3 f_{sss} + O((\Delta t)^4 + (\Delta s)^4) \right] + \left[ f + \Delta s f_s + \frac{\Delta t^2}{2} f_{ss} + \frac{1}{3!} f_{sss} + O(\Delta s)^4 - \right. \right. \\ & \left. \left. - (f - \Delta s f_s + \frac{\Delta t^2}{2} f_{ss} - \frac{(\Delta t)^3}{3!} f_{sss} + O(\Delta s)^4) \right] \right] \quad (5.31) \end{aligned}$$

que após as operações de adição e soma teremos a seguinte expressão resultante:

$$\frac{0.1(i\Delta S)}{4\Delta S} \left[ 4\Delta s f_s - 2\Delta t \Delta s f_{st} + \Delta t^2 \Delta s f_{tts} + \frac{4}{3!} (\Delta s)^3 f_{sss} + O((\Delta t)^4 + (\Delta s)^4) \right] \quad (5.32)$$

depois de simplificar  $\Delta s$  obtemos a seguinte expressão resultante:

$$0.1(i\Delta s) \left[ f_s - \frac{1}{2}\Delta t f_{st} + \frac{1}{4}\Delta t^2 f_{tts} + \frac{1}{3!}\Delta s^2 f_{sss} + O((\Delta t)^4 + (\Delta s)^3) \right] \quad (5.33)$$

e para ultima expressão dada por  $[0.05f_i^{j-1} + 0.05f_i^j]$  iremos evidenciar o fator (0.05) e expandir-mos o termo  $f_i^{j-1}$  pela correspondente expansão em serie de Taylor.

$$0.05[f_i^j - \Delta t f_t + O(\Delta t^2) + f_i^j] = 0.05[2f_i^j - \Delta t f_t + O(\Delta t^2)] \quad (5.34)$$

depois a multiplicação a expressão (5.34) pelo fator (0.05) obtemos a seguinte expressão resultante:

$$0.1f_i^j - 0.05\Delta t f_t + O(\Delta t^2) \quad (5.35)$$

subtituido todas expressões resultantes (5.25), (5.29), (5.33) e (5.35) na expressão do erro de truncamento (5.18) teremos:

$$T_i^j = f_t - \frac{\Delta t}{2} f_{tt} + O(\Delta t)^2 + 0.08(i\Delta s)^2 [-f_{ss} - \frac{1}{2}\Delta t f_{tss}] + O((\Delta t)^2 + (\Delta s)^2) + 0.1(i\Delta s) [f_s - \frac{\Delta t f_{ts}}{2} + \frac{(\Delta t)^2}{4} f_{tts} + \frac{\Delta s^2}{3!} f_{sss} + O((\Delta t)^3 + (\Delta s)^3)] - 0.1F_i^j + 0.5\Delta t f_t + O(\Delta t^2) \quad (5.36)$$

evidenciado o  $\Delta t$  e o fator  $(0.1i\Delta s)$  e reorganizando a expressão do erro teremos a expressão seguinte:

$$T_i^j = f_t + 0.08S^2 f_{ss} + 0.1S f_s - 0.1f + \Delta t \left[ \frac{1}{2} f_{tt} - 0.04(i\Delta s)^2 f_{tss} - 0.1(i\Delta s) \frac{f_{ts}}{2} + 0.5f_t \right] + 0.1(i\Delta s) \left[ \frac{1}{4}\Delta t^2 f_{tts} + \frac{1}{6}\Delta s^2 f_{sss} \right] + O(\Delta t)^2 + (\Delta s)^2 \quad (5.37)$$

sendo que,  $f_t + 0.08S^2 f_{ss} + 0.1S f_s - 0.1f = 0$  e ficamos com a seguinte expressão do erro de truncamento:

$$T_i^j = -\frac{1}{2}\Delta t \left[ f_{tt} + 0.08(i\Delta s)^2 f_{tss} + 0.1(i\Delta s) f_{ts} - 0.1f_t \right] + 0.1(i\Delta s) \left[ \frac{1}{4}\Delta t^2 f_{tts} + \frac{1}{6}\Delta s^2 f_{sss} \right] + O(\Delta t)^2 + (\Delta s)^2 \quad (5.38)$$

A primeira expressão dentro de parênteses do erro de truncamento (5.39) é a derivada da equação de Black Scholes (5.5) em função da variável t e desta forma também será igual a 0. E desta forma a expressao do erro sera:

$$T_i^j = 0.1(i\Delta s) \left[ \frac{1}{4}\Delta t^2 f_{tts} + \frac{1}{6}\Delta s^2 f_{sss} \right] + O(\Delta t)^2 + (\Delta s)^2 \quad (5.39)$$

Observe que  $\left[ \frac{1}{4}\Delta t^2 f_{tts} + \frac{1}{6}\Delta s^2 f_{sss} \right]$  é a parte principal do erro de truncamento, desta forma podemos verificar que as variáveis de tempo e de espaço são de ordem 2, daqui podemos concluir que o esquema é consistente e é de ordem 2.

### 5.3.2 Estabilidade

A estabilidade esta inteiramente ligada a questões de prolongamento dos erros cometidos ao longo das substituições das derivadas pelas aproximações, ou seja, está relacionada ao crescimento ou decaimento dos erros decorrentes das várias operações aritméticas associadas com a solução das

equações algébricas. Segundo [27] um método simples e usual para analisar a estabilidade é o critério de Von Neumann, neste método, a solução da equação de diferenças finitas é expandido em série de Fourier e o decaimento ou crescimento do fator de amplificação indica se o método é ou não estável ( $|\xi| \leq 1$ ). Entretanto, esse critério apenas pode ser usado quando a equação é do tipo linear e com coeficientes a constantes.

Para uma malha bidimensional, supõe-se que a solução da equação (5.5) seja do tipo

$$f_{s,t} = \xi_t e^{s\beta i} \quad (5.40)$$

onde  $I = \sqrt{-1}$ .

Como definimos uma malha bidimensional, teremos que considerar os seguintes parâmetros:

$$f(s_i, t_j) = e^{t_j} e^{s_i \beta I}$$

onde  $s_i = i\Delta s$  e  $t_j = j\Delta t$ . Substituindo esses em 5.41, segue

$$f_{s,t} = \xi_j e^{I\beta i \Delta s} \quad (5.41)$$

Vamos supor que (5.41) seja a solução da equação (5.16), e a partir daí tentamos encontrar  $\beta$  que satisfaça a equação (5.16).

