



FACULDADE DE CIÊNCIAS
Departamento de Matemática e Informática

TRABALHO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Tema:

**Polinômios de Aproximação e Séries de Taylor:
Análise Teórica e Prática**

Autor: Alberto Anderson Jorge Antonio

Maputo, 15 de outubro de 2025



FACULDADE DE CIÊNCIAS
Departamento de Matemática e Informática

TRABALHO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Tema:

**Polinômios de Aproximação e Séries de Taylor:
Análise Teórica e Prática**

Autor: Alberto Anderson Jorge Antonio

Supervisor: Professor Catedrático, Manuel Joaquim Alves,

Co-Supervisor: Professora Associada Elena Vladimirovna Alves,
ISCTEM

Maputo, 15 de outubro de 2025

Dedicatória

Dedico este trabalho, com todo meu carinho e gratidão, aos meus pais, Jorge Antonio e Marta Fumo, por sempre acreditarem no meu potencial e me apoiarem em cada passo dessa jornada. Aos meus amigos e colegas, que tornaram esse caminho mais leve com suas palavras de incentivo e companhia constante. E, especialmente, ao meu orientador Manuel Alves, por sua paciência, orientação e sabedoria, que foram fundamentais para a realização deste trabalho.

Declaração de Honra

Declaro por minha honra que o presente Trabalho de Licenciatura é resultado da minha investigação e que o processo foi concebido para ser submetido apenas para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática, na faculdade de Ciências da Universidade Eduardo Mondlane.

Maputo, 15 de outubro de 2025

(Alberto Anderson Jorge Antonio)

Agradecimentos

Gostaria de expressar minha sincera gratidão ao Professor Doutor Manuel Alves por sua orientação, apoio e valiosos conselhos ao longo deste trabalho. Sua orientação foi fundamental para o sucesso desta pesquisa.

Também desejo agradecer aos colegas Sergio, Julio, Gerson e Jenifer por terem me dado as suas ideias valiosas para o meu sucesso.

Além disso, gostaria de estender meu agradecimento a todos os docentes e trabalhadores do Departamento de Matemática e Informática (DMI) pela infraestrutura, recursos e ambiente de pesquisa que proporcionaram. Suas contribuições foram fundamentais para a realização deste estudo.

Este trabalho não teria sido possível sem o apoio generoso de todos aqueles que mencionei, e estou sinceramente grato por isso.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo principal estudar os polinômios de aproximação, com ênfase na aplicação das Séries de Taylor, como ferramentas fundamentais na análise e solução de problemas para além disso pretende-se mostrar até que ponto as aproximações podem ser úteis em áreas como Engenharia, medicina, Química, Física.

Inicia-se com uma revisão teórica sobre polinômios e suas propriedades, seguido pela introdução dos conceitos de aproximação de funções. A partir disso, explora-se a teoria das Séries de Taylor, demonstrando como elas permitem aproximar funções reais em torno de um ponto, utilizando uma soma infinita de termos baseados nas derivadas da função.

O trabalho também aborda a importância da convergência das séries e os erros associados à aproximação, com exemplos práticos que ilustram a aplicação desses conceitos em situações reais, adicionalmente tem representações gráficas ilustrando o quão as funções originais se assemelham com as funções aproximandas.

Por fim, discute-se das análises críticas e comparativas entre os polinômios de aproximação e as Séries de Taylor.

Palavras-chave: Aproximações, Séries de Taylor, aplicações e Matemática.

Abstrat

The main objective of this work is to study approximation polynomials, with an emphasis on the application of Taylor Series, as fundamental tools in the analysis and solution of problems. Additionally, it aims to show to what extent these approximations can be useful in areas such as Engineering, Medicine, Chemistry, and Physics.

The work begins with a theoretical review of polynomials and their properties, followed by an introduction to the concepts of function approximation. From there, the theory of Taylor Series is explored, demonstrating how they allow the approximation of real functions around a point using an infinite sum of terms based on the derivatives of the function.

The study also addresses the importance of series convergence and the errors associated with approximation, including practical examples that illustrate the application of these concepts in real-world situations. Additionally, graphical representations are provided to illustrate how closely the original functions resemble the approximated functions.

Finally, critical and comparative analyses between approximation polynomials and Taylor Series are discussed.

Keywords: Approximations, Series, Applications and Mathematics.

Lista de Figuras

2.1	Convergência Pontual	12
3.1	Gráfico do Exemplo 3.1.1	21
3.2	Gráfico da Interpolação de Lagrange	25
3.3	Interpolação de Lagrange da função	
	$P(x, y) = xy - x - y + 1$	
		28
3.4	Interpolação de Newton	32
3.5	Gráfico da função Bidimensional	34
3.6	Interpolação de Chebychev	43
3.7	Representação Gráfica	44
4.1	Gráfico representativo da Aproximação Linear	46
4.2	Gráfico representando o erro obtido pela Aproximação Linear	47
4.3	Gráfico representando o erro obtido pela recta Secante	48
4.4	Gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ e do seu Polinómio de Taylor de Ordem 1	49
4.5	Gráfico de $f(x)$ e seus Polinômios aproximados até ordem 4	58
5.1	Gráfico da Função $f(x) = e^{-x^2}$	68
5.2	Esquema da Curvatura da Terra (Fonte: (STEWART, 2007))	76
5.3	Representação de uma onda de água Fonte: (STEWART, 2007)	78

Lista de Tabelas

3.1	Tabela 1- Valores das Concentrações encontradas em cada amostra	23
3.2	Tabela de Diferenças Divididas de Newton	29
5.1	Comparação da Aproximação da Função de Crescimento Populacional	74

Conteúdo

Declaração de Honra	ii
Agradecimentos	iii
Resumo	iv
Abstract	v
Lista de Figuras	vi
Lista de Tabelas	vii
Conteúdo	viii
1 Introdução	2
1.1 Objectivos	4
1.1.1 Objectivos Gerais	4
1.1.2 Objectivos específicos	4
1.2 Metodologia	4
2 Conceitos Básicos	5
2.1 Polinômios	5
2.2 Séries Numéricas	9
2.3 Condição Necessária de Convergência de uma Série	10
2.3.1 Séries de Funções	11
2.4 Critério de convergência de Séries de Funções	14
2.5 Séries de Potências	14
2.6 Derivação e Integração de Séries de Potências	16
2.7 Funções aproximáveis	16
2.7.1 Aproximação Local	17
2.7.2 Aproximação Global	17
2.8 Erro de Aproximação	17

2.9	Tipos de Erro de Aproximação	17
2.9.1	Erro Absoluto	17
2.9.2	Erro Relativo	17
2.9.3	Erro de Truncamento	18
2.9.4	Erro de Aproximação Global	18
2.9.5	Erro de Interpolação	18
3	Polinômios de Aproximação	19
3.1	Interpolação Polinomial	19
3.1.1	Existência e Unicidade do Polinômio Interpolador	21
3.2	Métodos de Interpolação Polinômial	22
3.2.1	Interpolação de Lagrange	22
3.2.2	Interpolação de Newton	28
3.2.3	Polinômios de Hermite	35
3.2.4	A Interpolação de Chebyshev	38
3.3	Método dos Mínimos Quadrados Regressão linear	43
3.3.1	Formulação Matemática	43
4	Polinômio de Taylor e Séries de Taylor	45
4.1	Polinômio de Taylor de Ordem 1	45
4.2	Polinômio de Taylor de Ordem 2	50
4.3	Polinômio de Taylor de Ordem n	53
4.4	Série de Taylor e de Maclaurin	60
4.5	Convergência e Intervalo de Convergência	62
5	Aplicações do Polinômio e Séries de Taylor	65
5.1	Regra de L'Hospital	65
5.2	Irracionalidade do número e	66
5.3	Aplicação em aproximações de Áreas	68
5.4	Cálculo de Limites	70
5.5	Cálculo de Integrais	71
5.6	Aplicações das Séries de Taylor em diferentes áreas	73
5.6.1	Biologia e Medicina	73
5.6.2	Química e Bioquímica	75
5.6.3	Aplicações na Física	76
6	Análise Crítica e Comparativa	81
6.1	Análise comparativa entre polinômios de aproximação e Séries de Taylor	81
6.2	Análise Crítica	82

6.2.1	Polinômios de Aproximação:	82
6.2.2	Séries de Taylor:	83
6.2.3	Crítica Geral:	83
6.3	Limitações e desafios dos polinômios de aproximação e séries de Taylor	83
6.3.1	Polinômios de Aproximação	83
7	Conclusão e Recomendações	85
	Bibliografia	86

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho apresentamos uma teoria publicada em 1715 no livro *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*, escrito pelo matemático Brook Taylor que nasceu em 1685 e morreu aos 46 anos em 1731. Como sua família era rica, Taylor teve toda sua educação básica em casa com professores particulares e somente aos 18 anos, (1703), inicia seus estudos na Universidade de St. John de Cambridge, onde formou-se em direito no ano de 1709 e durante esse período já estava bastante envolvido com a Matemática.

Entre 1712 e 1724, publicou treze artigos relacionados com a Matemática. Dentre eles, um novo método para trabalhar com logaritmos. No ano de 1715 publica dois livros: *Methodus Incrementorum Directa et Inversa* e *Linear Perspective*. Neste primeiro, se encontra a Fórmula de Taylor e as representações de funções em série. Apesar de James Gregory (1638-1675) já trabalhar com essas séries e Johann Bernoulli (1667-1748); matemático de sua época, também conhecer essa representação, Taylor desenvolveu sua fórmula sozinho sem o conhecimento do trabalho dos outros e foi o primeiro a enunciá-la e descrever sua forma geral. Assim, o polinômio aproximador de funções viria a ser conhecido como o Polinômio de Taylor e as representações de funções em série como Série de Taylor. Esse reconhecimento só aconteceria alguns anos após a sua morte, pois na sua época, sua teoria não foi vista como importante.

Colin Maclaurin (1698-1746) citou a obra de Taylor em um livro no ano de 1742, popularizando as representações de funções em série e trabalhando com um tipo específico de série, as centralizadas na origem, por isso essas séries ficaram conhecidas como Série de Maclaurin. Mas foi a partir de 1772, que Joseph Louis Lagrange (1736-1813), reconhece a importância do trabalho de Taylor e elege seu teorema como princípio básico do cálculo diferencial. No ano de 1786 o termo série de Taylor começa a ser utilizado. O Polinômio e a Série de Taylor, são temas presentes em diversos livros de cálculo e análise e essa teoria se tornou a base de programação de calculadoras e softwares [9].

O trabalho apresenta no primeiro capítulo introdução que aborda sobre a teoria apresentada por Brook Taylor em 1715 no livro *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*, onde ele formulou

a Série e o Polinômio de Taylor. Adicionalmente, abordamos pontos referentes ao trabalho de Taylor que só ganhou reconhecimento anos após sua morte, sendo popularizado por Colin Maclaurin e consolidado por Joseph Louis Lagrange como um princípio fundamental do cálculo diferencial. No segundo capítulo, revisamos os conceitos fundamentais das séries tais como Polinômios, Séries Numéricas, Séries de Potências, Convergências de Séries, Erro de Aproximação, que servem como base para a compreensão deste trabalho. No terceiro capítulo, exploramos os polinômios de aproximação, destacando as condições de existência e unicidade, bem como o erro na aproximação. Além disso, abordamos métodos de interpolação, como de Newton, Lagrange, Hermite e Chebyshev. O polinômio de Newton baseia-se no uso de diferenças divididas e permite fácil actualização caso novos pontos sejam adicionados. Já o polinômio de Lagrange apresenta uma fórmula explícita para o polinômio interpolador, construído directamente a partir dos valores dos pontos conhecidos. A interpolação de Hermite é uma extensão da de Lagrange, pois além dos valores da função, também considera as derivadas nos pontos, o que a torna mais precisa quando essas informações adicionais estão disponíveis. Por fim, os polinômios de Chebyshev não são usados directamente para interpolar, mas sim para escolher pontos de interpolação de forma a minimizar erros, sendo muito úteis para evitar oscilações indesejadas e melhorar a precisão da aproximação. Adicionalmente, apresentamos o método dos mínimos quadrados. No quarto capítulo, introduzimos as séries de Taylor, abordando sua formulação, derivação, desigualdades associadas, erro e critérios de convergência. No quinto capítulo, abordamos as principais aplicações dos Polinômios e Séries de Taylor na Matemática e em outras áreas fora da Matemática. No sexto capítulo, realizamos uma análise comparativa das diferentes abordagens de aproximação exploradas ao longo dos capítulos anteriores. Por fim, no último capítulo, apresentamos as conclusões e recomendações.

1.1 Objectivos

1.1.1 Objectivos Gerais

Investigar a teoria da aproximação por meio das Séries de Taylor, visando a criação de representações simplificadas de funções, a análise da convergência e do erro das aproximações, e a aplicação desses conceitos na resolução de problemas matemáticos.

1.1.2 Objectivos específicos

- Construir polinômios que representem de forma aproximada uma função específica em um intervalo determinado, proporcionando modelos matemáticos simplificados;
- Analisar as condições sob as quais as aproximações polinomiais convergem para a função original, garantindo a precisão da representação;
- Examinar técnicas para estimar e minimizar o erro entre a função original e sua representação aproximada;
- Aplicar os métodos de aproximação a funções como trigonométricas, exponenciais e racionais, visando obter representações matemáticas simplificadas;
- Implementar a teoria da aproximação em problemas reais de física, engenharia e estatística, possibilitando a resolução eficiente de problemas complexos.

1.2 Metodologia

Este trabalho irá abordar sobre os Polinômios de aproximação, onde para conseguirmos alcançar os objectivos pretendidos usaremos uma metodologia teórica prática, fazendo uma revisão Bibliográfica, Estudo Matemático, Recursos Computacionais, Análise Crítica, Para as redações, usamos o LaTeX e o compilador TeX. Utilizamos adicionalmente, Python para gerar gráficos.

Capítulo 2

Conceitos Básicos

Neste capítulo, serão apresentadas, de forma abrangente, as definições fundamentais que sustentam a compreensão e o desenvolvimento deste trabalho. Iniciamos com o conceito de polinômio, seguido da introdução da matriz de Vandermonde, ferramenta essencial para demonstrar, no Capítulo 3, a unicidade do polinômio interpolador. Abordaremos também as séries numéricas e de funções, destacando as condições de convergência e divergência. Além disso, trataremos das séries de potências e das funções aproximáveis, que desempenham papel relevante na construção dos resultados posteriores.

2.1 Polinômios

Definição 2.1. Seja $n \in \mathbb{N}$ e sejam $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Chama-se *polinômio de grau n* em $\mathbb{R}$ a função $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

onde:

- $a_0, a_1, \dots, a_n$ são chamados de *coeficientes* do polinômio;
- $x \in \mathbb{R}$ é a *variável*;
- O número n é o *grau* do polinômio, assumindo que $a_n \neq 0$.

Definição 2.2. Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n$ números distintos, a **matriz de Vandermonde** associada a esses valores é definida por:

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Teorema. 2.1 Se A é uma matriz de Vandermonde, então:

$$\det A = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Demonstração (Indução Matemática)

Base da Indução: $n = 1$ e $n = 2$ Para $n = 1$, a matriz é, com determinante 1. O produto acima é vazio, e portanto igual a 1.

Para $n = 2$:

$$V_2 = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix}, \quad \det(V_2) = x_2 - x_1$$

que é exatamente o produto $\prod_{1 \leq i < j \leq 2} (x_j - x_i)$.

Passo Indutivo Assuma que a fórmula é válida para $n - 1$. Vamos provar que vale para n .

Considere V_n . Subtraia a primeira linha das demais. Isso não altera o determinante. Obtemos:

$$\det(V_n) = \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \cdots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \cdots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{bmatrix}$$

Note que $x_k^m - x_1^m = (x_k - x_1)Q_{m-1}(x_k, x_1)$, para algum polinômio Q_{m-1} de grau $m - 1$. Fatorizando $(x_k - x_1)$ da k -ésima linha (com $k \geq 2$), obtemos:

$$\det(V_n) = \prod_{j=2}^n (x_j - x_1) \cdot \det(\tilde{V}_{n-1})$$

onde $\tilde{V}_{n-1}$ é uma matriz de Vandermonde associada a $x_2, x_3, \dots, x_n$. Pelo passo indutivo:

$$\det(\tilde{V}_{n-1}) = \prod_{2 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Portanto:

$$\det(V_n) = \left(\prod_{j=2}^n (x_j - x_1) \right) \left(\prod_{2 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \right) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

A fórmula está demonstrada por indução matemática. Além disso, o determinante de Vandermonde é diferente de zero se, e somente se, todos os x_i forem distintos.

Teorema 2.2: Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) , então existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demonstração Vamos provar o teorema utilizando o Teorema de Rolle e uma função auxiliar.

Passo 1: Consideramos a função auxiliar $g(x)$ dada por:

$$g(x) = f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) (x - a)$$

Passo 2: Verificando as condições para o Teorema de Rolle Para aplicar o Teorema de Rolle, precisamos garantir que $g(x)$ satisfaça as condições de aplicabilidade:

1. **Continuidade em $[a, b]$:** Como $f(x)$ é contínua em $[a, b]$ e o termo $\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) (x - a)$ é um polinômio (e, portanto contínuo), $g(x)$ é contínua em $[a, b]$.

2. **Derivabilidade em (a, b) :** Como $f(x)$ é derivável em (a, b) , e o termo $\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) (x - a)$ é uma função linear, $g(x)$ é derivável em (a, b) .

3. **Condições de valor nas extremidades:**

- $g(a) = f(a) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) (a - a) = f(a)$
- $g(b) = f(b) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) (b - a) = f(a)$

Logo, $g(a) = g(b)$, o que satisfaz as condições do Teorema de Rolle.

Passo 3: Aplicando o Teorema de Rolle De acordo com o Teorema de Rolle, como $g(a) = g(b)$ e $g(x)$ é contínua e derivável em $[a, b]$, existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$.

Agora, calculamos a derivada de $g(x)$:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Portanto, em $x = c$, temos:

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

Ou seja:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Conclusão

Portanto, existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Lema 2.1 Para todo número real x , temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Demonstração:

Vamos considerar dois casos: $x = 0$ e $x \neq 0$.

Caso 1: $x = 0$

Neste caso,

$$\frac{x^n}{n!} = \frac{0^n}{n!} = 0, \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Caso 2: $x \neq 0$

Temos:

$$\left| \frac{x^n}{n!} \right| = \frac{|x|^n}{n!}.$$

Como $|x|$ é fixo e $n!$ cresce mais rapidamente que qualquer potência $|x|^n$, mostraremos que a fração tende a zero.

Escolha um número natural N tal que $N > |x|$. Então, para todo $n \geq N$, temos:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot N \cdot (N+1) \cdot \dots \cdot n \geq N^{n-N} \cdot N!$$

Logo,

$$\frac{|x|^n}{n!} \leq \frac{|x|^n}{N^{n-N} \cdot N!} = \frac{|x|^N}{N!} \left(\frac{|x|}{N} \right)^{n-N}.$$

Como $\frac{|x|}{N} < 1$, o termo $\left(\frac{|x|}{N} \right)^{n-N} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Assim, existe uma constante $C > 0$ tal que:

$$\frac{|x|^n}{n!} < C \left(\frac{|x|}{N} \right)^{n-N} \rightarrow 0.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

2.2 Séries Numéricas

Definição 2.2. Seja considerada uma sequência numérica infinita da forma:

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$$

A seguinte expressão:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (2.1)$$

é denominada *série numérica*, e os elementos $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ recebem o nome de *termos da série*.^[5]

Definição 2.3. A designação *soma parcial* s_n é atribuída à soma dos n primeiros termos da série:

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

Para ilustrar, vejamos algumas dessas somas parciais:

$$\begin{aligned} s_1 &= u_1, \\ s_2 &= u_1 + u_2, \\ s_3 &= u_1 + u_2 + u_3, \\ &\vdots \\ s_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n. \end{aligned}$$

- Caso o limite abaixo exista e seja um número real finito:

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n,$$

então chamamos esse valor s de *soma da série* (2.1), e diz-se que a série em questão *converge*.

- Caso o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ não exista como número real por exemplo, se ocorre $s_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ então dizemos que a série *diverge* e, portanto, não possui soma ^[5].

2.3 Condição Necessária de Convergência de uma Série

Nesta seção, apresentaremos critérios necessários e suficientes que garantem a convergência de uma série numérica

Teorema 2.3.1 — *Se uma série converge, o seu termo geral u_n tende para zero quando n tende para infinito.*[5]

Corolário 2.3.1— *Se o termo Geral u_n , de uma série não tende para zero quando n tende para infinito, então a série diverge.* [5]

Teste da Comparação: Sejam duas séries de termos *positivos*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots, \quad (2.2)$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n + \cdots. \quad (2.3)$$

Temos os seguintes teoremas.

Teorema 2.3.2 — *Se os termos da série (2.2) não forem superiores aos correspondentes termos da série (2.3), isto é, se*

$$u_n \leq v_n \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (2.4)$$

e se a série (2.3) converge, então a série (2.2) também converge.

Teorema 2.3.3 — *Se os termos da série (2.2), não forem inferiores aos correspondentes termos da série (2.3), isto é, se*

$$u_n \geq v_n \quad \text{para todo } n = 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

, e se a série (2.3) diverge, a série (2.2) diverge igualmente.

Teorema 2.3.4 — (regra de d'Alembert) *Se numa série de termos positivos*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \quad (2.6)$$

a razão

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

tiver um limite finito l quando $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l, \quad (2.7)$$

então:

1. a série converge quando $l < 1$;

2. a série diverge quando $l > 1$;
3. Incunclusivo se $l = 1$.

Teste da Raiz: Seja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

- Se $L < 1$, então a série converge.
- Se $L > 1$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ não existe, então a série diverge
- e se $L=1$, o teste é inconclusivo, e pode ser necessário usar outros métodos para determinar a convergência ou divergência da série.

Teorema 2.3.5— (Séries alternadas Teorema de Leibniz)

Considerámos, até agora, séries de termos positivos. Neste parágrafo vamos considerar séries cujos *sinais dos termos são alternados*, isto é, séries da forma

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots, \quad (2.8)$$

em que $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ são positivos.

Teorema de Leibniz Se numa série alternada

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots \quad (u_n > 0), \quad (2.9)$$

os termos vão decrescendo

$$u_1 > u_2 > u_3 > \cdots \quad (2.10)$$

e se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0, \quad (2.11)$$

a série (2.8) converge, a sua soma é positiva e não é superior ao primeiro termo.

2.3.1 Séries de Funções

Chama-se *série de funções* a toda a série na qual o termo geral é uma função duma variável x .

Consideremos a série de funções

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \quad (2.12)$$

Dando a x diferentes valores numéricos obtêm-se diferentes séries numéricas que podem tanto convergir como divergir. O conjunto dos valores de x para os quais a série de funções converge

chama-se *domínio de convergência* dessa série. É evidente que, no domínio de convergência duma série de funções, a sua soma é uma certa função de x . Eis porque se a designa por $s(x)$.

Definição 2.3.2 Uma série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge pontualmente em x_0 se a sequência das somas parciais $S_N(x_0) = \sum_{n=1}^N f_n(x_0)$ converge para um valor finito quando $N \rightarrow \infty$. Formalmente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ converge pontualmente em } x_0 \text{ se } \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x_0) \text{ existe e é finito.}$$

Exemplo 2.1 Vamos agora apresentar o gráfico de sequência de funções $f_n(x) = x^n$ definida no intervalo $[0, 1]$, bem como sua convergência pontual para a função limite.

- Cada curva corresponde a um valor diferente de n .
- À medida que $n \rightarrow \infty$, os gráficos de $f_n(x)$ se aproximam de zero para todo $x \in [0, 1)$, mas permanecem iguais a 1 no ponto $x = 1$.
- A função limite é representada pela linha preta tracejada, e é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [0, 1) \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Esse é um exemplo clássico de **convergência pontual**, pois, para cada ponto fixo x , a sequência $f_n(x) \rightarrow f(x)$ quando $n \rightarrow \infty$.

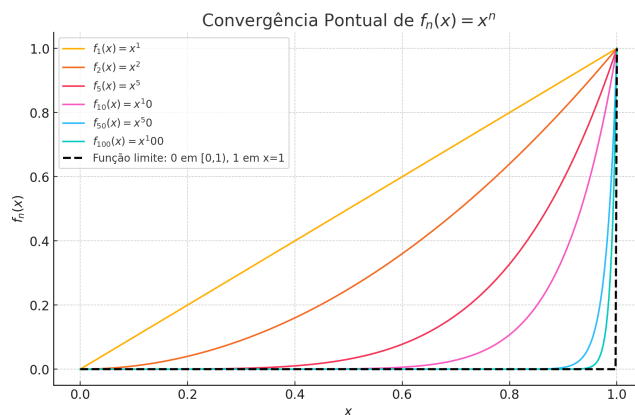


Figura 2.1: Convergência Pontual

Definição 2.3.3 Uma série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente em um intervalo I se, para qualquer $\epsilon > 0$, existe um N tal que para todos $n \geq N$ e para todos $x \in I$,

$$|S_N(x) - S(x)| < \epsilon,$$

onde $S(x)$ é o limite da série quando $N \rightarrow \infty$. A convergência uniforme é mais forte que a convergência pontual e garante que a função soma herda certas propriedades das funções $f_n(x)$, como continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade.

Exemplo 2.2 Neste exemplo vamos mostrar que a função $f(x) = x^n$ não converge Uniformemente apesar de convergir pontualmente.

$$f_n(x) = x^n, \quad x \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Convergência pontual. Para cada $x \in [0, 1)$ tem-se $0 \leq x < 1$, logo $x^n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Em $x = 1$, $1^n = 1$ para todo n . Portanto, f_n converge pontualmente para

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Falha de convergência uniforme em $[0, 1]$, (estimando o supremo)

Para $n \in \mathbb{N}$, tome $x_n = 1 - \frac{1}{n} \in [0, 1)$. Então

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = |(1 - \frac{1}{n})^n - 0| = (1 - \frac{1}{n})^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1} > 0.$$

Assim,

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| \rightarrow e^{-1},$$

em particular não tende a 0. Portanto, a convergência não é uniforme.

Observação. Se $0 \leq a < 1$, então em $[0, a]$ vale

$$\sup_{x \in [0, a]} |x^n - 0| = a^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

ou seja, $f_n \rightarrow 0$ *uniformemente* em $[0, a]$.

Definição 2.3.4 Uma série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge absolutamente se a série $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ converge para todo x em um dado intervalo. A convergência absoluta implica a convergência pontual da série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

2.4 Critério de convergência de Séries de Funções

A convergência de séries de funções é mais complicada do que a convergência de séries numéricas porque envolve tanto a convergência em cada ponto x quanto a convergência no comportamento global da função resultante.

Critério de Weierstrass (M-Test): Se existir uma sequência de constantes M_n tais que $|f_n(x)| \leq M_n$ para todos $x \in I$ e $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente em I .

Teste de Dirichlet O Teste de Dirichlet para séries de funções afirma que se $\{a_n(x)\}$ é uma sequência de funções monótona e limitada, e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ é uma série de termos que convergem para zero, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ converge uniformemente.

Teste de Cauchy (Critério da Soma das Somatórias) Uma série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente em um intervalo I se, para todo $\epsilon > 0$, existe um número N tal que, para todos $n, m \geq N$ e para todo $x \in I$:

$$\left| \sum_{k=n}^m f_k(x) \right| < \epsilon. \quad (2.13)$$

Este é um critério geral de convergência uniforme, também conhecido como o **Critério de Cauchy**.

2.5 Séries de Potências

Definição 2.7.1 Chama-se *série inteira* ou *série de potências* a uma série da forma

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \quad (2.14)$$

em que $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ são constantes dadas, chamadas *coeficientes* da série.[5]

Apresentaremos os teoremas que garantem a convergência das séries de potências, cujas demonstrações podem ser encontradas em [5]. **Teorema (d'Abel)**

- a) Se uma série inteira converge para um certo valor de x_0 , não nulo, converge absolutamente para qualquer valor de x tal que

$$|x| < |x_0|;$$

- b) Se a série diverge para um certo valor de x'_0 , diverge para qualquer x tal que

$$|x| > |x'_0|.$$

Chama-se também *série de potências* a uma série da forma

$$a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \cdots + a_n(x - a)^n + \cdots, \quad (2.15)$$

onde as constantes $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ são igualmente chamadas os coeficientes da série. Os termos desta série contêm as potências crescentes de $x - a$.

O intervalo de convergência de uma série de potências é o intervalo compreendido entre os pontos $(c - R$ e $c + R)$, onde a série converge absolutamente para todos os valores de x dentro desse intervalo e diverge para valores de x fora dele. O número R é denominado raio de convergência da série.

Nos extremos do intervalo, isto é, nos pontos $x = c - R$ e $x = c + R$, a convergência da série não é garantida e deve ser analisada separadamente.

Observa-se que, em alguns casos, o intervalo de convergência pode se reduzir a um único ponto ($x = c$), enquanto em outros pode abranger toda a reta real ($R = \infty$).

Indiquemos um modo para determinar o raio de convergência de uma série inteira.

Consideremos a série

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

E formemos a série dos valores absolutos dos seus termos:

$$|a_0| + |a_1||x| + |a_2||x|^2 + |a_3||x|^3 + \cdots + |a_n||x|^n + \cdots$$

Para determinar a convergência desta última série (de termos positivos) apliquemos a *regra de d'Alembert*. Suponhamos que existe o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L. \quad (2.16)$$

Então, segundo a regra de d'Alembert, a série converge se $L|x| < 1$, isto é, para $|x| < \frac{1}{L}$, e diverge quando $L|x| > 1$, isto é, para $|x| > \frac{1}{L}$.

Por conseguinte, a série (1) converge absolutamente para $|x| < \frac{1}{L}$. Se $|x| > \frac{1}{L}$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x| \cdot \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1,$$

e a série (4) diverge, já que o termo geral não tende para zero.

Mas, então, o termo geral da série inteira (1) não tende para zero, o que significa, em virtude do critério de convergência necessário, que esta série inteira diverge quando $|x| > \frac{1}{L}$.

Resulta do que precede que o intervalo $|x| < \frac{1}{L}$ é o intervalo de convergência da série inteira (1), isto é,

$$R = \frac{1}{L} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n + 1}{a_n} \right|. \quad (2.17)$$

De maneira análoga, pode-se também utilizar a *regra de Cauchy* para determinar o intervalo de convergência de uma série inteira de Potência. Obtem se então:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \quad (2.18)$$

2.6 Derivação e Integração de Séries de Potências

A soma de uma série de potências é uma função $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ cujo domínio é o intervalo de convergência da série. O teorema a seguir diz que podemos derivar ou integrar a cada termo individual na série, como faríamos para um polinômio. Isso é chamado **derivação e integração termo a termo**.