Assim sendo, substituindo (5.41) na equação (5.16), temos

$$-a_i \xi_j e^{I\beta(i-1)\Delta s} + (1-b_i) \xi_j e^{I\beta i \Delta s} - c_i \xi_j e^{I\beta(i+1)\Delta s} = a_i \xi^{j-1} e^{I\beta(i-1)\Delta s} + (1+b_i) \xi^{j-1} e^{I\beta i \Delta s} + c_i \xi^{j-1} e^{I\beta(i+1)\Delta s}$$

Cancelando o termo em comum  $\xi_j e^{I\beta i \Delta s}$ , teremos a seguinte expressão:

$$a_i \xi_j e^{-i\beta \Delta s} + (1-b_i) \xi_j - c_i \xi_j e^{i\beta \Delta s} = a_i \xi^{j-1} e^{-i\beta \Delta s} + (1+b_i) \xi^{j-1} + c_i \xi^{j-1} e^{i\beta \Delta s}$$

Colocando em evidência os termos  $\xi_{j-1}$  e  $\xi_j$ , ficamos com a seguinte expressão:

$$\xi_j (-a_i e^{-i\beta \Delta s} + (1-b_i) - c_i e^{i\beta \Delta s}) = \xi^{j-1} (a_i e^{-i\beta \Delta s} + (1+b_i) + c_i e^{i\beta \Delta s})$$

Organizando a expressão, teremos a seguinte equação:

$$\xi_j (-a_i e^{-i\beta \Delta s} + (1-b_i) - c_i e^{i\beta \Delta s}) = \xi^{j-1} (a_i e^{-i\beta \Delta s} + (1+b_i) + c_i e^{i\beta \Delta s})$$

$$\frac{\xi_j}{\xi_{j-1}} = \xi$$

Sendo que, para que o esquema seja estável, o módulo de  $\xi$  deve ser menor ou igual a 1 para todos os números de onda  $\beta$ .

Portanto, seja:

$$\xi = \left| \frac{a_i e^{-I\beta \Delta s} + (1+b_i) + c_i e^{I\beta \Delta s}}{-a_i e^{-I\beta \Delta s} + (1-b_i) - c_i e^{I\beta \Delta s}} \right| \quad (5.42)$$

Substituímos os coeficientes  $a_i$ ,  $b_i$  e  $c_i$  (5.16) pelos respectivos valores na equação (5.42):

$$\xi = \left| \frac{\left(\frac{\Delta t}{4}(0.16i^2 - 0.1i)\right) e^{-i\beta \Delta s} + \left(1 - \frac{\Delta t}{2}(0.16i^2 + 0.1)\right) + \left(\frac{\Delta t}{4}(0.16i^2 + 0.1i)\right) e^{i\beta \Delta s}}{-\left(\frac{\Delta t}{4}(0.16i^2 - 0.1i)\right) e^{-i\beta \Delta s} + \left(1 + \frac{\Delta t}{2}(0.16i^2 + 0.1)\right) - \left(\frac{\Delta t}{4}(0.16i^2 + 0.1i)\right) e^{i\beta \Delta s}} \right|$$

Nesta equação, desembaraçando os parênteses, obtemos a seguinte expressão resultante:

$$\xi = \left| \frac{\frac{\Delta t}{4} \cdot 0.16i^2 e^{-i\beta\Delta s} - \frac{\Delta t}{4} \cdot 0.1ie^{-i\beta\Delta s} + 1 - \frac{\Delta t}{2} \cdot 0.16i^2 - \frac{\Delta t}{2} \cdot 0.1 + \frac{\Delta t}{4} \cdot 0.16i^2 e^{i\beta\Delta s} + \frac{\Delta t}{4} \cdot 0.1ie^{i\beta\Delta s}}{-\frac{\Delta t}{4} \cdot 0.16i^2 e^{-i\beta\Delta s} + \frac{\Delta t}{4} \cdot 0.1ie^{-i\beta\Delta s} + 1 + \frac{\Delta t}{2} \cdot 0.16i^2 + \frac{\Delta t}{2} \cdot 0.1 - \frac{\Delta t}{4} \cdot 0.16i^2 e^{i\beta\Delta s} - \frac{\Delta t}{4} \cdot 0.1ie^{i\beta\Delta s}} \right|$$

Colocamos em evidência os termos  $(0.16i^2)\frac{\Delta t}{2}$ ,  $(0.1)\frac{\Delta t}{4}$  e reorganizamos os termos da fração, obtendo a seguinte expressão:

$$\xi = \left| \frac{(0.16i^2)\frac{\Delta t}{2} \left(\frac{1}{2}e^{-i\beta\Delta s} + \frac{1}{2}e^{i\beta\Delta s} - 1\right) + (0.1i)\frac{\Delta t}{4} \left(-e^{-i\beta\Delta s} + e^{i\beta\Delta s}\right) + 1 - (0.1)\frac{\Delta t}{2}}{-(0.16i^2)\frac{\Delta t}{2} \left(\frac{1}{2}e^{-i\beta\Delta s} + \frac{1}{2}e^{i\beta\Delta s} - 1\right) - (0.1i)\frac{\Delta t}{4} \left(-e^{-i\beta\Delta s} + e^{i\beta\Delta s}\right) + 1 + (0.1)\frac{\Delta t}{2}} \right|$$

Sabe-se que as expressões dentro de parênteses  $\frac{1}{2}(e^{-\Delta s\beta I} + e^{\Delta s\beta I})$  e  $(-e^{-\Delta s\beta I} + e^{\Delta s\beta I})$  em  $\xi$  podem ser substituídas pelas seguintes identidades trigonométricas  $\left(\cos \Delta s\beta = \frac{e^{I\Delta s\beta} + e^{-I\Delta s\beta}}{2}\right)$  e  $\left(\sin \Delta s\beta = \frac{e^{I\Delta s\beta} - e^{-I\Delta s\beta}}{2I}\right)$ , e deste modo obtemos a seguinte expressão:

$$|\xi| = \left| \frac{0.16i^2\frac{\Delta t}{2}(\cos \Delta s\beta - 1) + 0.1i\frac{\Delta t}{4}(2I \sin(\beta\Delta s)) + 1 - 0.1\frac{\Delta t}{2}}{-0.16i^2\frac{\Delta t}{2}(\cos(\Delta s\beta) - 1) - 0.1i\frac{\Delta t}{4}(2I \sin(\Delta s\beta)) + 1 + 0.1\frac{\Delta t}{2}} \right|$$

Neste passo, vamos organizar a expressão, onde teremos a seguinte expressão resultante:

$$|\xi| = \left| \frac{1 - 0.8i^2\Delta t(1 - \cos(\Delta s\beta)) - 0.1\frac{\Delta t}{2} + 0.1i^2\frac{\Delta t}{2}(I \sin(\beta\Delta s))}{1 + 0.8i^2\Delta t(1 - \cos(\Delta s\beta)) + 0.1\frac{\Delta t}{2} - 0.1i^2\frac{\Delta t}{2}(I \sin(\Delta s\beta))} \right| \leq 1$$