Teorema 2.6.1 Se a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ tiver um raio de convergência $R > 0$, então a função f definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

é diferenciável (e portanto contínua) no intervalo $(a-R, a+R)$ e

$$(i) \quad f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$$

$$(ii) \quad \int f(x) dx = C + c_0(x-a) + c_1 \frac{(x-a)^2}{2} + c_2 \frac{(x-a)^3}{3} + \cdots$$

$$= C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

Os raios de convergência das séries de potências nas Equações (i) e (ii) são ambos R .

2.7 Funções aproximáveis

Definição 2.4. Funções aproximáveis referem-se a classes de funções matemáticas para as quais é possível encontrar representações analíticas ou polinomiais que se aproximam da função original em uma determinada região. Essas aproximações são frequentemente obtidas por meio de métodos como séries de Taylor, polinômios de interpolação ou outras técnicas de teoria de aproximação[2].

2.7.1 Aproximação Local

Definição 2.5.1 A aproximação local refere-se à representação de uma função em torno de um ponto específico em seu domínio, destaca-se a importância da aproximação local ao desenvolver séries de potências para funções analíticas em torno de um ponto [2].

2.7.2 Aproximação Global

Definição 2.6.2 A aproximação global refere-se à representação de uma função em uma escala maior, muitas vezes em todo o seu domínio ou em intervalos extensos [11].

2.8 Erro de Aproximação

Definição 2.8.1 O Erro de Aproximação é a diferença entre a solução exacta de um problema e a solução aproximada que obtemos por meio de um método numérico

Seja $f(x)$ uma função exacta e $P(x)$ a aproximação de $f(x)$, o erro de aproximação $E(x)$ pode ser expresso como:

$$E(x) = f(x) - P(x) \quad (2.19)$$

Esse erro pode ser avaliado em diferentes contextos, como erros absolutos, relativos, e no caso de séries de aproximação.

2.9 Tipos de Erro de Aproximação

2.9.1 Erro Absoluto

O Erro Absoluto é a diferença entre o valor exacto e o valor aproximado. Se $f(x)$ é o valor exato e $P(x)$ é o valor aproximado, o erro absoluto é dado por:

$$\text{Erro Absoluto} = |f(x) - P(x)| \quad (2.20)$$

Por exemplo, se $f(x) = 3.14159$ e $P(x) = 3.14$, o erro absoluto é:

$$|3.14159 - 3.14| = 0.00159$$

2.9.2 Erro Relativo

O Erro Relativo é o erro absoluto dividido pelo valor exato, expressando a magnitude do erro em relação ao valor exacto:

$$\text{Erro Relativo} = \frac{|f(x) - P(x)|}{|f(x)|} \quad (2.21)$$

Por exemplo, para $f(x) = 3.14159$ e $P(x) = 3.14$, o erro relativo é:

$$\frac{|3.14159 - 3.14|}{|3.14159|} = \frac{0.00159}{3.14159} \approx 0.000506$$

2.9.3 Erro de Truncamento

Quando aproximamos uma função ou processo por uma série infinita (como uma série de potências ou uma série de Taylor), o erro de truncamento é o erro introduzido ao cortar a série após um número finito de termos [3].

Para uma série de Taylor, o erro de truncamento $R_n(x)$ após n termos é dado por:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) \quad (2.22)$$

Onde $P_n(x)$ é a aproximação obtida com n termos da série. Uma expressão geral para o erro de truncamento pode ser dada pelo **resto de Lagrange**:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - c)^{n+1} \quad (2.23)$$

Onde ξ é algum ponto entre c e x , e $f^{(n+1)}(\xi)$ é a $(n+1)$ -ésima derivada de $f(x)$ em ξ .

2.9.4 Erro de Aproximação Global

O erro global refere-se ao erro total acumulado quando uma função é aproximada ao longo de um intervalo. Para um intervalo $[a, b]$, o erro global pode ser descrito como o erro de truncamento total, considerando todas as aproximações feitas ao longo desse intervalo.

2.9.5 Erro de Interpolação

Quando usamos interpolação para aproximar uma função, o erro de interpolação é dado pela diferença entre o valor exacto da função e o valor obtido pela interpolação em um ponto. Para uma interpolação polinomial de grau n , o erro de interpolação pode ser expresso como[10]:

$$E(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=1}^n (x - x_i) \quad (2.24)$$

Onde x_i são os pontos de interpolação e ξ é algum ponto no intervalo de interpolação.

Capítulo 3

Polinômios de Aproximação

Neste capítulo, abordaremos a teoria relacionada aos polinômios de aproximação, iniciando com a definição do termo interpolação polinomial e a apresentação do polinômio interpolador, destacando o teorema que garante sua unicidade. Em seguida, exploraremos os principais métodos de interpolação, incluindo os métodos de Lagrange, Newton, Hermite e Chebyshev. Por fim, faremos uma introdução ao método dos mínimos quadrados, ampliando a compreensão sobre técnicas de ajuste de funções.

Definição 3.1.1 Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real definida em um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Um polinômio de aproximação de f é um polinômio $P_n(x)$ de grau n , tal que

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n,$$

construído de forma a aproximar $f(x)$ com um erro mínimo em torno de um ponto $x_0 \in I$ ou em todo o intervalo I . [6].

3.1 Interpolação Polinomial

Definição 3.1.2 A interpolação polinomial é uma técnica utilizada para estimar valores intermediários de uma função com base em um conjunto discreto de pontos conhecidos [4].

O objectivo da interpolação polinomial é aproximar uma função $f(x)$ por um polinômio $p(x)$ de grau menor ou igual a n , sendo $n + 1$ a quantidade de pontos distintos conhecidos, isto é, $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$, tal que

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Nos nós de interpolação, o valor do polinômio é igual ao valor da função a ser interpolada. Assim, se $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$, com $a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 0, 1, 2, \dots, n$, temos

o sistema:

$$\begin{cases} p(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n = f(x_0) \\ p(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_nx_1^n = f(x_1) \\ p(x_2) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_2^n = f(x_2) \\ \vdots \\ p(x_n) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_nx_n^n = f(x_n). \end{cases}$$

Em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Neste sistema, temos $n + 1$ equações e $n + 1$ incógnitas. Essas incógnitas são os coeficientes a_i , com $0 \leq i \leq n$.

Para determinar os coeficientes de:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n,$$

basta resolver o sistema linear (3.1), o que pode apresentar dificuldades se n for suficientemente grande.

Exemplo 3.1.1. *Obter o polinômio que interpole uma função conhecida nos pontos $f(-1) = 1$, $f(1) = 2$ e $f(2) = -1$, com $n = 2$. Os nós de interpolação são $-1, 1, 2$.*

Iremos interpolar esta função por um polinômio $p(x)$ de grau menor ou igual a 2, uma vez que temos 3 pontos conhecidos. Montamos o seguinte sistema de equações: Se $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, montamos o sistema:

$$\begin{cases} p(-1) = a_0 - a_1 + a_2 = 1 \\ p(1) = a_0 + a_1 + a_2 = 2 \\ p(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 = -1 \end{cases}$$

Equivalente a:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 2 \\ 0 + 2a_1 + 0 = 1 \\ 0 + 3a_1 + 3a_2 = -2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 2 \\ 0 + 2a_1 + 0 = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2} \\ 0 + 0 + 3a_2 = -\frac{7}{2} \Rightarrow a_2 = -\frac{7}{6} \end{cases}$$

Dai, obtemos:

$$a_0 = \frac{8}{3}.$$

Assim, o polinômio interpolador é:

$$p(x) = \frac{8}{3} + \frac{1}{2}x - \frac{7}{6}x^2. \quad (3.2)$$

Esse polinômio interpola $f(x)$ nos pontos $x_0 = -1$, $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$.

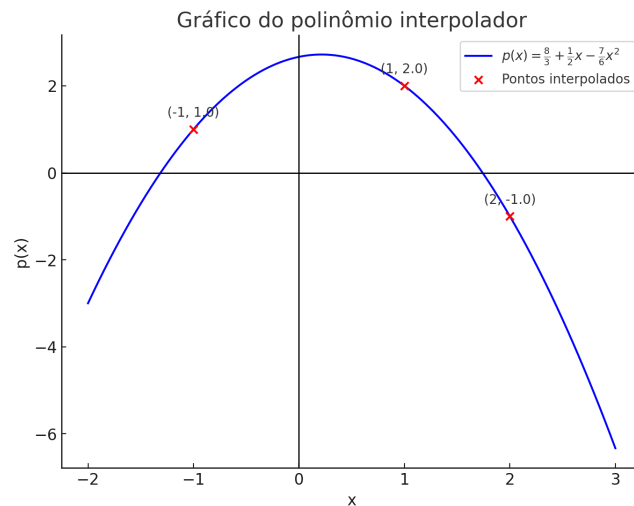


Figura 3.1: Gráfico do Exemplo 3.1.1

3.1.1 Existência e Unicidade do Polinômio Interpolador

Teorema 3.1 Dada uma função real $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e dados $n + 1$ pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$ distintos dois a dois no intervalo fechado $[a, b]$, existe um único polinômio de grau até n , $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, tal que $p(x_i) = f(x_i)$, para todo i , $0 \leq i \leq n$ [9].

Demonstração. Seja $p(x)$ um polinômio de grau no máximo n da forma:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Impondo que $p(x)$ satisfaça $p(x_i) = f(x_i)$ para cada $i = 0, 1, \dots, n$ leva ao seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} p(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = f(x_0) \\ p(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = f(x_1) \\ \vdots \\ p(x_n) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = f(x_n). \end{cases} \quad (3.3)$$

Este sistema pode ser escrito em forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

A matriz dos coeficientes é a matriz de Vandermonde associada aos pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Sabemos pelo **Teorema 2.1** que o determinante de Vandermonde é dado por:

$$\det(V) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i). \quad (3.6)$$

Como os pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$ são distintos dois a dois, temos $x_j - x_i \neq 0$ para $i \neq j$, o que implica que $\det(V) \neq 0$. Assim, a matriz V é invertível, garantindo que o sistema tem uma única solução para os coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n$.

Portanto, existe um único polinômio $p(x)$ de grau no máximo n que satisfaz $p(x_i) = f(x_i)$ para todos $i = 0, 1, \dots, n$. $\square$

3.2 Métodos de Interpolação Polinômial

3.2.1 Interpolação de Lagrange

Definição 3.2.1 Seja $f(x)$ definida em um intervalo $[a, b]$ contendo $(n + 1)$ pontos distintos: $x_0, x_1, \dots, x_n$, e $y_i = f(x_i)$, para $i = 0, 1, \dots, n$.

Representa-se o polinômio de grau $\leq n$ que interpola $f(x)$ em $x_0, x_1, \dots, x_n$ pela forma: [12].

$$P(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot L_i(x) \quad (3.7)$$

onde:

- n é o número de pontos conhecidos;
- y_i são as ordenadas desses pontos;
- $L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - t_j}{t_i - t_j}$ e;
- $L_k(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq i \\ 1, & \text{se } k = i \end{cases}$

Exemplo 3.2.1. *Suponha um agricultor que descobriu algum minério em suas terras, e ele precisa decidir se abandona a agricultura para dedicar-se a mineração nas suas terras, para tal ele deve saber quais são as despesas que terá na mineração adicionalmente deve comparar os ganhos da agricultura com os ganhos possíveis da mineração. Vamos supor que o agricultor tirou um faixa de 1 km da sua terra e separou em amostras de 250 m, como mostra a tabela abaixo:*

Número da amostra	Concentração do minério(kg/m ³)
0	0.5
1	0.8
2	0.3
3	1
4	0.7

Tabela 3.1: Tabela 1- Valores das Concentrações encontradas em cada amostra

A pergunta a ser respondida é oque acontece com a concentração de minério nos 250 m que separam cada amostra. Podemos usar a interpolação de Lagrange de forma a acharmos um polinomio que passa por todos os pontos,

Vamos usar a itepolação de lagrange para achar a função.

Passo 1: Entendendo o Problema

Dado um conjunto de pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, o objetivo é encontrar o polinômio de interpolação de Lagrange $P(x)$ que passa por todos esses pontos.

Os pontos fornecidos são:

$$(0, 0.5), (1, 0.8), (2, 0.3), (3, 1), (4, 0.7)$$

Passo 2: Fórmula do Polinômio de Lagrange

O polinômio interpolador de Lagrange é dado por:

$$P(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot L_i(x) \quad (3.8)$$

Onde $L_i(x)$ são as funções base de Lagrange, definidas como:

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (3.9)$$

Aqui, n é o número de pontos menos 1 ($n = 4$ neste caso).

Passo 3: Calculando as Funções Base $L_i(x)$

Vamos calcular cada $L_i(x)$ para os 5 pontos.

Para $i = 0$:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)(x_0 - x_4)}$$

Substituindo os valores dos pontos:

$$L_0(x) = \frac{(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)}{(0 - 1)(0 - 2)(0 - 3)(0 - 4)}$$

Calculando:

$$L_0(x) = \frac{(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)}{-24}$$

Para $i = 1$:

$$L_1(x) = \frac{(x - 0)(x - 2)(x - 3)(x - 4)}{(1 - 0)(1 - 2)(1 - 3)(1 - 4)}$$

Calculando:

$$L_1(x) = \frac{(x)(x - 2)(x - 3)(x - 4)}{-6}$$

Para $i = 2$:

$$L_2(x) = \frac{(x - 0)(x - 1)(x - 3)(x - 4)}{(2 - 0)(2 - 1)(2 - 3)(2 - 4)}$$

Calculando:

$$L_2(x) = \frac{(x)(x - 1)(x - 3)(x - 4)}{-4}$$

Para $i = 3$:

$$L_3(x) = \frac{(x - 0)(x - 1)(x - 2)(x - 4)}{(3 - 0)(3 - 1)(3 - 2)(3 - 4)}$$

Calculando:

$$L_3(x) = \frac{(x)(x-1)(x-2)(x-4)}{6}$$

Para $i = 4$:

$$L_4(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-0)(4-1)(4-2)(4-3)}$$

Calculando:

$$L_4(x) = \frac{(x)(x-1)(x-2)(x-3)}{24}$$

Passo 4: Construindo o Polinômio $P(x)$

Agora, substituímos os valores de $L_i(x)$ e y_i na fórmula do polinômio de Lagrange:

$$P(x) = y_0 \cdot L_0(x) + y_1 \cdot L_1(x) + y_2 \cdot L_2(x) + y_3 \cdot L_3(x) + y_4 \cdot L_4(x)$$

Substituindo os valores de y_i :

$$P(x) = 0.5 \cdot L_0(x) + 0.8 \cdot L_1(x) + 0.3 \cdot L_2(x) + 1 \cdot L_3(x) + 0.7 \cdot L_4(x)$$

Passo 5: Expansão e Simplificação

Expansão e simplificação dos termos resulta no polinômio final:

$$P(x) = -0.175x^4 + 1.383\bar{3}x^3 - 3.325x^2 + 2.416\bar{6}x + 0.5$$

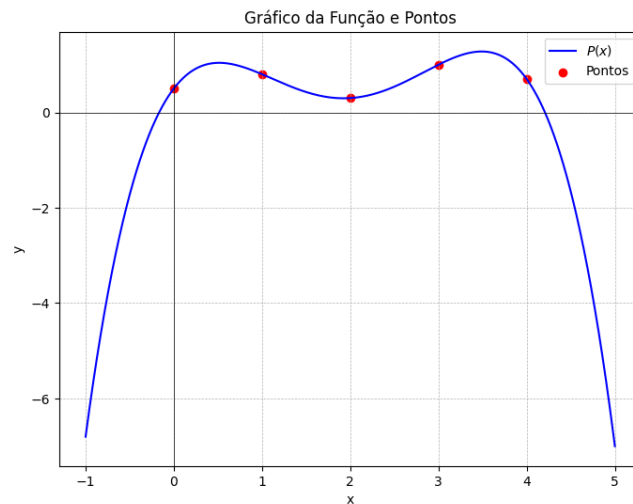


Figura 3.2: Gráfico da Interpolação de Lagrange

No exemplo acima, das concentrações de minério, $p(x)$ é a função que relaciona distância (ou o número da amostra) e quantidade de minério. O problema é que para conhecer o com-

portamento dessa função em todo o domínio, precisaríamos medir as concentrações de minério por todo o quilômetro de terra que estamos estudando. Então, uma atitude razoável é tentar descobrir uma aproximação para esse comportamento que nos ajude a tomar decisões sobre os investimentos na extração do minério.

É possível utilizar o Interpolador de Lagrange para funções de duas variáveis, mas, ele precisa ser estendido para duas dimensões. Essa extensão é conhecida como **Interpolação de Lagrange Bidimensional**.

Se tivermos uma função $f(x, y)$ definida em um conjunto de pontos (x_i, y_j) e conhecemos seus valores $f_{i,j} = f(x_i, y_j)$, podemos construir um **Polinômio interpolador** na forma:

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m f(x_i, y_j) L_i(x) M_j(y)$$

onde: - $L_i(x)$ são os polinômios de Lagrange na variável x :

$$L_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

- $M_j(y)$ são os polinômios de Lagrange na variável y :

$$M_j(y) = \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^m \frac{y - y_l}{y_j - y_l}$$

Exemplo 3.2.2. *Vamos interpolar uma função $f(x, y)$ utilizando os pontos $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(0, 0)$ com os valores correspondentes $f(1, 0) = 0$, $f(0, 1) = 0$ e $f(0, 0) = 1$, usando **Interpolação de Lagrange Bidimensional**.*

Passo 1: Fórmula Geral da Interpolação de Lagrange Bidimensional O polinômio interpolador de Lagrange para funções de duas variáveis é dado por:

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m f(x_i, y_j) L_i(x) M_j(y)$$

Passo 2: Construindo os Polinômios de Base Temos os três pontos $(x_0, y_0) = (1, 0)$, $(x_1, y_1) = (0, 1)$ e $(x_2, y_2) = (0, 0)$, e queremos encontrar o polinômio interpolador $P(x, y)$.

Os polinômios de base de Lagrange em duas variáveis são:

$$L_0(x, y) = \frac{(x - 0)(y - 1)}{(1 - 0)(0 - 1)}$$

$$L_1(x, y) = \frac{(x - 1)(y - 0)}{(0 - 1)(1 - 0)}$$

$$L_2(x, y) = \frac{(x-1)(y-1)}{(0-1)(0-1)}$$

Agora substituímos os valores de $f(x, y)$:

$$P(x, y) = f(1, 0)L_0(x, y) + f(0, 1)L_1(x, y) + f(0, 0)L_2(x, y)$$

$$P(x, y) = 0 \cdot L_0(x, y) + 0 \cdot L_1(x, y) + 1 \cdot L_2(x, y)$$

$$P(x, y) = L_2(x, y)$$

Calculamos $L_2(x, y)$:

$$L_2(x, y) = \frac{(x-1)(y-1)}{(0-1)(0-1)}$$

$$L_2(x, y) = (x-1)(y-1)$$

Passo 3: Polinômio Interpolador Final

$$P(x, y) = (x-1)(y-1)$$

Expandindo:

$$P(x, y) = xy - x - y + 1$$

Conclusão

O polinômio interpolador que passa pelos pontos $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(0, 0)$ com os valores dados é:

$$P(x, y) = xy - x - y + 1$$

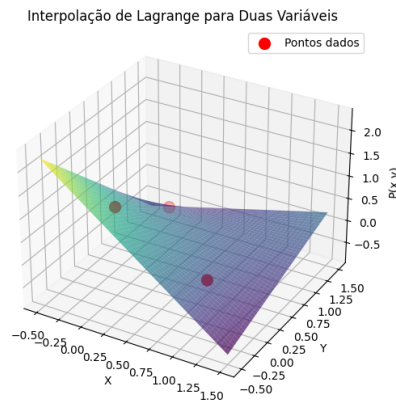


Figura 3.3: Interpolação de Lagrange da função $P(x,y) = xy - x - y + 1$

3.2.2 Interpolação de Newton

A Interpolação de Newton trata-se de uma fórmula alternativa mais eficaz do que as outras formas de interpolações já apresentadas para o cálculo do polinômio interpolador, ela é baseada numa construção sucessiva a partir dos polinômios de graus inferiores. Antes de demonstrar a fórmula da Interpolação de Newton é preciso que façamos um estudo sobre Diferenças Divididas.

Diferenças divididas

As diferenças divididas são razões incrementais e constituem aproximações discretas de derivadas, desde que se utilizem pontos suficientemente próximos. No caso que nos interessa, iremos utilizar os nós (pontos) de interpolação que podem estar bastante afastados. Veremos que para funções regulares é possível estabelecer uma relação entre o valor de uma diferença dividida e a derivada num certo ponto.

Seja f uma função definida em $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ pontos distintos desse intervalo. A função:

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} \quad (3.10)$$

Chama-se diferença dividida de primeira ordem de f relativamente aos argumentos x_i, x_{i+1} .

As diferenças divididas de ordem superior definem-se recursivamente. Assim, define-se a diferença dividida de ordem n relativamente aos argumentos $f[x_i] = f(x_i)$,

com a seguinte ordenação $i = 0, 1, 2, \dots, n$, por:

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+n}] - f[x_i, \dots, x_{i+n-1}]}{x_n - x_i}.$$

onde $f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_n]$ é a diferença dividida de ordem n da função f nos pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$. O cálculo das diferenças divididas de diferentes ordens pode ser sistematizado por uma tabela:

Tabela 3.2: Tabela de Diferenças Divididas de Newton

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_n]$
x_0	f_0			
x_1	f_1	$\frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$		
x_2	f_2	$\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}$	$\frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$	
x_3	f_3	$\frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2}$	$\frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$	$\frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$
x_4	f_4	$\frac{f_4 - f_3}{x_4 - x_3}$	$\frac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2}$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$

Analisando a tabela acima podemos concluir que:

- Cada coluna é construída à custa da coluna anterior;
- Com $(n + 1)$ pontos podemos construir n diferenças divididas de primeira ordem, $(n-1)$ de segunda ordem e assim, sucessivamente, até à uma diferença dividida de ordem n .

Fórmula do Polinômio de Newton das Diferenças Divididas

Vamos de forma simples e direta demonstrar como se obtém o polinômio interpolador de Newton com as diferenças divididas:

Seja,

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \quad (3.11)$$

o único polinômio interpolador de f nos nós de interpolação $x_0, x_1, \dots, x_n$ de grau menor ou igual a n , com $a_0, a_1, \dots, a_n$ constantes desse polinômio.

Como já foi visto, que podemos determinar as diferenças divididas de forma que sejam coeficientes de um polinômio. Agora, iremos fazer uma aplicação direta com as diferenças divididas em um polinômio qualquer para chegarmos à fórmula do polinômio interpolador de Newton.

Para determinar o a_0 , note-se que, se $P_n(x)$ pode ser descrito na forma (3.10), temos que:

$$a_0 = P_n(x_0) = f(x_0).$$

De forma análoga, temos que a_1 pode ser determinado calculando $P_n(x)$ no ponto x_1 . Assim,

$$f(x_0) + a_1(x - x_0) = P_n(x_1) = f(x_1) \quad \Rightarrow \quad a_1 = f[x_0, x_1].$$

Prosseguindo no mesmo raciocínio, é possível provar que:

$$a_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k], \quad \text{com } k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Por conseguinte, podemos escrever o polinômio interpolador de Newton da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ &\quad + f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Simplificando o polinômio, chegamos à fórmula do polinômio de Newton com as diferenças divididas:

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{j=1}^n f[x_0, x_1, \dots, x_j] \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_i).$$

Notemos ainda que, para encontrar o polinômio de grau $(n+1)$, basta utilizarmos a fórmula:

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n+1}] \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

Exemplo 3.2.3. *Suponha o seguinte Problema: Você tem as seguintes temperaturas medidas durante o dia:*

- Às 8h: 15°C (ponto $(8, 15)$)
- Às 12h: 20°C (ponto $(12, 20)$)
- Às 18h: 16°C (ponto $(18, 16)$)

O objetivo é prever a temperatura às 14h, usando o polinômio interpolador de Newton.

Passos

1. Pontos conhecidos

Temos os pontos $(x_0, y_0) = (8, 15)$, $(x_1, y_1) = (12, 20)$ e $(x_2, y_2) = (18, 16)$.

2. Cálculo das Diferenças Divididas

As diferenças divididas são calculadas da seguinte forma:

$$f[x_0] = y_0 = 15$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{20 - 15}{12 - 8} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{16 - 20}{18 - 12} = \frac{-4}{6} \approx -0.6667$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{-0.6667 - 1.25}{18 - 8} = \frac{-1.9167}{10} \approx -0.1917$$

3. Polinômio de Newton

Usando as diferenças divididas, o polinômio de Newton é construído da seguinte forma:

$$P(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

Substituindo os valores:

$$P(x) = 15 + 1.25(x - 8) - 0.1917(x - 8)(x - 12)$$

4. Previsão da Temperatura às 14h

Agora, vamos calcular a temperatura prevista para $x = 14$.

$$P(14) = 15 + 1.25(14 - 8) - 0.1917(14 - 8)(14 - 12)$$

$$P(14) = 15 + 1.25(6) - 0.1917(6)(2)$$

$$P(14) = 15 + 7.5 - 0.1917(12)$$

$$P(14) = 15 + 7.5 - 2.3$$

$$P(14) \approx 20.2C$$

Resultado

A previsão de temperatura para as 14h é aproximadamente **20.2°C**.

Vamos trazer uma ilustracao grafica.

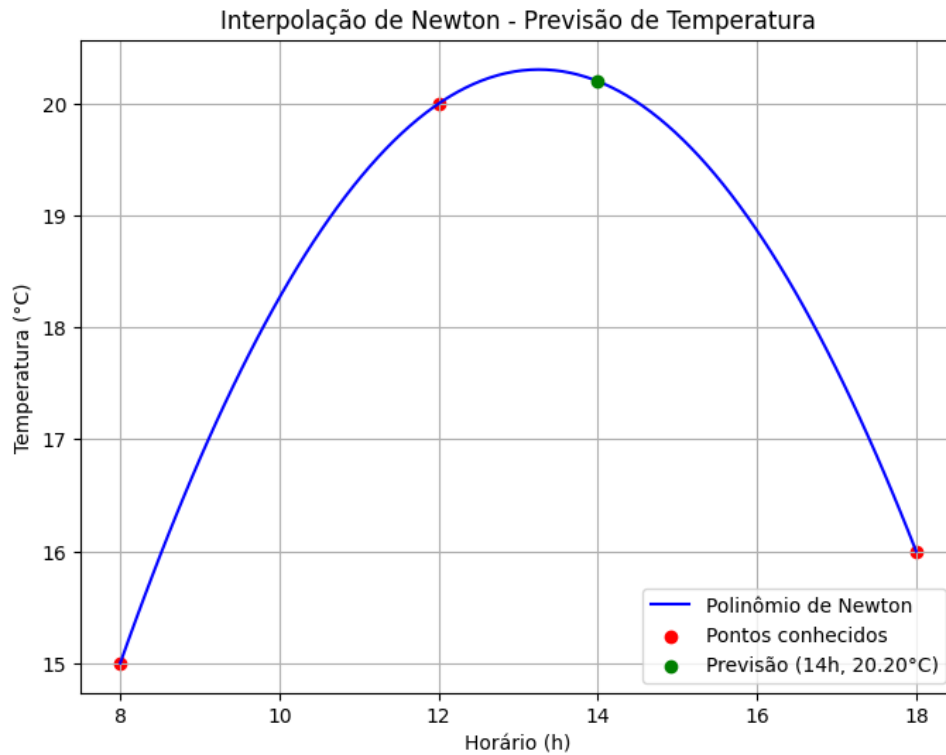


Figura 3.4: Interpolação de Newton

Exemplo 3.2.4 Neste exemplo, usamos a interpolação de Newton para prever a temperatura em um horário intermediário, onde não tínhamos dados de medição diretos, adicionalmente temos a ilustração de como a interpolação de Newton pode ser usada para construir um polinômio que passa por um conjunto de pontos dados, e como as diferenças divididas são calculadas para formar esse polinômio.

Assim, como foi feito na interpolação de Lagrange, usaremos o mesmo **Exemplo 3.2.2** para mostrar o comportamento da Interpolação de Newton bidimensional.

Passo 1: Organização dos pontos Os pontos fornecidos são:

$$(1, 0), \quad (0, 1), \quad (0, 0)$$

E os valores da função nesses pontos são:

$$f(1, 0) = 0, \quad f(0, 1) = 0, \quad f(0, 0) = 1.$$

Passo 2: Construção da Tabela de Diferenças Divididas A interpolação de Newton bidimensional pode ser obtida a partir da interpolação unidimensional aplicada duas vezes.

Passo 2.1: Diferenças Divididas em x Organizamos os valores de $f(x, y)$ para diferentes valores de x :

(x, y)	$f(x, y)$
$(1, 0)$	0
$(0, 1)$	0
$(0, 0)$	1

Agora, calculamos as diferenças divididas em relação a x :

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(0, 1) - f(1, 0)}{0 - 1} = \frac{0 - 0}{0 - 1} = 0$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(0, 0) - f(0, 1)}{0 - 0} = \frac{1 - 0}{0 - 0} \quad (\text{indeterminado})$$

Como um dos pontos se repete em x , devemos reformular considerando a interpolação em y também.

Passo 3: Construção do Polinômio de Newton Bidimensional O polinômio de Newton bidimensional é dado por:

$$P(x, y) = f(x_0, y_0) + f[x_1, x_0](x - x_0) + f[y_1, y_0](y - y_0) + f[x_1, x_0, y_1, y_0](x - x_0)(y - y_0)$$

Substituindo os valores conhecidos:

$$P(x, y) = 1 + 0(x - 0) + 0(y - 0) + (-1)(x - 0)(y - 0)$$

$$P(x, y) = 1 - xy.$$

Resultado Final O polinômio interpolador de Newton bidimensional que passa pelos pontos dados é:

$$P(x, y) = 1 - xy.$$

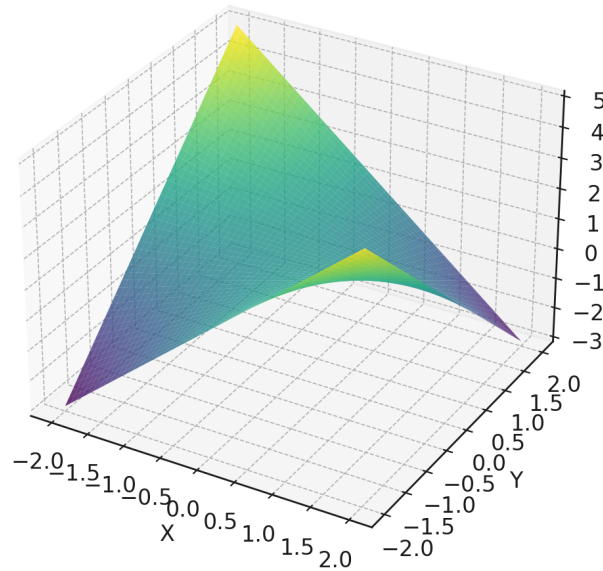
Gráfico da função $P(x, y) = 1 - xy$ 

Figura 3.5: Gráfico da função Bidimensional

Esse polinômio satisfaz:

- $P(1, 0) = 1 - (1)(0) = 0$, correto;
- $P(0, 1) = 1 - (0)(1) = 0$, correto;
- $P(0, 0) = 1 - (0)(0) = 1$, correto.