E pela norma e propriedade de módulos de números complexos, teremos que:

$$|\xi|^2 = \frac{(1 - 0.8i^2\Delta t(1 - \cos \Delta s\beta) - 0.1\frac{\Delta t}{2})^2 + (0.1i\frac{\Delta t}{2}(\sin(\beta\Delta s)))^2}{(1 + 0.8i^2\Delta t(1 - \cos(\Delta s\beta)) + 0.1\frac{\Delta t}{2})^2 + (0.1i\frac{\Delta t}{2}(\sin(\Delta s\beta)))^2}$$

Reorganizando a expressão, teremos a seguinte expressão:

$$|\xi|^2 = \frac{(1 - 0.8i^2\Delta t(1 - \cos \Delta s\beta) - 0.05\Delta t)^2 + (0.025i^2\Delta t^2(\sin^2(\beta\Delta s)))}{(1 + 0.8i^2\Delta t(1 - \cos(\Delta s\beta)) + 0.05\Delta t)^2 + (0.025i^2\Delta t^2(\sin^2(\Delta s\beta)))}$$

Da identidade trigonométrica  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , segue que  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ , e portanto podemos transformar a equação e obter:

$$|\xi|^2 = \frac{(1 - 0.8i^2\Delta t(1 - \cos \Delta s\beta) - 0.05\Delta t)^2 + (0.025i^4\Delta t^2(1 - \cos^2(\Delta s\beta)))}{(1 + 0.8i^2\Delta t(1 - \cos(\Delta s\beta)) + 0.05\Delta t)^2 + (0.025i^4\Delta t^2(1 - \cos^2(\Delta s\beta)))}$$

Lembrando que  $\cos \Delta s\beta$  irá variar nos intervalos  $[-1; 1]$ , então teremos os seguintes casos:

Caso 1: Para  $\cos \Delta s\beta = -1$ , teremos que:

$$|\xi|^2 = \frac{(1 - 0.8i^2\Delta t(2) - 0.05\Delta t)^2 + (0.025i^4\Delta t^2(0))}{(1 + 0.8i^2\Delta t(2) + 0.05\Delta t)^2 + (0.025i^4\Delta t^2(0))}$$

Organizando essa expressão, teremos a seguinte expressão resultante:

$$|\xi|^2 = \frac{(1 - 0.8i^2\Delta t(2) - 0.05\Delta t)^2}{(1 + 0.8i^2\Delta t(2) + 0.05\Delta t)^2}$$

Como o numerador é menor que o denominador, podemos verificar que  $|\xi|$  cumpre com a condição de estabilidade, ou seja,  $|\xi|^2 \leq 1$ .

Caso 2: Para  $-1 < \cos(\beta\Delta s) < 1$ , teremos que:

Para  $0 < \cos(\beta\Delta s) < 1$ :

$$|\xi| = \frac{(1 - 0.8i^2\Delta t(1 - \cos \Delta s\beta) - 0.05\Delta t)^2 + (0.025i^2\Delta t^2(1 - \cos^2(\Delta s\beta)))}{(1 + 0.8i^2\Delta t(1 - \cos(\Delta s\beta)) + 0.05\Delta t)^2 + (0.025i^2\Delta t^2(1 - \cos^2(\Delta s\beta)))}$$

Como sabemos,  $\Delta t > 0$  e  $\cos(\beta\Delta s)$  é positivo, pois está na parte positiva. Deste modo, no numerador estaremos subtraindo quantidades positivas de 1, e no denominador estaremos adicionando as mesmas quantidades a 1. Então podemos ver que o numerador é menor em relação ao denominador e, portanto,  $|\xi|^2 \leq 1$ .

Para  $-1 < \cos(\beta\Delta s) < 0$ :

$$|\xi| = \frac{(1 - 0.8i^2\Delta t(1 - \cos \Delta s\beta) - 0.05\Delta t)^2 + (0.025i^2\Delta t^2(1 - \cos^2(\Delta s\beta)))}{(1 + 0.8i^2\Delta t(1 - \cos(\Delta s\beta)) + 0.05\Delta t)^2 + (0.025i^2\Delta t^2(1 - \cos^2(\Delta s\beta)))}$$

Como sabemos,  $\Delta t > 0$  e  $\cos(\beta\Delta s)$  será positivo, pois varia de  $] -1; 0[$ , e adicionando a 1 na primeira parte da expressão e subtraindo a 1 na segunda parte da expressão, sempre será positivo tanto no numerador quanto no denominador. Deste modo, no numerador estaremos subtraindo quantidades positivas de 1, e no denominador estaremos adicionando as mesmas quantidades a 1. Então podemos ver que o numerador é menor em relação ao denominador e, portanto,  $|\xi|^2 \leq 1$ .

Caso 3: Para  $\cos \Delta s\beta = 1$ , teremos que:

$$|\xi|^2 = \frac{(1 - 0.8i^2\Delta t(0) - 0.05\Delta t)^2 + (0.025i^2\Delta t^2(0))}{(1 + 0.8i^2\Delta t(0) + 0.05\Delta t)^2 + (0.025i^2\Delta t^2(0))}$$

Organizando essa expressão, teremos a seguinte expressão resultante:

$$|\xi|^2 = \frac{(1 - 0.05\Delta t)^2}{(1 + 0.05\Delta t)^2}$$

E também, como podemos ver, para este caso o numerador é menor que o denominador, logo teremos que  $|\xi|^2 \leq 1$ . Desta forma, concluímos que o método de Crank-Nicholson para este esquema será incondicionalmente estável.

### 5.3.3 Convergência

Pela definição de convergência um esquema numérico será convergente se a solução numérica convergir para a solução analítica do problema em cada ponto  $(s, t)$  do domínio quando  $\Delta t$  e  $\Delta s$  tendem a zero mantendo os pontos  $(s, t)$  fixos, com  $S = i\Delta s$  e  $t = i\Delta t$  (isto é, quando a malha é refinada). Por outro lado, tem-se o teorema de Lax citado em [7] que permite estudar a convergências das equações diferenciais com coeficientes constantes bastando verificar as propriedades de consistência e estabilidade. Para o esquema (5.16) em análise, as verificações acima mostraram-nos que é consistente e incondicionalmente estável logo podemos concluir que o método é convergente pelo teorema de Lax.

# Capítulo 6

## Testes Numéricos do Método

Neste capítulo, consideramos o problema modelo com termo fonte, para o qual se conhece a solução exacta. Através dessa solução exacta, é possível realizar um estudo comparativo que permite tirar conclusões sobre a precisão do método numérico utilizado.

### 6.1 Problema modelo com termo fonte

Consideremos o seguinte problema:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(S, t) + rS \frac{\partial f}{\partial S}(S, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(S, t) - rf(S, t) = \bar{f}(S, t) \quad (6.1)$$

Este problema (6.1) é obtido através da adição do termo fonte  $\bar{f}(S, t)$  ao problema modelo (5.1). Para esse estudo iremos considerar os seguintes valores  $r = 0.1$ ,  $\sigma = 0.4$ ,  $K = 1$ ,  $T = 1$ ,  $\Delta S = 0.02$  e  $\Delta t = 0.001$ .

O termo fonte é determinado encontrando-se as primeiras derivadas em função de  $(S$  e  $t)$ , a segunda derivada em função de  $S$  e substituído-as no problema modelo (5.1).

Seja a solução exacta do problema modelo (5.1) dada pela seguinte expressão :  $f(S, t) = (S - Ke^{-rtS})^+$ . Podemos deduzir as primeiras derivadas em função de  $(S$  e  $t)$  e segunda derivada em função de  $S$  da seguinte forma:

#### 1. Derivada de Primeira Ordem com Relação a $S$

Se  $f(s, t) = S - Ke^{-r \cdot S \cdot t} > 0$ , temos:

$$f(s, t) = S - Ke^{-r \cdot S \cdot t}.$$

A derivada com respeito a  $S$  é dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial S} = 1 - K \cdot \frac{\partial}{\partial S} (e^{-r \cdot S \cdot t}).$$

Sabendo que:

$$\frac{\partial}{\partial S} e^{-r \cdot S \cdot t} = -r \cdot t \cdot e^{-r \cdot S \cdot t},$$

temos:

$$\frac{\partial f}{\partial S} = 1 + K \cdot r \cdot t \cdot e^{-r \cdot S \cdot t}.$$

Se  $f(s, t) \leq 0$ , a derivada é:

$$\frac{\partial f}{\partial S} = 0.$$

Deste modo a derivada em função de  $t$  será

$$\frac{\partial f}{\partial S} = (1 + krte^{-rtS}) \cdot \max(\text{sgn}(S - Ke^{-rtS}), 0)$$

## 2. Derivada de Primeira Ordem com Relação a $t$

Se  $f(s, t) = S - Ke^{-r \cdot S \cdot t} > 0$ , derivamos com respeito a  $t$ :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -K \cdot \frac{\partial}{\partial t} (e^{-r \cdot S \cdot t}).$$

Sabendo que:

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{-r \cdot S \cdot t} = -r \cdot S \cdot e^{-r \cdot S \cdot t},$$

obtemos:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = K \cdot r \cdot S \cdot e^{-r \cdot S \cdot t}.$$

Se  $f(s, t) \leq 0$ , a derivada é:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Deste modo a derivada em função de  $S$  será

$$\frac{\partial f}{\partial t} = krSe^{-rtS} \cdot \max(\text{sgn}(S - Ke^{-rtS}), 0)$$

## 3. Derivada de Segunda Ordem com Relação a $S$

Se  $f(s, t) > 0$ , derivamos novamente  $\frac{\partial f}{\partial S}$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = K \cdot \frac{\partial}{\partial S} (r \cdot t \cdot e^{-r \cdot S \cdot t}).$$

Sabendo que:

$$\frac{\partial}{\partial S} (r \cdot t \cdot e^{-r \cdot S \cdot t}) = r \cdot t \cdot \frac{\partial}{\partial S} (e^{-r \cdot S \cdot t}),$$

temos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = K \cdot r \cdot t \cdot (-r \cdot t \cdot e^{-r \cdot S \cdot t}).$$

Portanto:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = -K \cdot r^2 \cdot t^2 \cdot e^{-r \cdot S \cdot t}.$$

Se  $f(s, t) \leq 0$ , a derivada de segunda ordem é:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = 0.$$

Deste modo a derivada em função de  $S$  será

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = -kr^2t^2e^{-rtS} \cdot \max(\text{sgn}(S - Ke^{-rtS}), 0)$$

feitas a derivadas, vamos substituir as derivadas feitas no problema modelo (6.1), onde o termo fonte será dado pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \bar{f}(S, t) = & (KrSe^{-rtS}) \cdot \max(\text{sgn}(S - Ke^{-rtS}), 0) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 (-Kr^2 t^2 e^{-rtS}) \cdot \max(\text{sgn}(S - Ke^{-rtS}), 0) \\ & + rS(1 + Krte^{-rtS}) \cdot \max(\text{sgn}(S - Ke^{-rtS}), 0) - \max(r(S - Ke^{-rtS}), 0) \end{aligned} \quad (6.2)$$

E deste modo o problema (6.1) ficará da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t}(S, t) + rS \frac{\partial f}{\partial S}(S, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(S, t) - rf(S, t) = & (KrSe^{-rtS}) \cdot \max(\text{sgn}(S - Ke^{-rtS}), 0) + \\ & + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 (-Kr^2 t^2 e^{-rtS}) \cdot \max(\text{sgn}(S - Ke^{-rtS}), 0) + rS(1 + Krte^{-rtS}) \cdot \max(\text{sgn}(S - Ke^{-rtS}), 0) \\ & - \max(r(S - Ke^{-rtS}), 0) \end{aligned} \quad (6.3)$$

com as seguintes condições de fronteiras:

$$f(S, 0) = \max(S - K, 0), S > 0 \quad (6.4)$$

$$f(0, t) = 0, t > 0 \quad (6.5)$$

$$f(S, t) = S - Ke^{-rtS}, S \rightarrow \infty, t > 0$$

## 6.2 Resultados de Aproximação Numérica

### 6.2.1 Ordem de Convergência do Método

O **erro infinito ou norma do erro infinito** (também conhecido como norma  $L_\infty$  é uma forma de medir o erro, esse erro considera apenas o maior erro absoluto entre os valores dos vetores exactos e valores numéricos aproximados, e é representado pela formula:

$$|L_\infty| = \max_{i=1}^n |f_i - f_i^n| \quad (6.7)$$

O **Erro Euclidiano** também conhecido como norma  $L_2$  é a raiz quadrada da soma dos quadrados das diferenças entre os valores reais e os valores numericamente aproximados. E é Matematicamente, representado como:

$$|L_2| = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^n (f_i - f_i^n)^2} \quad (6.8)$$

Onde,  $V_i$  corresponde ao vetor da solução exata e  $F_i^n$  corresponde ao vetor das soluções aproximadas.