Comparação dos Métodos

Os polinômios interpoladores obtidos pelos dois métodos foram:

- Newton: $P_N(x, y) = 1 - xy$;
- Lagrange: $P_L(x, y) = (1 - x)(1 - y)$

Distribuindo $P_L(x, y)$:

$$P_L(x, y) = 1 - x - y + xy.$$

Perceba que os polinômios são equivalentes, pois:

$$P_N(x, y) = 1 - xy$$

$$P_L(x, y) = 1 - x - y + xy.$$

Embora a forma seja diferente, ambos representam superfícies que passam pelos pontos dados. Isso mostra que tanto a interpolação de Newton quanto a de Lagrange levam ao mesmo

resultado, apenas escritos de maneiras diferentes. Adicionalmente, ambos os métodos fornecem polinômios semelhantes, provando que a interpolação é única para um dado conjunto de pontos.

3.2.3 Polinômios de Hermite

Uma modificação para a técnica de interpolação de Lagrange é interpolar os valores da função e da sua derivada em um conjunto de pontos. Esse procedimento dá origem à interpolação de Hermite. A ideia é representar uma função por um polinômio que seja interpolador de f em alguns pontos de seu domínio e que sua derivada seja interpolada nesses mesmos pontos [1]. Então, supondo que f seja diferenciável, será preciso achar um polinômio H tal que:

$$\begin{aligned} f(x_i) &= H(x_i) \\ f'(x_i) &= H'(x_i), \quad \text{com } i = 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

Quando tal circunstância acontece, diz-se que as funções f e H osculam 2 vezes pelos pontos x_i . A interpolação de Hermite tem essa propriedade osculadora que permite uma melhor aproximação da função. A obtenção do polinômio pode ser feita de várias formas.

É possível através do polinômio interpolador de Lagrange e suas derivadas e com o polinômio de Newton. Por praticidade, será utilizado o polinômio interpolador de Newton neste trabalho.

Seja $f \in C^{2n+2}([a, b])$ e $x_0, x_1, \dots, x_n$ pontos distintos em $[a, b]$. Existe apenas um polinômio H_{2n+1} de grau menor ou igual a $2n + 1$ que verifica:

$$\begin{aligned} f(x_i) &= H(x_i) \\ f'(x_i) &= H'(x_i), \quad \text{com } i = 0, 1, \dots, n \end{aligned} \tag{3.12}$$

Considere $2n + 2$ pontos $x_0, x_0, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n$. Pode-se constatar que o polinômio de grau $2n + 1$ é dado por:

$$\begin{aligned} H(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_0](x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2 \\ &\quad + f[x_0, x_0, x_1, x_1](x - x_0)^2(x - x_1) \\ &\quad + \dots + f[x_0, x_0, \dots, x_n, x_n](x - x_0)^2(x - x_1)^2 \dots (x - x_n)^2 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Verifica as condições dadas em (3.11), onde as diferenças divididas precedem os resultados:

$$f[x_i, x_i, \dots, x_i] = \frac{f^{(r)}(x_i)}{r!}, \quad \text{para } r + 1 \text{ pontos} \tag{3.14}$$

Sendo que:

$$\begin{aligned}
f[x_i, x_i] &= \lim_{x \rightarrow x_i} f[x, x_i] \\
f[x_i, x_j] &= \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{f(x) - f(x_i)}{x - x_i} \quad (3.15) \\
f[x_i, x_i] &= f'(x_i)
\end{aligned}$$

Assim, o polinômio interpolador de Hermite de grau $2n - 1$ é dado por:

$$\begin{aligned}
H_{2n-1}(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_0](x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2 \\
&\quad + f[x_0, x_0, x_1, x_1](x - x_0)^2(x - x_1) \\
&\quad + \cdots + f[x_0, x_0, \dots, x_n, x_n](x - x_0)^2(x - x_1)^2 \dots (x - x_n)^2(x - x_n)
\end{aligned}$$

Uma forma prática de construir $H_{(2n-2)}(x)$ é através de uma tabela estendida de diferenças divididas. O procedimento segue os passos:

1. **Duplicar os pontos:** Cada ponto x_i aparece duas vezes na tabela, uma para $f(x_i)$ e outra para $f'(x_i)$.
2. **Construir a tabela de diferenças divididas:**

- As diferenças de primeira ordem são calculadas usando a derivada:

$$f[x_i, x_i] = f'(x_i)$$

- Outras diferenças são calculadas normalmente.

3. **Obter o polinômio por Newton:**

$$H_{2n-1}(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0)^2 + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)^2 + \dots$$

Exemplo 3.2.4. Neste exemplo, interpolamos a função $f(x) = \cos x$ nos pontos $x_0 = 0$ e $x_1 = \frac{\pi}{4}$, levando em consideração também os valores da derivada $f'(x)$.

Os pontos fornecidos são:

- $x_0 = 0$, com $f(0) = \cos(0) = 1$ e $f'(0) = -\sin(0) = 0$.
- $x_1 = \frac{\pi}{4}$, com $f(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $f'(\frac{\pi}{4}) = -\sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Nosso objetivo é encontrar o polinômio interpolador de Hermite $H_3(x)$ que satisfaça:

$$\begin{aligned}
H_3(0) &= f(0), & H_3\left(\frac{\pi}{4}\right) &= f\left(\frac{\pi}{4}\right), \\
H'_3(0) &= f'(0), & H'_3\left(\frac{\pi}{4}\right) &= f'\left(\frac{\pi}{4}\right).
\end{aligned}$$

Construção da Tabela de Diferenças Divididas A interpolação de Hermite usa uma tabela estendida, onde cada x_i é repetido e incluímos as derivadas:

x	$f(x)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0	1	0	$\frac{\sqrt{2}}{2\pi/4}$	$-\frac{2+\sqrt{2}}{\pi^2}$
0	1	0		
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2\pi/4}$	$-\frac{2+\sqrt{2}}{\pi^2}$	
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		

Os coeficientes do polinômio são extraídos da tabela:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= 0, \\ a_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2\pi/4}, \\ a_3 &= -\frac{2+\sqrt{2}}{\pi^2}. \end{aligned}$$

Construção do Polinômio de Hermite A forma do polinômio interpolador de Hermite usando a fórmula de Newton é:

$$H_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^2(x - x_1).$$

Substituindo os coeficientes:

$$H_3(x) = 1 + 0(x - 0) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2\pi/4}\right)(x - 0)^2 + \left(-\frac{2+\sqrt{2}}{\pi^2}\right)(x - 0)^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Este polinômio $H_3(x)$ aproxima a função $\cos x$ com maior precisão do que a interpolação de Lagrange, pois considera também as informações da derivada.

Exemplo 3.2.5. Vamos interpolar a função $f(x) = \ln x$ no intervalo $[1, 2]$, considerando também sua derivada, utilizamos a interpolação de Hermite para garantir um melhor ajuste.

Os pontos fornecidos são:

- $x_0 = 1$, com $f(1) = \ln(1) = 0$ e $f'(1) = \frac{1}{1} = 1$.
- $x_1 = 2$, com $f(2) = \ln(2)$ e $f'(2) = \frac{1}{2}$.

Nosso objetivo é encontrar o polinômio interpolador de Hermite $H_3(x)$ que satisfaça:

$$\begin{aligned} H_3(1) &= f(1), & H_3(2) &= f(2), \\ H'_3(1) &= f'(1), & H'_3(2) &= f'(2). \end{aligned}$$

Construção da Tabela de Diferenças Divididas A interpolação de Hermite usa uma tabela estendida, onde cada x_i é repetido e incluímos as derivadas:

x	$f(x)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
1	0	1	$\ln 2 - 1$	$\frac{3}{2} - 2 \ln 2$
1	0	1		
2	$\ln 2$	$\ln 2$	$\frac{1}{2} - \ln 2$	
2	$\ln 2$	$\frac{1}{2}$		

Os coeficientes do polinômio são extraídos da tabela:

$$a_0 = 0,$$

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = \ln 2 - 1,$$

$$a_3 = \frac{3}{2} - 2 \ln 2.$$

Construção do Polinômio de Hermite A forma do polinômio interpolador de Hermite usando a fórmula de Newton é:

$$H_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^2(x - x_1).$$

Substituindo os coeficientes:

$$H_3(x) = 0 + 1(x - 1) + (\ln 2 - 1)(x - 1)^2 + \left(\frac{3}{2} - 2 \ln 2\right)(x - 1)^2(x - 2).$$

Este polinômio $H_3(x)$ aproxima a função $\ln x$ com maior precisão do que a interpolação de Lagrange, pois considera também as informações da derivada.

3.2.4 A Interpolação de Chebyshev

Definição 3.2.4. A interpolação de Chebyshev é um método de interpolação que utiliza os pontos de Chebyshev como nós de interpolação. Os pontos de Chebyshev são os zeros do polinômio de Chebyshev de primeira espécie $T_n(x)$ no intervalo $[-1, 1]$. A interpolação de Chebyshev é especialmente eficaz na redução do erro de interpolação em comparação com a interpolação de pontos igualmente espaçados, especialmente para funções não suaves.[1]

Os pontos de Chebyshev em $[-1, 1]$ são dados por:

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (3.16)$$

onde $k = 1, 2, \dots, n$.

O polinômio interpolador de Chebyshev $P(x)$ de grau n é dado pela fórmula:

$$P(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \ell_k(x), \quad (3.17)$$

onde $f(x_k)$ é o valor da função nos pontos de Chebyshev x_k .

A interpolação de Chebyshev é especialmente útil quando se deseja minimizar o fenômeno de Runge, que é o aumento do erro de interpolação nos extremos do intervalo quando se utiliza uma interpolação polinomial de pontos igualmente espaçados, como nos métodos de interpolação de Lagrange ou Newton. Isso ocorre especialmente quando a função a ser interpolada possui derivadas elevadas ou é muito oscilante.

Ao usar os pontos de Chebyshev como nós de interpolação, a interpolação de Chebyshev distribui os nós de forma a minimizar o erro máximo de interpolação. Isso resulta em uma melhor aproximação para a função original em comparação com métodos de interpolação tradicionais.

No entanto, é importante notar que a interpolação de Chebyshev pode ser mais complexa de implementar do que métodos de interpolação mais simples, como a interpolação polinomial de Lagrange. Além disso, a escolha do número de pontos de Chebyshev n também é um fator crítico que afeta a precisão da interpolação.

Exemplo 3.2.6. *Vamos Interpolar a função de Runge.*

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, \quad x \in [-1, 1]$$

Usaremos um polinômio interpolador de grau $n = 4$ com nós de Chebyshev. **Passo 1:** *Escolher os nós de Chebyshev*

Os nós de Chebyshev para um polinômio de grau n são dados por:

$$x_k = \cos \left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Para $n = 4$, calculamos:

$$x_0 = \cos \left(\frac{(2(0)+1)\pi}{2(4+1)} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{10} \right) \approx 0.9511$$

$$x_1 = \cos \left(\frac{(2(1)+1)\pi}{2(5)} \right) = \cos \left(\frac{3\pi}{10} \right) \approx 0.5878$$

$$x_2 = \cos \left(\frac{(2(2)+1)\pi}{2(5)} \right) = \cos \left(\frac{5\pi}{10} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0$$

$$x_3 = \cos \left(\frac{(2(3)+1)\pi}{2(5)} \right) = \cos \left(\frac{7\pi}{10} \right) \approx -0.5878$$

$$x_4 = \cos\left(\frac{(2(4) + 1)\pi}{2(5)}\right) = \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) \approx -0.9511$$

Agora, avaliamos a função $f(x)$ nesses pontos:

$$f(x_0) = f(0.9511) = \frac{1}{1 + 25(0.9511)^2} \approx 0.042$$

$$f(x_1) = f(0.5878) = \frac{1}{1 + 25(0.5878)^2} \approx 0.103$$

$$f(x_2) = f(0) = \frac{1}{1 + 25(0)^2} = 1$$

$$f(x_3) = f(-0.5878) = f(0.5878) \approx 0.103$$

$$f(x_4) = f(-0.9511) = f(0.9511) \approx 0.042$$

Passo 2: Construção do Polinômio Interpolador de Lagrange O polinômio de Lagrange é:

$$P_4(x) = \sum_{k=0}^4 f(x_k) \ell_k(x),$$

onde os polinômios básicos de Lagrange são dados por:

$$\ell_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^4 \frac{x - x_j}{x_k - x_j}.$$

Cálculo dos Polinômios $\ell_k(x)$ Os polinômios $\ell_k(x)$ são calculados individualmente. Para $k = 0$, por exemplo:

$$\ell_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)(x_0 - x_4)}$$

Ao expandirmos para os outros índices k , obtemos:

$$\ell_0(x) = 0.289(x^4 - 0.951x^3 - 0.809x^2 + 0.951x + 0.289)$$

$$\ell_1(x) = -0.519(x^4 - 0.588x^3 - 1.107x^2 + 0.588x + 0.519)$$

$$\ell_2(x) = 0.815(x^4 - 1.02x^2 + 0.815)$$

$$\ell_3(x) = -0.519(x^4 + 0.588x^3 - 1.107x^2 - 0.588x + 0.519)$$

$$\ell_4(x) = 0.289(x^4 + 0.951x^3 - 0.809x^2 - 0.951x + 0.289)$$

Montagem do Polinômio

Agora, multiplicamos pelos valores de $f(x_k)$:

$$P_4(x) = (0.042)\ell_0(x) + (0.103)\ell_1(x) + (1.0)\ell_2(x) + (0.103)\ell_3(x) + (0.042)\ell_4(x).$$

Expandindo os coeficientes, obtemos:

$$P_4(x) \approx 1 - 6.82x^2 + 6.56x^4.$$

Exemplo 3.2.7. Vamos considerar um exemplo de interpolação de Chebyshev para ilustrar como funciona esse método.

Suponha que queremos interpolar a função $f(x) = \sin(x)$ usando interpolação de Chebyshev. Para isso, escolheremos um número específico de pontos de Chebyshev como nós de interpolação.