A ordem de um método numérico refere-se à taxa na qual o erro diminui à medida que o tamanho do passo  $\Delta S$  diminui (ou a discretização se torna mais fina). A ordem de precisão  $p$  de um método numérico pode ser determinada observando a relação entre o erro e o tamanho do passo. Em geral, para um método de ordem  $p$ , o erro global  $Erro(\Delta S)$  deve ser proporcional ao  $\Delta S^p$ , podemos usar a seguinte fórmula para estimar a ordem de precisão:

$$p = \frac{\log\left(\frac{Erro(\Delta S_i)}{Erro(\Delta S_{i+1})}\right)}{\log\left(\frac{\Delta S_i}{\Delta S_{i+1}}\right)} \quad (6.9)$$

Onde,  $\Delta S_i$  e  $\Delta S_{i+1}$  são tamanhos de passo consecutivos.

Abaixo apresentamos a tabela de erros da Função F e do método de Crank Nicholson adicionado o termo fonte, onde ilustramos as variações do  $\Delta S$  e as respectivas ordem. A Tabela 3 diz respeito às ordens de convergência espacial do método de Crank-Nicholson quando fixamos  $N = 1000$  e variamos a malha no espaço, os valores obtidos indicam um ordens de convergência espacial aproximada de 2.

M	$\Delta S$	Erro $L_\infty$	Ordem	Erro Euclidiano	Ordem
500	0.2	2.390E-02	–	3.385E-03	–
1000	0.01	2.394E-02	1.70	3.562E-03	1.95
2000	0.005	2.405E-02	1.71	3.625E-03	1.97
4000	0.0025	2.423E-02	1.79	3.836E-02	2.11
8000	0.00125	2.458E-02	1.83	4.012E-02	2.16

Tabela 3. Convergência espacial do método de Crank-Nicholson (CN) quando  $N = 1000$ .

A Tabela 4 diz respeito às ordens de convergência temporal do método de Crank-Nicholson quando fixamos  $M = 500$  e variamos a malha no tempo, os valores obtidos indicam um orden de convergência temporal aproximada de 2

N	$\Delta t$	Erro $L_\infty$	Ordem	Erro Euclidiano	Ordem
1000	0.001	2.390E-02	–	3.385E-03	–
2000	0.0005	2.395E-02	1.78	3.456E-03	1.80
4000	0.000025	2.402E-02	1.79	3.638E-03	1.83
6000	0.00016	2.435E-02	1.88	3.865E-02	1.98
8000	0.000125	2.443E-02	1.97	4.025E-02	2.03

Tabela 4: Convergência temporal do método de Crank- Nicholson (CN) com  $M=500$  fixo.

Temos abaixo os gráficos tridimensional e de linha das soluções associadas ao Método de Crank Nicholson com Termo Fonte e Função F.

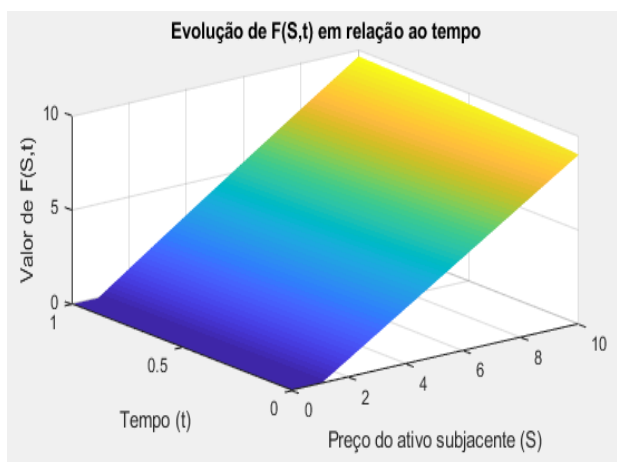


Figura 6.1: Gráfico de Superfície da evolução da função F em relação ao tempo

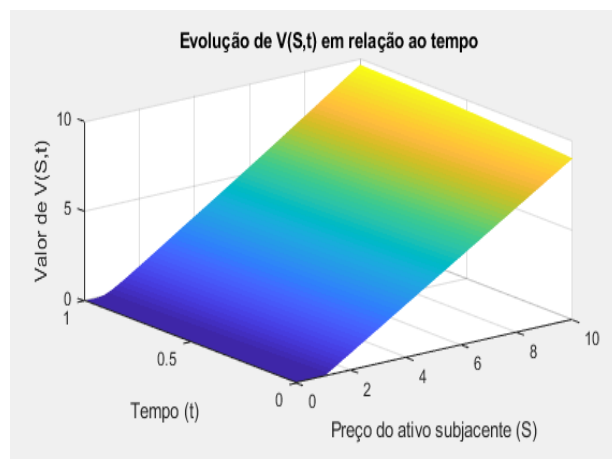
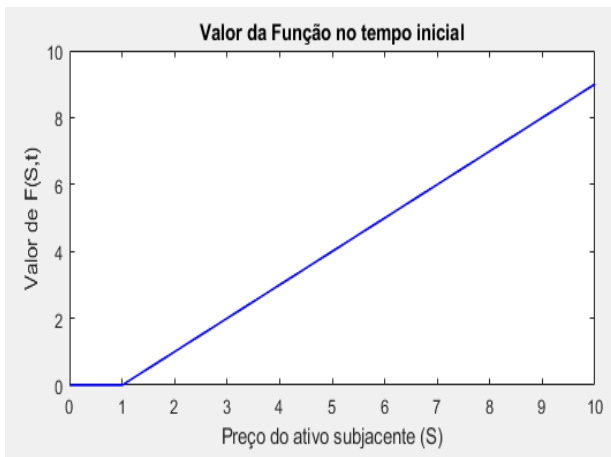
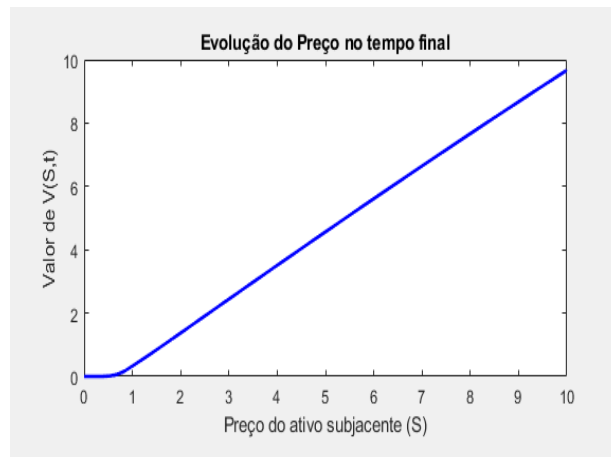


Figura 6.2: Gráfico de Superfície da evolução do Método CN+Termo Fonte em relação ao tempo

A análise dos dois gráficos revela superfícies suaves e contínuas, evidenciando a estabilidade numérica do método de Crank-Nicholson. A variação gradual em função do tempo e do preço do ativo subjacente demonstra a capacidade do método de representar adequadamente o impacto dos parâmetros do modelo. Esses resultados confirmam a consistência e a convergência do esquema numérico, em conformidade com a ordem de convergência próxima de 2 verificada nos testes teóricos.