Passo 1: Escolha dos Nós de Chebyshev Os nós de Chebyshev para um polinômio de grau n são dados por:

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (3.18)$$

Para $n = 4$, temos cinco nós:

$$x_0 = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \approx 0.9511,$$

$$x_1 = \cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) \approx 0.5878,$$

$$x_2 = \cos\left(\frac{5\pi}{10}\right) = 0,$$

$$x_3 = \cos\left(\frac{7\pi}{10}\right) \approx -0.5878,$$

$$x_4 = \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) \approx -0.9511.$$

Avaliamos $f(x) = \sin(x)$ nesses pontos:

k	x_k	$f(x_k) = \sin(x_k)$
0	0.9511	0.8146
1	0.5878	0.5556
2	0	0
3	-0.5878	-0.5556
4	-0.9511	-0.8146

Passo 2: Construção do Polinômio de Lagrange O polinômio interpolador de Lagrange é definido como:

$$P_4(x) = \sum_{k=0}^4 f(x_k) \ell_k(x), \quad (3.19)$$

onde os polinômios básicos de Lagrange são dados por:

$$\ell_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^4 \frac{x - x_j}{x_k - x_j}. \quad (3.20)$$

Após os cálculos detalhados, encontramos:

$$\begin{aligned} \ell_0(x) &= 0.289(x^4 - 0.9511x^3 - 0.809x^2 + 0.9511x + 0.289), \\ \ell_1(x) &= -0.519(x^4 - 0.5878x^3 - 1.107x^2 + 0.5878x + 0.519), \\ \ell_2(x) &= 0.815(x^4 - x^2), \\ \ell_3(x) &= -0.519(x^4 + 0.5878x^3 - 1.107x^2 - 0.5878x + 0.519), \\ \ell_4(x) &= 0.289(x^4 + 0.9511x^3 - 0.809x^2 - 0.9511x + 0.289). \end{aligned}$$

O polinômio interpolador é:

$$P_4(x) = (0.8146)\ell_0(x) + (0.5556)\ell_1(x) + (0)\ell_2(x) + (-0.5556)\ell_3(x) + (-0.8146)\ell_4(x). \quad (3.21)$$

Expandindo, obtemos:

$$P_4(x) \approx x - \frac{x^3}{6}. \quad (3.22)$$

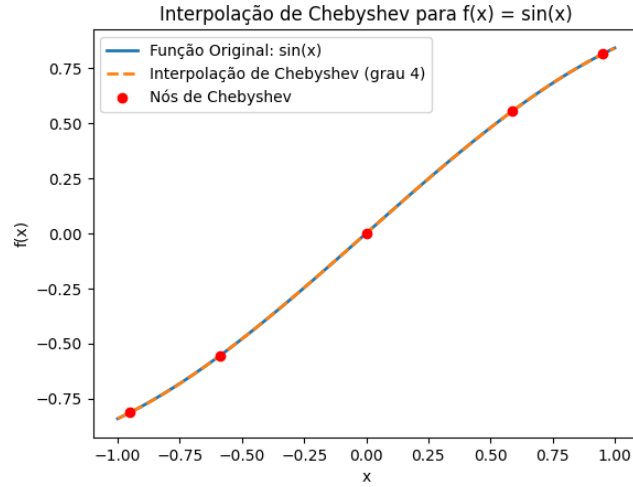


Figura 3.6: Interpolação de Chebyshev

3.3 Método dos Mínimos Quadrados Regressão linear

O Método dos Mínimos Quadrados é uma técnica amplamente utilizada para ajuste de curvas a um conjunto de pontos experimentais. O objetivo é encontrar a função que melhor representa os dados minimizando a soma dos quadrados dos erros.

3.3.1 Formulação Matemática

Dado um conjunto de pontos (x_i, y_i) para $i = 1, 2, \dots, n$, buscamos uma função $f(x)$ tal que a soma dos erros quadráticos seja minimizada:

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2. \quad (3.23)$$

Se assumirmos um modelo linear da forma:

$$y = ax + b, \quad (3.24)$$

então os coeficientes a e b são encontrados através das fórmulas abaixo:

$$a = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \quad (3.25)$$

$$b = \frac{\sum y_i - a \sum x_i}{n}. \quad (3.26)$$

Exemplo 3.3.1. *Considere os seguintes pontos experimentais:*

x	y
1	2.2
2	2.8
3	3.6
4	4.5
5	5.1

Calculamos:

$$\sum x_i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15, \quad (3.27)$$

$$\sum y_i = 2.2 + 2.8 + 3.6 + 4.5 + 5.1 = 18.2, \quad (3.28)$$

$$\sum x_i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55, \quad (3.29)$$

$$\sum x_i y_i = (1 \cdot 2.2) + (2 \cdot 2.8) + (3 \cdot 3.6) + (4 \cdot 4.5) + (5 \cdot 5.1) = 62.2. \quad (3.30)$$

Substituindo nos coeficientes:

$$a = \frac{5(62.2) - (15)(18.2)}{5(55) - (15)^2} = 0.76, \quad (3.31)$$

$$b = \frac{18.2 - 0.76(15)}{5} = 1.28. \quad (3.32)$$

Assim, a equação da reta ajustada é:

$$y = 0.76x + 1.28. \quad (3.33)$$

Podemos observar na ilustração gráfica abaixo.

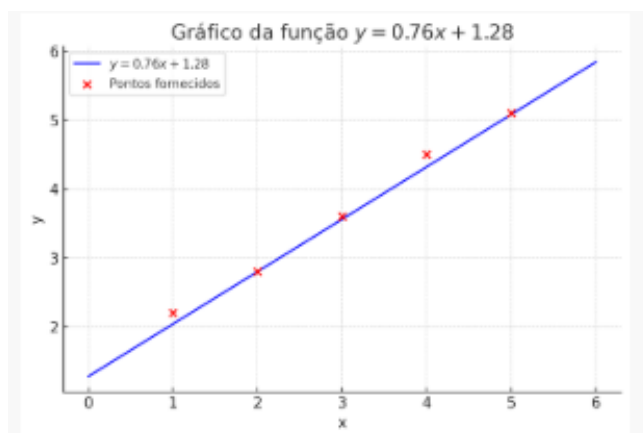


Figura 3.7: Representação Gráfica

Capítulo 4

Polinómio de Taylor e Séries de Taylor

No capítulo anterior, exploramos diversos métodos de interpolação polinomial, os quais consistem em determinar um polinómio que interpola um conjunto finito de pontos dados, ou seja, que assume os mesmos valores da função nesses pontos. A partir dessas técnicas, foi possível compreender como estimar funções por meio de polinómios que passam exactamente pelos dados fornecidos.

Neste capítulo, aprofundaremos o estudo da aproximação de funções a partir do **Polinómio de Taylor**, construído desde a primeira até a n -ésima ordem. Nosso objectivo é entender como essa ferramenta permite minimizar o erro de aproximação de uma função $f(x)$ em torno de um ponto fixo x_0 , utilizando as derivadas sucessivas da função nesse ponto.

Adicionalmente, expandiremos esse conceito para as **Séries de Taylor** e, como caso particular, para as **Séries de Maclaurin**, discutindo diversas aplicações no contexto da análise matemática e resolução de problemas em física, engenharia.

4.1 Polinómio de Taylor de Ordem 1

Consideramos uma função $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável no ponto x_0 , onde I é um intervalo aberto e $x_0 \in I$. Tomemos a recta t , representada na Figura 4.1, tangente ao gráfico da função nesse ponto $(x_0, f(x_0))$. Para valores de x próximos de x_0 , temos que a função $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que representa a equação da recta t , é uma boa aproximação de $f(x)$.

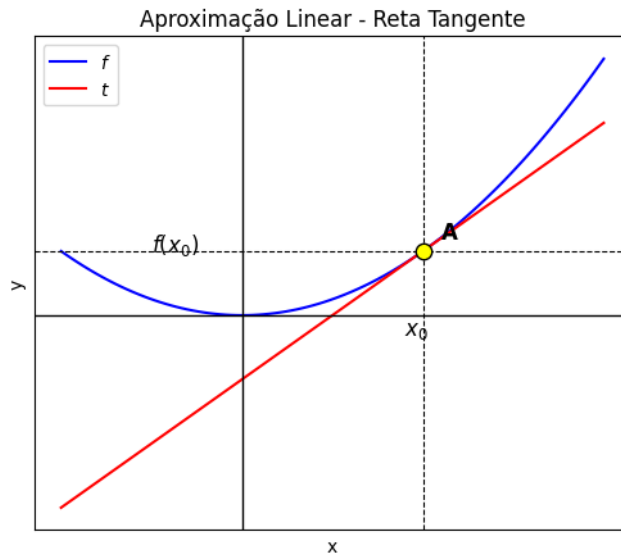


Figura 4.1: Gráfico representativo da Aproximação Linear

Como t é uma reta que passa pelo ponto $A = (x_0, f(x_0))$, temos que sua equação é dada por:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \tag{4.1}$$

onde m é o coeficiente angular da recta t , ou ainda, a derivada de f no ponto x_0 . Assim, a equação da reta tangente pode ser escrita como:

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (4.2)$$

Quando $x = x_0$, temos:

$$T(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x_0) = f(x_0). \quad (4.3)$$

Agora, seja $x \in I$ um ponto na vizinhança de x_0 de maneira que $T(x) \neq f(x)$. A esta diferença de valores denotamos por $E_1(x)$, ou seja, o erro que cometemos ao aproximarmos valores de $f(x)$ por $T(x)$, ou ainda, $E(x) = f(x) - T(x)$. Podemos visualizar graficamente na figura 4.2.

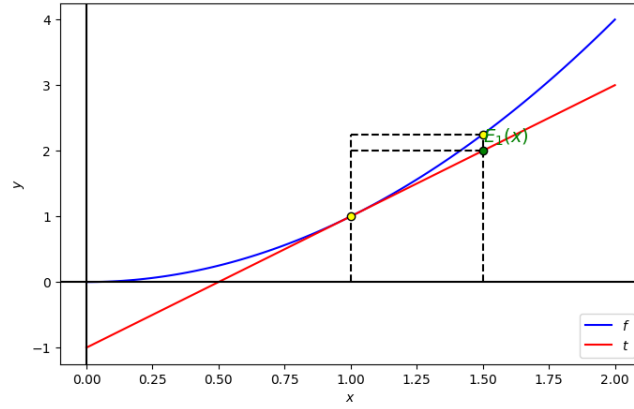


Figura 4.2: Gráfico representando o erro obtido pela Aproximação Linear

Observamos que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} E(x) = 0 \quad (4.4)$$

De facto,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} E_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - T(x)) = f(x_0) - T(x_0) = 0, \quad (4.5)$$

pois, $f(x_0) = T(x_0)$.

Como $T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ e $E(x) = f(x) - T(x)$, temos

$$E_1(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0). \quad (4.6)$$

Para $x \neq x_0$,

$$\frac{E_1(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0). \quad (4.7)$$

Além disso,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_1(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] = f'(x_0) - f'(x_0) = 0. \quad (4.8)$$

Portanto, como $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_1(x)}{x - x_0} = 0$, segue que $E(x)$ tende a zero mais rapidamente que $(x - x_0)$. Além disso, a reta tangente é a única reta que possui essa propriedade.

De facto, seja $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função que representa a equação da reta s , Figura 4.3, de coeficiente angular m_s e que passa por $(x_0, f(x_0))$, isto é,

$$S(x) = f(x_0) + m_s(x - x_0). \quad (4.9)$$

Utilizando o mesmo argumento anterior, temos

$$E_s(x) = f(x) - S(x), \quad (4.10)$$

onde $E_s(x)$ é o erro que cometemos ao aproximarmos valores de $f(x)$ por $S(x)$, assim

$$E_s(x) = f(x) - f(x_0) - m_s (x - x_0). \quad (4.11)$$

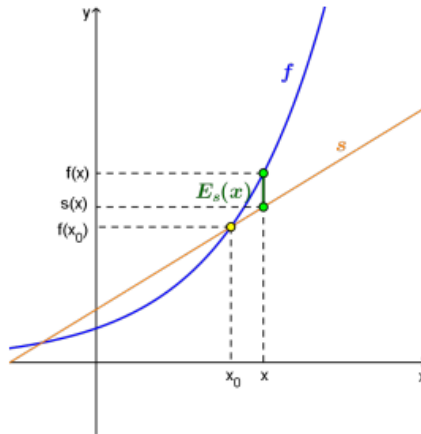


Figura 4.3: Gráfico representando o erro obtido pela recta Secante

Então,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_s(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m_s \right] = f'(x_0) - m_s. \quad (4.12)$$

Notamos que esse limite só será zero se $f'(x_0) = m_s$, ou seja, m_s deve ser a derivada da função no ponto x_0 , ou ainda, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico no ponto x_0 . Assim,

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (4.13)$$

é o único polinômio de ordem 1 que localmente melhor aproxima valores da função f em volta de x_0 .

Portanto, se uma função f for derivável até a primeira ordem num ponto x_0 pertencente ao intervalo aberto I , definimos

$$P_1(x) = T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (4.14)$$

como o Polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta de x_0 .

Exemplo 4.1.1. Vamos utilizar o polinômio de Taylor de ordem 1 para estimar o valor de $\sqrt{9,03}$.

Neste caso, nossa função é $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \sqrt{x} \quad (4.15)$$

Como desejamos obter a aproximação de $\sqrt{9,03}$, devemos construir o polinômio de Taylor de ordem 1 da função $f(x) = \sqrt{x}$ ao redor de $x_0 = 9$.

Como

$$f(x_0) = f(9) = 3$$

e

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

temos

$$f'(x_0) = f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}.$$

Assim, o polinômio de Taylor de ordem 1 de $f(x) = \sqrt{x}$ em torno de $x_0 = 9$ é

$$P_1(x) = 3 + \frac{1}{6}(x - 9) = 3 + \frac{x}{6} - \frac{9}{6} = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}. \quad (4.16)$$

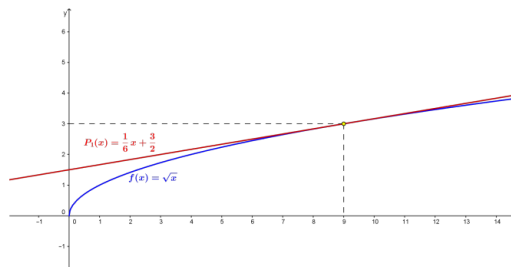


Figura 4.4: Gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ e do seu Polinômio de Taylor de Ordem 1

Com auxílio de uma calculadora e com uma aproximação de 4 casas decimais, obtemos $f(9.3) = 3.4995$. Utilizando o polinômio de Taylor, temos:

$$P_1(9.3) = \frac{1}{6} \times 9.03 + \frac{3}{2} = 1.505 + 1.5 = 3.005.$$

Percebemos que o valor de $P_1(9.3)$ aproxima-se do valor de $f(9.3)$, mas precisamos determinar a precisão desse resultado.

Sabemos que

$$|E_1(x)| = |f(x) - P_1(x)| \quad (4.17)$$

onde $E_1(x)$ é o erro cometido ao substituir $f(x)$ por $P_1(x)$. Analisando essa diferença com 6 casas decimais, temos:

$$|E_1(9.3)| = |f(9.3) - P_1(9.3)| = |3.004995 - 3.005| = |-0.000005| < 10^{-5}.$$

Nesse exemplo, observamos que, analisando o valor de $\sqrt{9.3}$ com 6 casas decimais, estamos cometendo um erro menor que $5 \cdot 10^{-5}$.

4.2 Polinômio de Taylor de Ordem 2

Considerando uma função f derivável até a segunda ordem em um intervalo aberto I com $x, x_0 \in I$, podemos obter uma melhor aproximação de $f(x)$ para cada valor de x próximo a x_0 .