6.3. Gráfico da evolução da função  $F$  em relação ao tempo



6.4. Gráfico de linha da evolução do Método CN+Termo Fonte em relação ao tempo

Nas Figuras 6.3, observa-se o comportamento dos preços de uma opção de compra (call) europeia para os valores indicados anteriormente. Já na Figura 6.4, analisamos o impacto da adição do termo fonte. Verifica-se que os gráficos apresentam diferenças mínimas, o que sugere que não há variações significativas entre os valores obtidos pelas soluções aproximadas e os das soluções exatas. As formas suaves e contínuas das curvas refletem adequadamente a dependência do valor da opção em relação ao ativo subjacente, evidenciando a estabilidade do método. Esse comportamento reforça a consistência e a convergência do modelo numérico, conforme previsto nos testes teóricos.

## 6.3 Discussão dos resultados

Na Tabela 3, que trata da convergência espacial, o método é testado com uma malha temporal fixa ( $N = 1000$ ) enquanto a malha espacial ( $\Delta S$ ) é variada, isto é, à medida que  $M$  (o número de subdivisões espaciais) aumenta, tanto o erro infinito quanto o erro Euclidiano também aumentam. Esse comportamento é esperado, pois, uma malha mais grossa (com passos maiores) resulta em uma representação menos precisa da solução contínua do problema, aumentando os erros de discretização e ao refinar a malha na variável espacial, e ao diminuir ou refinar a malha, menos erros são cometidos, pois a solução numérica se aproxima mais da solução exacta. As ordens de convergência espacial calculadas variam entre 1.70 e 2.16, indicando que, em média, o método apresenta uma ordem de convergência espacial próxima de 2. Isso sugere que o método é eficaz e confiável para a discretização espacial, com uma taxa de convergência consistente.

Ao analisar a Tabela 4, que trata da **convergência temporal** do método de Crank-Nicholson, observamos que a **variável espacial** ( $\Delta S$ ) está **fixa** (com  $M = 500$ ), enquanto a **variável temporal** ( $\Delta t$ ) é **variada**. Conforme  $\Delta t$  é refinado (ou seja, reduzido), os **erros temporais** diminuem consistentemente. Por exemplo, o erro  $L_\infty$  diminui de  $2.390 \times 10^{-2}$  para  $2.443 \times 10^{-2}$  à medida que  $\Delta t$  é reduzido de 0.001 para 0.000125. As **ordens de convergência** calculadas estão próximas de **2**, variando entre 1.78 e 1.97 para o erro  $L_\infty$  e entre 1.80 e 2.03 para o erro Euclidiano, o que confirma a **segunda ordem de convergência temporal** ( $O(\Delta t^2)$ ) esperada para o método de Crank-Nicholson. Essa tabela é diferente da anterior na medida em que notamos que o erro espacial domina o erro temporal do método de Crank-Nicholson quando temos valores de  $N$  relativamente pequenos. Assim, para podermos observar a ordem de convergência temporal deste método, foi necessário refinar imenso a malha no tempo. Deste modo, o método de Crank-Nicholson apresenta uma ordem de convergência temporal de aproximadamente 2.

Em suma, o método de Crank-Nicholson aplicado à equação de Black-Scholes é consistente de segunda ordem e incondicionalmente estável, o que garante que ele é seja convergente, o que é

consistente com a teoria, já que o método de Crank-Nicholson é conhecido por ser de segunda ordem no espaço e no tempo, desde que as condições adequadas sejam atendidas. No entanto, no contexto analisado, observa-se que o erro espacial domina em relação ao erro temporal. Para valores pequenos de  $M$  (número de subdivisões espaciais), o erro espacial é mais significativo que o erro temporal, exigindo um refinamento considerável da malha para que a verdadeira ordem de convergência temporal possa ser observada. O método de Crank-Nicholson, embora mais estável que métodos explícitos, requer uma escolha cuidadosa da malha para que a convergência seja satisfatória, especialmente em problemas com termos adicionais (como o termo fonte). As Propriedades satisfeitas acima tornam este método uma escolha robusta e eficaz para a resolução numérica da equação de Black-Scholes, especialmente em problemas de precificação de derivativos financeiros, onde a precisão e a estabilidade são fundamentais.

# Capítulo 7

## Conclusão e Recomendações

As equações diferenciais desempenham um papel fundamental em diversas áreas do conhecimento e em particular na Matemática Financeira, onde são amplamente utilizadas para modelar tanto o crescimento económico como os riscos financeiros. No entanto, devido à complexidade intrínseca de muitos problemas reais, as soluções analíticas tornam-se frequentemente inviáveis. Por esse motivo, recorrem-se a métodos numéricos, como o Método das Diferenças Finitas (MDF), que se baseia na substituição das derivadas parciais por aproximações de diferenças finitas, transformando a equação diferencial num sistema de equações algébricas, definidas numa malha discreta. Isso, por sua vez, possibilita a sua resolução numérica [27].

Este trabalho abordou o estudo das equações diferenciais e a sua aplicação na modelação de problemas financeiros, com ênfase no modelo de Black-Scholes e na utilização do Método das Diferenças Finitas (MDF) para soluções numéricas. Ao longo dos capítulos, foi apresentada uma fundamentação teórica robusta sobre as equações diferenciais, o Método das Diferenças Finitas (MDF) e os derivados financeiros, culminando na implementação analítica e computacional, bem como na análise da convergência e da estabilidade do método empregue.

A investigação teve início com a apresentação dos conceitos fundamentais relacionados com as equações diferenciais e as suas respectivas classificações. Além disso, foram abordados tanto os métodos analíticos como os métodos numéricos aplicáveis à resolução de diferentes tipos de equações. O desenvolvimento teórico foi complementado com exemplos práticos e as suas resoluções detalhadas, proporcionando uma base sólida para a aplicação das técnicas numéricas nos capítulos subsequentes.

O Método das Diferenças Finitas foi amplamente explorado por ser uma das técnicas numéricas mais utilizadas para resolver equações diferenciais parciais. O método consiste em discretizar o domínio contínuo em pontos discretos, substituindo as derivadas por aproximações de diferenças finitas. São apresentados os métodos explícito, implícito e de Crank-Nicholson, com ênfase na análise da convergência, consistência e estabilidade. Ademais, explorou-se o Teorema da Equivalência de Lax, que assegura a convergência de um método numérico desde que este seja consistente e estável. A relevância dessas propriedades foi demonstrada através da aplicação do método de Crank-Nicholson à resolução de equações diferenciais no contexto financeiro.