Nesse caso, vamos determinar um polinômio $P_2(x)$ de ordem 2, que deve satisfazer as seguintes condições:

- a) $f(x_0) = P_2(x_0)$
- b) $f'(x_0) = P_2'(x_0)$
- c) $f''(x_0) = P_2''(x_0)$

Consideramos um polinômio do segundo grau da forma:

$$P_2(x) = A + B(x - x_0) + C(x - x_0)^2 \quad (4.18)$$

com A, B e C sendo coeficientes reais. Temos que $P_2(x_0) = A$ e, portanto,

$$f(x_0) = P_2(x_0) = A. \quad (4.19)$$

Além disso,

$$P_2'(x) = B + 2C(x - x_0) \quad (4.20)$$

e

$$P_2''(x) = 2C, \quad \text{assim} \quad f'(x_0) = P_2'(x_0) = B + 2C(x_0 - x_0) = B, \quad f''(x_0) = P_2''(x_0) = 2C \Rightarrow C = \frac{f''(x_0)}{2}.$$

Portanto, o polinômio de Taylor de ordem 2 de f em volta de x_0 é dado por

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2. \quad (4.21)$$

Essa expressão nos fornece um valor aproximado de $f(x)$ com a propriedade que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_2(x)}{(x - x_0)^2} = 0,$$

onde $E_2(x)$ é o erro que cometemos ao estimar o valor de $f(x)$ por $P_2(x)$, Assim se $E_2(x) = f(x) - P(x)$, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_2(x)}{(x - x_0)^2} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} - \frac{f''(x_0)}{2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x_0)}{2}. \end{aligned}$$

Observamos que o cálculo de

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2}$$

resulta em uma forma indeterminada $\frac{0}{0}$, então utilizamos a regra de L'Hôpital. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x - x_0)} = \frac{f''(x_0)}{2},$$

o que leva a uma forma indeterminada.

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_2(x)}{(x - x_0)^2} = \frac{f''(x_0)}{2} - \frac{f''(x_0)}{2} = 0.$$

O Polinômio de Taylor de ordem 2 é o único que possui a propriedade do erro $E_2(x)$ tender a zero mais rapidamente que $(x - x_0)^2$. De fato, suponhamos que exista

$$P_2^*(x) = A + B(x - x_0) + C(x - x_0)^2 \tag{4.22}$$

com $A, B, C \in \mathbb{R}$, possuindo a propriedade

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_2^*(x)}{(x - x_0)^2} = 0.$$

onde $E_2^*(x)$ é o erro que cometemos ao aproximar a função $f(x)$ por $P_2^*(x)$. Como

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_2(x)}{(x - x_0)^2} = 0.$$

Assim, como

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_2^*(x)}{(x - x_0)^2} = 0,$$

segue que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_2(x) - E_2^*(x)}{(x - x_0)^2} = 0.$$

Além disso, temos que

$$E_2(x) = f(x) - P_2(x) \quad \text{e} \quad E_2^*(x) = f(x) - P_2^*(x).$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P_2^*(x) - P_2(x)}{(x - x_0)^2} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{A - f(x_0) + (x - x_0)[B - f'(x_0)] + (x - x_0)^2[C - \frac{f''(x_0)}{2}]}{(x - x_0)^2}.$$

Tomando o limite,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{A - f(x_0)}{(x - x_0)^2} + \frac{B - f'(x_0)}{x - x_0} + C - \frac{f''(x_0)}{2} \right] = 0.$$

Logo, esse limite só será zero se

$$A = f(x_0) \quad \text{e} \quad B = f'(x_0).$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[C - \frac{f''(x_0)}{2} \right] = 0.$$

e

$$C = \frac{f''(x_0)}{2}.$$

Portanto, o polinômio de Taylor de ordem 2 é o único que possui a propriedade

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_2(x)}{(x - x_0)^2} = 0$$

Exemplo 4.2.1. *Vamos determinar o polinômio de Taylor de ordem 2 em torno de $x_0 = 1$ da função $f(x) = \ln(x)$.*

Notamos inicialmente que, assim,

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = 1 \quad \text{e} \quad f''(1) = -1.$$

Logo, temos as derivadas:

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

O polinômio de Taylor de ordem 2 é dado por

$$P_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2.$$

Substituindo os valores das derivadas em $x = 1$, obtemos

$$P_2(x) = 0 + 1(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2.$$

4.3 Polinômio de Taylor de Ordem n

É possível generalizar o procedimento seguido nas seções anteriores para obter um polinômio de ordem n , com $n \in \mathbb{Z}_+$, que aproxime os valores de f em pontos x numa vizinhança de x_0 .

Seja uma função f , n vezes derivável num intervalo aberto I e $x_0 \in I$. Queremos determinar o Polinômio P_n de ordem n , que aproxime os valores da função f , ao tomarmos valores de x próximos a x_0 . De forma análoga aos casos anteriores, devemos ter:

$$f(x_0) = P_n(x_0), \quad f'(x_0) = P'_n(x_0), \quad f''(x_0) = P''_n(x_0), \quad \dots, \quad f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0).$$

Portanto, o polinômio deve ser da forma

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + a_4(x-x_0)^4 + \dots + a_n(x-x_0)^n. \quad (4.23)$$

Procedendo como nos casos anteriores, obtemos $f(x_0) = a_0$ e calculando as derivadas de P_n temos $f'(x_0) = a_1$, $\frac{f''(x_0)}{2!} = a_2$ e assim sucessivamente. Percebemos que ao derivarmos P_n n vezes obtemos

$$P_n^{(n)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \dots 2 \cdot 1 \cdot a_n. \quad (4.24)$$

Como $f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0)$, então

$$f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \dots 2 \cdot 1 \cdot a_n = n!a_n. \quad (4.25)$$

Logo

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. \quad (4.26)$$

Portanto, o Polinômio de Taylor de ordem n em torno de x_0 é dado por

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \quad (4.27)$$

Como nos casos anteriores, o erro que se obtém ao aproximarmos a função $f(x)$ pelo valor de $P_n(x)$ é $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$ com $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$.

Teorema 4.2 Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ onde f é uma função n vezes derivável em $x = x_0$. Então, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$, ou seja, $f(x) = P_n(x)$.
Seja

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!}.$$

Como

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

Devemos mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - g(x)}{(x-x_0)^n} - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \right] = 0 \quad (4.28)$$

Como o segundo termo do Limite 4.28 não depende de x , basta mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. \quad (4.29)$$

Como f é n -vezes diferenciável em x_0 e como g é um polinômio, para calcular o Limite 4.29 podemos aplicar a regra de L'Hôpital $(n-1)$ vezes à primeira parte da equação.

Obtemos,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - g^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Teorema 4.3 Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ onde f é uma função n -vezes derivável. Suponhamos que $P^*(x)$ é um polinômio de ordem n em $(x-x_0)$ satisfazendo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P^*(x)}{(x-x_0)^n} = 0. \quad (4.30)$$

Então, $P^*(x)$ é o polinômio de Taylor de ordem n de f em torno do ponto x_0 .

Demonstração. Seja

$$P^*(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \cdots + a_n(x - x_0)^n \quad (4.31)$$

com $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_n^*(x)}{(x - x_0)^n} = 0, \quad (4.32)$$

onde $E_n^*(x)$ é o erro cometido ao estimar valores de $f(x)$ por $P^*(x)$.

Como $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$, onde $E_n(x)$ é o erro cometido ao estimar valores de $f(x)$ por $P_n(x)$, temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_n(x) - E_n^*(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[f(x) - P_n(x)] - [f(x) - P^*(x)]}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P^*(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{a_0 - f(x_0)}{(x - x_0)^n} + \frac{a_1 - f'(x_0)}{(x - x_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1} - \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}}{(x - x_0)} + a_n - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \right] = 0. \quad (4.33)$$

Logo, esse limite só será zero se $a_0 = f(x_0)$, $a_1 = f'(x_0)$, $a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$, ..., $a_{n-1} = \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}$. Concluimos então que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[a_n - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \right] = 0, \quad (4.34)$$

isto é, $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Portanto $P_n(x)$ é o único que possui a propriedade

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0. \quad (4.35)$$

Teorema 4.4 Seja f uma função derivável até a ordem $(n + 1)$ no intervalo aberto I com $x_0 \in I$. Então, existe pelo menos um $\bar{x}$ no intervalo aberto de extremos x_0 e x tal que:

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x), \quad (4.36)$$

onde

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!} (x - x_0)^{(n+1)} \quad (4.37)$$

é o erro que obtemos ao substituir $f(x)$ por $P_n(x)$.

Demonstração.

Temos que $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$, logo

$$E_n(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Derivando $E_n(x)$ $(n + 1)$ vezes, temos

$$E'_n(x) = f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x - x_0) - \frac{f'''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n - 1)!}(x - x_0)^{n-1}$$

$$E''_n(x) = f''(x) - f''(x_0) - f'''(x_0)(x - x_0) - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n - 2)!}(x - x_0)^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$E_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)$$

$$E_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$$

Para $x = x_0$, temos $E_n(x_0) = E'_n(x_0) = E''_n(x_0) = E'''_n(x_0) = \dots = E_n^{(n)}(x_0) = 0$.

Seja a função $h(x) = (x - x_0)^{n+1}$, assim

$$h'(x) = (n + 1)(x - x_0)^n$$

$$h''(x) = (n + 1) \cdot n(x - x_0)^{n-1}$$

$$\vdots$$

$$h^{(n)}(x) = (n + 1) \cdot n \cdots 2(x - x_0)$$

$$h^{(n+1)}(x) = (n + 1) \cdot n \cdots 1 = (n + 1)!$$

Para $x = x_0$, temos $h(x_0) = h'(x_0) = h''(x_0) = h'''(x_0) = \dots h^{(n)}(x_0) = 0$. Observamos que:

$$\frac{E_n(x)}{h(x)} = \frac{E_n(x) - E_n(x_0)}{h(x) - h(x_0)}.$$

Então, pelo Teorema do Valor Médio de Cauchy, existe a_1 que pertence ao intervalo $]x_0, x[$

tal que:

$$\frac{E_n(x)}{h(x)} = \frac{E'_n(a_1)}{h'(a_1)}.$$

Como

$$\frac{E_n(x)}{h(x)} = \frac{E'_n(a_1) - E'_n(x_0)}{h'(a_1) - h'(x_0)},$$

pelo Teorema do Valor Médio de Cauchy **Teorema 2.2**, existe a_2 que pertence ao intervalo $]x_0, a_1[$ tal que

$$\frac{E_n(x)}{h(x)} = \frac{E''_n(a_2)}{h''(a_2)}.$$

Repetindo esse argumento n vezes obtemos a_n no intervalo $]x_0, a_{n-1}[$ tal que

$$\frac{E_n(x)}{h(x)} = \frac{E_n^{(n)}(a_n)}{h^{(n)}(a_n)}.$$

Assim,

$$\frac{E_n(x)}{h(x)} = \frac{E_n^{(n)}(a_n) - E_n^{(n)}(x_0)}{h^{(n)}(a_n) - h^{(n)}(x_0)}.$$

Novamente, pelo Teorema do Valor Médio de Cauchy **Teorema 2.2** existe $\bar{x}$ que pertence ao intervalo $]x_0, a_n[$ tal que

$$\frac{E_n(x)}{h(x)} = \frac{E_n^{(n+1)}(\bar{x})}{h^{(n+1)}(\bar{x})}.$$

Portanto,

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!} (x - x_0)^{(n+1)}.$$

A expressão $E_n(x)$ no teorema anterior é conhecida como Resto de Lagrange em homenagem ao matemático francês Joseph L. Lagrange.

Exemplo 4.1. Vamos obter o Polinômio de Taylor de ordem n da função $f(x) = e^x$ em torno de $x_0 = 0$, visualizar graficamente algumas aproximações e obter o valor de e com erro inferior a 10^{-8} . Inicialmente observamos que $f^{(n)}(x) = e^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}_+$, e $f^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$. Assim, substituindo na fórmula de Taylor

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

obtemos

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Graficamente podemos verificar na Figura 4.5 alguns polinômios aproximadores da função $f(x) = e^x$.

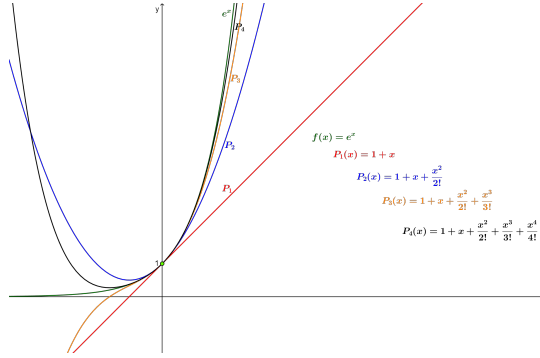


Figura 4.5: Gráfico de $f(x)$ e seus Polinômios aproximados até ordem 4

Pelo Teorema 4.3 obtemos a expressão do erro que cometemos ao aproximar os valores de $f(x)$ pelos valores de $P_n(x)$. Temos que,

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!} (x - x_0)^{(n+1)}$$

para algum $\bar{x}$ no intervalo aberto $]x_0, x[$. Portanto desenvolvendo a expressão do erro relativo à aproximação da função $f(x) = e^x$ por $P_n(x)$ desenvolvido na origem, temos:

$$E_n(x) = \frac{e^{\bar{x}}}{(n+1)!} x^{(n+1)}$$

Como $f(1) = e$, podemos obter aproximações para o número de Euler por meio do Polinômio de Taylor de ordem n em torno de $x_0 = 0$. Sendo $e = 2,718281828459\dots$, temos para $x = 1$ que:

$$P_n(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \approx e.$$

Esta expressão se aproxima de e com a seguinte precisão

$$E_n(1) = \frac{e^{\bar{x}}}{(n+1)!}$$

para algum $0 < \bar{x} < 1$ e assim,

$$1 = e^0 < e^{\bar{x}} < e^1 < 3.$$

Portanto,

$$|E_n(1)| = \left| \frac{e^{(x)}}{(n+1)!} \right| = \frac{e^{(x)}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

Como desejamos obter uma aproximação com um erro inferior a 10^{-8} temos:

$$|E_n(1)| < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-8} = \frac{1}{100000000}$$

Logo $(n+1)! > 300.000.000$ Pode se obser que para:

$$n = 11$$

Trmos um erro menor que 10^{-8} vale:

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} + \frac{1}{11!} = 2,718281826$$

Exemplo 4.2. Para datar rochas ou artefatos com mais de 50.000 anos, é preciso usar outros elementos radioativos. A seguinte equação é válida para qualquer isótopo radioativo:

$$\frac{S(t) - S(0)}{R(t)} + 1 = e^{(\ln 2)t/\lambda}$$

onde $R(t)$ é o número de átomos do isótopo radioativo no instante t . $S(t)$ é o número de átomos do produto estável que resulta do decaimento radioativo, $S(0)$ é o número de átomos do produto estável inicialmente presentes na amostra (no instante $t = 0$) e λ é a meia-vida do isótopo radioativo (o tempo que metade dos átomos da amostra leva para decair).

- Determine o valor aproximado de t nesta equação usando o Polinômio de Taylor de grau 2 de e^x no entorno de $x = 0$.
- Um pedaço de mica é analisado e os cientistas descobrem que 5% dos átomos do mineral são do isótopo radioativo rubídio 57 e 0,04% são de estrôncio 87. Se todo estrôncio 87 foi produzido pelo decaimento do rubídio 57 presente na amostra, qual é a idade da amostra? Use a aproximação do item (a). A meia-vida do rubídio 87 é $48,6 \times 10^9$ anos.