Fez-se uma revisão bibliográfica sobre produtos derivados financeiros, como contratos a termo, contratos futuros, opções e swaps, que desempenham um papel fundamental na gestão de riscos e na especulação no mercado financeiro. Foram também discutidos os diferentes tipos de opções e as suas características, como o preço de exercício, o prémio e o vencimento. Estes instrumentos proporcionam aos investidores estratégias eficazes para mitigar a volatilidade dos preços e explorar oportunidades de lucro com base na projecção de movimentos futuros dos activos subjacentes. O capítulo dedicado a este tema ofereceu uma visão abrangente sobre os mecanismos de negociação e

as implicações destes produtos para os participantes do mercado.

No Capítulo 5, aplicou-se o método de Crank-Nicholson para resolver a equação de Black-Scholes, utilizada para a avaliação de opções europeias. A equação foi discretizada e transformada num sistema de equações algébricas, de fácil resolução numérica. A discretização resulta em matrizes tridiagonais, que são resolvidas a cada passo temporal. A análise da convergência, consistência e estabilidade do método foi realizada, confirmando que o método de Crank-Nicholson é consistente, estável e, conseqüentemente, convergente.

Nos testes numéricos realizados no Capítulo 6, verificou-se que o método de Crank-Nicholson apresenta uma ordem de convergência espacial e temporal próxima de 2, o que confirma a teoria subjacente ao método. As simulações numéricas indicaram que o erro espacial é mais dominante em malhas pouco refinadas, sendo que a precisão dos resultados melhora consideravelmente com o refinamento da malha. Este resultado foi obtido por meio do software MATLAB, que permitiu uma implementação eficaz do algoritmo.

Por fim, com o trabalho concluído, concluiu-se que o método de Crank-Nicholson é adequado para a avaliação de opções europeias, garantindo tanto a precisão como a estabilidade das soluções numéricas. A análise de consistência e convergência foi fundamental para assegurar que as soluções numéricas estivessem alinhadas com as soluções analíticas esperadas.

Para trabalhos futuros, sugere-se a aplicação deste método a outros tipos de derivativos financeiros, bem como a realização de análises de sensibilidade, considerando variações nos parâmetros do modelo, como a volatilidade e a taxa de juro.

# Bibliografia

- [1] Cairns, Andrew JG, Interest rate models: an introduction, volume 10, Princeton University Press, 2004
- [2] Stroock, Daniel W and Yor, Marc, Remembering Paul Malliavin, Notices of the AMS, volume 58, 2011
- [3] Boyer, Carl B and Merzbach, Uta C, *História da matemática*, Editora Blucher, (2019).
- [4] M.J. Alves *Equações diferenciais funcionais singulares de segunda ordem*, Perm. State University Press, 2000.
- [5] Gockenbach, Mark S, *Partial differential equations: analytical and numerical methods*, 2005, Siam
- [6] Figueiredo, Jorge Manuel and Ribeiro, Carolina Paula Baptista, *Apontamentos de equações diferenciais: complementos de Análise Matemática EE*, , 2013
- [7] Thomas, James William, *Numerical partial differential equations: finite difference methods*, 2013, Springer Science & Business Media
- [8] Biezuner, Rodney Josué, *Notas de Aula Introdução as Equações Diferenciais Parciais*, 2015
- [9] Hull, John C, *Opções, futuros e outros derivativos*, 2016, Bookman Editora
- [10] Lucas, Fabiano, *Mercados Financeiros: Teoria e Prática*, São Paulo, Editora Atlas, 2020.
- [11] McDonald, Robert, *Derivatives markets*, 2013, Pearson
- [12] J. C. Pinto e P. L. C. Lage, *Programa de Engenharia Química*, COPPE/UFRJ
- [13] Lozardo, Ernesto, *Derivativos no Brasil: Fundamentos e prática*, 1998, BM & F
- [14] Cvitanic, J. and Zapatero, F. *Introduction to the Economics and Mathematics of Financial Markets*, 2004, MIT Press, Cambridge, MA.
- [15] Souza, M. F. *Produtos Financeiros: Teoria e Prática* São Paulo Editora Saraiva
- [16] Ferreira, Luiz Felipe and Oliveira, Danilo and Silva, Euller Santos and Silva, Felipe Luque and Nogueira, Luis Gustavo, *Derivativos: análise, conceito e mercado*, 2022.
- [17] Wilmott, Paul, *Paul Wilmott introduces quantitative finance*, 2013, John Wiley & Sons
- [18] Wilmott, Paul and Howson, Susan and Howison, Sam and Dewynne, Jeff and others, *The mathematics of financial derivatives: a student introduction*, 1995, Cambridge university press
- [19] Dias, Neylan Leal and da Luz, Guilherme Augusto Souza and Rosario, Eduardo Conceição and Leal, Simone de Almeida Delphim, *Uma introdução ao método das diferenças finitas: condução de calor*, 2013

- [20] Babich, Volodymyr and Kamrad, Bardia, *Option pricing: Theory and numerical methods*, Available at SSRN 1616948, 2009
- [21] Capiński, Marek and Kopp, Ekkehard, *The Black–Scholes Model*, 2012, Cambridge University Press
- [22] Seydel, Rüdiger and Seydel, Rudiger, *Tools for computational finance*, 2006, Springer, volume 3
- [23] Yartey, Joseph Nee Anyah and Ribeiro, Simone Sousa, *Equações diferenciais*, UFBA, Instituto de Matemática e Estatística; Superintendência de Educação
- [24] Alves, CJS *Análise Numérica de Equações Diferenciais Parciais*, Monografia. IST, 2008
- [25] V.I. Arnold, *Equações diferenciais ordinárias*, Redacção de MTMNO, Moscovo, 2012.
- [26] M.R. Wonham, *Linear multivariable control*, 3rd ed. Springer-Verlag. New-York, Inc., 1985.
- [27] Strikwerda, John C, *Finite difference schemes and partial differential equations*, SIAM, 2004.
- [28] Marins, André. *Mercado Derivativos e Análise de Risco*. Volume 1. Rio de Janeiro: AMS, 2004.
- [29] Cox, J. C., Ross, S. A., Rubinstein, M, *Option pricing: A simplified approach*. *Journal of financial Economics*, 1979.
- [30] Patankar, S. V, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere Publishing Corporation, 1980.
- [31] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L, *The Finite Element Method*, Volume 1: The Basis Butterworth-Heinemann, 2000
- [32] Quail, Rob and Overdahl, James A, *Financial Derivatives: Pricing and Risk Management*, volume 5, John Wiley & Sons, 2009
- [33] Ferreira, V. G., and G. B. Lima, *Minicurso sobre Solução numérica de equações diferenciais parciais*, 2010
- [34] Anderson, John David and Wendt, John, *Computational fluid dynamics*, volume 206, Springer, 1995
- [35] Black, Fischer and Scholes, Myron, *The pricing of options and corporate liabilities*, *Journal of political economy*, volume 81, The University of Chicago Press, 1973
- [36] william h. press, saul a. teukolsky, william t. vetterling, and brian p. flannery, *Numerical recipes: the art of scientific computing*, cambridge university press, 2007
- [37] LeVeque, Randall J, *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007
- [38] Iaconeta, Ilaria, et al, *A stabilized mixed implicit material point method for non-linear incompressible solid mechanics*, *Computational Mechanics*, 2019

## Anexos

Este documento apresenta um código em MATLAB para o cálculo de opções financeiras. O código utiliza métodos numéricos para resolver equações diferenciais parciais relacionadas ao preço de opções. A seguir, está o código MATLAB para o cálculo de opções. O código foi desenvolvido para resolver uma equação de Black-Scholes utilizando diferenças finitas.

```
clear;
% Parametros iniciais
S0 = 2;           % preco atual do ativo subjacente
K = 1;           % preco de exerc cio da opcao
r = 0.1;         % taxa de juros livre de risco
T = 1;           % tempo at a expiracao da opcao (em anos)
sigma = 0.4;     % volatilidade do ativo subjacente
Smax = 10;       % preco m ximo do ativo subjacente considerado
M = 500;         % numero de pontos de grade no pre o do ativo subjacente
N = 1000;        % numero de pontos de grade no tempo

% Discretizacao do tempo e do preco do ativo
dt = T / N;
ds = Smax / M;
S_values = (0:M) * ds;
T_values = (0:N) * dt;
F = zeros(M+1, N+1);
V = zeros(M+1, N+1);

% Condi es iniciais e de contorno
F(:, 1) = max(S_values - K .* exp(-r .* (T_values(1))) .* S_values, 0);
F(1, :) = max(S_values(1) - K * exp(-r .* (T_values) .* S_values(1)), 0);
F(end, :) = max(S_values(end) - K * exp(-r .* (T_values) .* S_values(end)), 0);

% Calculo da matriz F
for i = 2:M+1
    for j = 2:N+1
        F(i, j) = max((S_values(i) - K .* exp(-r * (T_values(j))) * S_values(i))), 0);
    end
end

% Interpolacao para obter o preco da opcao
ooPrice = interp1(S_values, F(:, end), S0);
fprintf('O valor do F_price e: %.4f\n', ooPrice);

% Coeficientes para a matriz A e B
alpha = 0.25 * dt * ((sigma^2) * (S_values.^2) / (ds^2) - r * S_values / ds);
beta = -dt * 0.5 * ((sigma^2) * (S_values.^2) / (ds^2) + r);
gamma = 0.25 * dt * ((sigma^2) * (S_values.^2) / (ds^2) + r * S_values / ds);

% Construcao das matrizes A e B
A = -diag(alpha(3:M), -1) + diag(1 - beta(2:M)) - diag(gamma(2:M-1), 1);
B = diag(alpha(3:M), -1) + diag(1 + beta(2:M)) + diag(gamma(2:M-1), 1);
```

```

% Termo fonte para a equacao diferencial

Termo_Fonte = zeros(M+1, N+1);

for i = 2:M
    for j = 2:N

Termo_Fonte(i, j) = (K*r*S_values(i)*exp(-r*T_values(j).*S_values(i))) *
max(sign(S_values(i) - K .* exp(-r * (T_values(j)) * S_values(i))),0) +
(r.*S_values(i).*(1+K*r.*T_values(j)*exp(-r.*T_values(j).*S_values(i)))) *
max(sign(S_values(i) - K .* exp(-r * (T_values(j)) * S_values(i))),0) +
(-0.5 * sigma^2 * S_values(i)^2 * K*r^2*(T_values(j))^2*exp(-r.*T_values(j)
*S_values(i))) * max(sign(S_values(i) - K .* exp(-r * (T_values(j)) *
S_values(i))),0) -max(r.*(S_values(i) - K*exp(-r.*T_values(j)
*S_values(i))),0);

        end
    end

% Solucao numerica da equacao diferencial
for j = 1:N
    D = B * V(2:M, j) + 0.5 * dt * Termo_Fonte(2:M, j);
    D(1) = D(1) + alpha(1) * (V(1, j) + V(1, j+1));
    D(end) = D(end) + gamma(end) * (V(end, j) + V(end, j+1));
    V(2:M, j+1) = A\D;
end

% Interpolacao para obter o preco final
oPrice = interp1(S_values, V(:, end), S0);
fprintf('O valor do price e: %.4f\n', oPrice);

% Calculo das normas
normainf = norm(reshape(V, [], 1) - reshape(F, [], 1), Inf);
normaeu = norm(reshape(V, [], 1) - reshape(F, [], 1));

fprintf('O valor da norma infinita e: %.4f\n', normainf);
fprintf('O valor da norma euclidiana e: %.4f\n', normaeu);

% Visualizacao dos resultados
figure;
subplot(2, 2, 1);
[SS, TTT] = meshgrid(S_values, T_values);
surf(SS, TTT, F');

```

```

title('Evolução de F(S,t) em relação ao tempo');
xlabel('Preço do ativo subjacente (S)');
ylabel('Tempo (t)');
zlabel('Valor de F(S,t)');
shading interp;

subplot(2, 2, 2);
plot(S_values, F(:, end), 'b-', 'LineWidth', 1);
title('Valor da Função no Preço final');
xlabel('Tempo (t)');
ylabel('Valor de Preço (S)');

subplot(2, 2, 3);
surf(SS, TTT, V);
title('Evolução de Preço em relação ao tempo');
xlabel('Preço do ativo subjacente (S)');
ylabel('Tempo (t)');
zlabel('Valor de V(S,t)');
shading interp;

subplot(2, 2, 4);
plot(S_values, V(:, end), 'b-', 'LineWidth', 2);
title('Evolução do Preço no tempo final');
xlabel('Preço do ativo subjacente (S)');
ylabel('Valor de V(S,t)');

```

## Explicação do Código

O código MATLAB acima implementa um método numérico para calcular o preço de uma opção financeira utilizando a equação de Black-Scholes. O método de diferenças finitas é utilizado para discretizar a equação diferencial parcial e resolver o problema numericamente. O código também inclui a visualização dos resultados por meio de gráficos 3D e 2D.