Do Exemplo 4.1, sabemos que o polinômio de Taylor de ordem 2 de $f(x) = e^x$ em torno de $x_0 = 0$ será dado por

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}.$$

Logo, estimando o valor de $e^{(\ln 2)t/\lambda}$ por $P_2(x)$, temos

$$e^{(\ln 2)t/\lambda} \approx 1 + \frac{(\ln 2)t}{\lambda} + \frac{\left(\frac{(\ln 2)t}{\lambda}\right)^2}{2!}$$

$$\frac{S(t) - S(0)}{R(t)} \approx \frac{(\ln 2)t}{\lambda} + \frac{(\ln 2)^2 t^2}{2\lambda^2}$$

$$\frac{(\ln 2)^2}{2\lambda^2} t^2 + \frac{\ln 2}{\lambda} t - \frac{S(t) - S(0)}{R(t)} \approx 0.$$

Resolvendo a equação de segundo grau na variável t , temos

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\ln^2 2}{\lambda^2} - 4 \cdot \frac{\ln^2 2}{2\lambda^2} \cdot \left(-\frac{S(t) - S(0)}{R(t)} \right) = \frac{\ln^2 2}{\lambda^2} + \frac{2\ln^2 2}{\lambda^2} \left(\frac{S(t) - S(0)}{R(t)} \right) \\ &= \frac{\ln^2 2}{\lambda^2} \left(1 + 2 \left(\frac{S(t) - S(0)}{R(t)} \right) \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$t \approx \frac{-\frac{\ln 2}{\lambda} \pm \sqrt{\frac{\ln^2 2}{\lambda^2} \left(1 + 2 \left(\frac{S(t) - S(0)}{R(t)} \right) \right)}}{\frac{\ln^2 2}{\lambda^2}} = \frac{-\lambda \ln 2 \pm \lambda \ln 2 \sqrt{1 + 2 \left(\frac{S(t) - S(0)}{R(t)} \right)}}{\ln^2 2}.$$

Como $t > 0$,

$$t \approx \frac{\lambda \ln 2 \left(-1 + \sqrt{1 + 2 \left(\frac{S(t) - S(0)}{R(t)} \right)} \right)}{\ln^2 2}.$$

b. Denotamos por M a quantidade de átomos da mica analisada, temos que $\frac{5}{100}M$ são do isótopo radioativo, ou seja $R(t)$, e $\frac{0,04}{100}M$ são de estrôncio 87, ou seja, $S(t)$. Como todo estrôncio foi produzido do decaimento do rubídio, não existiam átomos de estrôncio inicialmente na amostra, ou seja, $S(0) = 0$. Como $\lambda = 48,6 \times 10^9$ e utilizando $\ln 2 \approx 0,693$, temos então que

$$t \approx \frac{\lambda}{\ln 2} \left(\sqrt{1 + 2 \left(\frac{S(t) - S(0)}{R(t)} \right)} - 1 \right) = \frac{48,6 \times 10^9}{0,693} \left(\sqrt{1 + 2 \left(\frac{\left(\frac{0,04}{100} M - 0 \right)}{\frac{5}{100} M} \right)} - 1 \right)$$

$$t \approx 70,12 \times 10^9 \left(\sqrt{1,016} - 1 \right) = 5,587 \times 10^8$$

4.4 Série de Taylor e de Maclaurin

Seja $f(x)$ uma função que possui derivadas até à ordem $n - 1$ inclusive na vizinhança do ponto $x = a$ (isto é, no intervalo que contém o ponto $x = a$) admitia nesta vizinhança o seguinte desenvolvimento de Taylor:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_n(x) \quad (4.38)$$

onde o resto $E_n(x)$ é dado por:

$$E_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)), \quad 0 < \theta < 1$$

Se a função $f(x)$ é indefinidamente derivável na vizinhança do ponto $x = a$, poder-se-á tomar n arbitrariamente grande na fórmula de Taylor. Suponhamos que o resto $R_n(x)$ tende para zero no domínio considerado quando $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(x) = 0 \quad (4.39)$$

Sendo assim, fazendo $n \rightarrow \infty$ na fórmula (1), obtém-se à direita uma série com uma infinidade de termos, dita série de Taylor:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \cdots \quad (4.40)$$

Esta última igualdade apenas está correta se $R_n(x) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Então, a série do segundo membro converge, e a sua soma é igual à função $f(x)$. Mostremos que assim é:

Seja

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \quad \text{com} \quad P_n(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) \quad (4.41)$$

Como, por hipótese, $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(x) = 0$, tem-se

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) \quad (4.42)$$

Ora, $P_n(x)$ é uma soma parcial da série (2); o seu limite é igual à soma da série do segundo membro da igualdade (2). A igualdade (2) é, pois, legítima:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \cdots \quad (4.43)$$

Resulta, do que antecede, que a série de Taylor representa a função dada $f(x)$ se, e só se, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) \neq 0$, a série não representa a função dada, embora possa convergir (para uma outra função).

Se, na série de Taylor, se fizer $a = 0$, obtém-se um caso particular desta série, chamada série de Maclaurin:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \cdots \quad (4.44)$$

Teorema 4.4 Se $f(x) = P_n(x) + E_n(x)$, onde P_n é o polinômio de Taylor de n -ésimo grau de f em a e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(x) = 0$$

para $|x - a| < R$, então f é igual à soma de sua série de Taylor no intervalo $|x - a| < R$.

Demonstração

Sabemos que $P_n(x) = f(x) - E_n(x)$. Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - E_n(x)] = f(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} E_n(x) = f(x) - 0 = f(x)$$

4.5 Convergência e Intervalo de Convergência

A convergência de uma série de Taylor depende das propriedades da função em torno do ponto de expansão. O intervalo de convergência é o conjunto de valores de x para os quais a série de Taylor converge para a função original. Esse intervalo pode ser finito ou infinito e pode incluir ou excluir o ponto de expansão [8].

Vamos demonstrar que o erro de algumas Séries notáveis tende para zero no intervalo considerado.

Exemplo 4.5.1. *Vamos verificar a convergência do exercício abaixo utilizando o critério da razão:*

$$\arctg(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{2(n+1)+1}}{2(n+1)+1} \cdot \frac{2n+1}{(-1)^n \cdot x^{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1) \cdot \frac{x^{2n+3}}{x^{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+3}$$

e, assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| (-x^2) \frac{2n+1}{2n+3} \right| = |-x^2 \cdot 1| = |-x^2| = x^2$$

Dessa forma, a série será convergente se $x^2 < 1$, isto é, $-1 < x < 1$. Verificamos adicionalmente que a convergência acontece também nas extremidades do intervalo.

Portanto, concluímos que para $-1 \leq x \leq 1$ temos

$$\operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Exemplo 4.5.2. Consideremos a Série de Taylor para e^x em torno de $x = 0$. A série de Taylor para e^x é dada por:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

O polinômio de Taylor de grau n é:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

O erro de truncamento (termo de Lagrange) é:

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

onde $f^{(n+1)}(x) = e^x$. Como e^x é sempre positivo e crescente, escolhemos c tal que $|e^c| \leq e^x$, então:

$$|E_n(x)| \leq \frac{e^x |x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Para $|x| < R = \infty$, e considerando o resultado do **Lema 2.1**, temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(x) = 0$$

logo, a série converge absolutamente para todos os x .

Exemplo 4.5.3. Analisemos a Série de Taylor para $\sin x$ em torno de $x = 0$. A série de Taylor para $\sin x$ é:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

O polinômio de Taylor de grau $2n+1$ é:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

O erro de truncamento (termo de Lagrange) é:

$$R_n(x) = \frac{f^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

Como $f^{(2n+2)}(x) = \cos x$ e $|\cos c| \leq 1$, temos:

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Para $|x| < R = \infty$, considerando o resultado do **Lema 2.1**, temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

Assim, a série converge para $\sin x$ para todos os x .

Capítulo 5

Aplicações do Polinômio e Séries de Taylor

Neste capítulo vamos utilizar o Polinômio e Série de Taylor, para provar alguns resultados matemáticos como a irracionalidade do número de Euler, desenvolver uma fórmula para obter o valor de e , calcular integrais definidas, utilizando o polinômio aproximador de Taylor de uma determinada função, para obter uma estimativa da área abaixo do gráfico dessa função.

5.1 Regra de L'Hospital

Utilizando o Polinômio de Taylor, vamos mostrar um caso particular das regras de L'Hospital, considerando duas funções f e g com derivadas contínuas até a 2.^a ordem.

Dessa forma sendo f e g deriváveis até a 2.^a ordem, definidas no intervalo aberto I com $x, x_0 \in I$ e $g'(x) \neq 0$, se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, a regra de L'Hospital nos afirma que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Assim vamos escrever a Fórmula de Taylor das funções f e g , sendo o polinômio aproximador de ordem 1. Portanto existe pelo menos um $\tilde{x}_1$ e um $\tilde{x}_2$ no intervalo aberto de extremos x_0 e x tal que:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\tilde{x}_1)}{2}(x - x_0)^2$$

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \frac{g''(\tilde{x}_2)}{2}(x - x_0)^2$$

Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, temos pela continuidade de f e g que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0) = 0$$

logo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\left[f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\tilde{x}_1)}{2}(x - x_0)^2 \right]}{\left[g'(x_0)(x - x_0) + \frac{g''(\tilde{x}_2)}{2}(x - x_0)^2 \right]}$$

como $(x - x_0) \neq 0$ temos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\left[f'(x_0) + \frac{f''(\tilde{x}_1)}{2}(x - x_0) \right]}{\left[g'(x_0) + \frac{g''(\tilde{x}_2)}{2}(x - x_0) \right]} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

finalmente como $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g'(x) = g'(x_0)$ concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

5.2 Irrracionalidade do número e

Anteriormente, construímos o polinômio de Taylor $P_n(x)$ de ordem n em torno de $x_0 = 0$ de $f(x) = e^x$:

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Para $x = 1$, obtemos uma aproximação para o número e :

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Com um erro inferior a

$$\frac{3}{(n+1)!}.$$

Suponhamos que o número e seja racional da forma $e = \frac{a}{b}$, com a e b inteiros positivos e primos entre si, temos então que

$$0 < e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) < \frac{3}{(n+1)!}.$$

e,

$$0 < \frac{a}{b} - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) < \frac{3}{(n+1)!}$$

Tomando $n > b$ e $n \geq 3$, segue que

$$0 < \frac{an!}{b} - n! \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) < \frac{n! \cdot 3}{(n+1)!}$$

$$0 < \frac{an!}{b} - \left(n! + n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \cdots + \frac{n!}{n!} \right) < \frac{3}{n+1} \leq \frac{3}{4}$$

Notamos que $\frac{an!}{b}$ e $(n! + n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \cdots + \frac{n!}{n!})$ são números inteiros, logo sua diferença deve ser um número inteiro. Assim, temos uma contradição pois um número inteiro não pode estar compreendido entre 0 e $\frac{3}{4}$. Portanto, e é um número irracional.

Uma forma alternativa de mostrar a irracionalidade do número e , é proceder da seguinte forma: sabemos que para $x = 1$,

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Suponhamos que o número e seja racional, isto é, da forma $e = \frac{p}{q}$, com p e q inteiros positivos e primos entre si. Então,

$$e = \frac{p}{q} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} + \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Dessa forma, temos

$$\frac{p}{q} - \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} = \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{q!} \left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+2)(q+1)} + \frac{1}{(q+3)(q+2)(q+1)} + \cdots \right).$$

Como

$$\left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+2)(q+1)} + \cdots \right) < \left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+1)} + \cdots \right),$$

e $\left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+1)} + \cdots \right)$ é uma série geométrica e converge para $\frac{1}{q}$, temos então que

$$0 < \frac{p}{q} - \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} < \frac{1}{q!} \cdot \frac{1}{q}.$$

Multiplicando por $q!$, temos:

$$0 < p(q-1)! - q! \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} < \frac{1}{q}.$$

Como $0 < p \cdot (q-1)! < q! \cdot \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!}$ são inteiros, temos que sua diferença é um número inteiro. Logo, temos um número inteiro entre 0 e $\frac{1}{q}$, absurdo.

5.3 Aplicação em aproximações de Áreas

Utilizamos o Polinômio de Taylor no capítulo anterior para obtermos uma aproximação do valor de uma função, de maneira que essa diferença fosse a menor que desejássemos. Argumento análogo pode ser aplicado, utilizando o polinômio de Taylor para aproximar áreas. Dessa forma podemos construir o Polinômio de Taylor que representa a aproximação de uma função f e calcular a integral definida desse polinômio. Assim, estamos obtendo uma aproximação da área e conseqüentemente a precisão de tal resultado será dada pela integral do erro. Logo sendo $P_n(x)$ o polinômio aproximador de $f(x)$ e $E_n(x)$ o erro dessa aproximação, temos

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x) \implies \int_a^b f(x) = \int_a^b P_n(x) + \int_a^b E_n(x)$$

onde f é contínua num intervalo e a e b são números reais que pertencem a esse intervalo.

Essa conclusão terá grande utilidade principalmente quando não for possível obter uma primitiva da função por intermédio das técnicas de integração conhecidas. Para os Exemplos 3.1 e 3.2, utilizaremos a seguinte desigualdade:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Exemplo 5.3.1. Vamos utilizar o Polinômio de Taylor para obter o valor de

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

com erro inferior a 10^{-4} .

O que desejamos obter, é uma aproximação da área abaixo da curva da função $f(x) = e^{-x^2}$ e verificar a precisão desse resultado. Inicialmente utilizando recurso computacional temos com 5 casas decimais que a

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = 0,74682$$

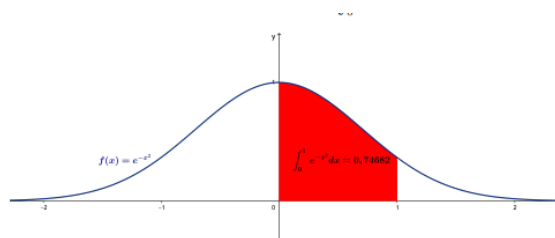


Figura 5.1: Gráfico da Função $f(x) = e^{-x^2}$

Como já construímos o Polinômio de Taylor de ordem n de $f(x) = e^x$ em torno de $x_0 = 0$

temos que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + E_n(x)$$

Onde $E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}x^{(n+1)}$, para algum $\bar{x}$ no intervalo $]0, x[$. Portanto temos

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{(\bar{x})}}{(n+1)!}x^{(n+1)}$$

Substituindo x por $-x^2$ temos

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \frac{(-1)^{n+1}e^{(\bar{x})}}{(n+1)!}x^{(2n+2)}$$

Aplicando a integral temos

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \right) dx + \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}e^{(\bar{x})}}{(n+1)!}x^{(2n+2)} dx$$

Desejamos que o erro seja inferior a 10^{-4} , isto é

$$\left| \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}e^{(\bar{x})}}{(n+1)!}x^{(2n+2)} dx \right| < 10^{-4}.$$

Observe que

$$\left| \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}e^{(\bar{x})}}{(n+1)!}x^{(2n+2)} dx \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{(-1)^{n+1}e^{(\bar{x})}}{(n+1)!}x^{(2n+2)} \right| dx = \int_0^1 \frac{|e^{(\bar{x})}|}{(n+1)!}x^{(2n+2)} dx.$$

Além disso, como $0 < \bar{x} < 1$ temos que $e^{\bar{x}} < e < 3$. Portanto

$$\int_0^1 \frac{|e^{(\bar{x})}|}{(n+1)!}x^{(2n+2)} dx \leq \int_0^1 \frac{e}{(n+1)!}x^{(2n+2)} dx \leq \int_0^1 \frac{3}{(n+1)!}x^{(2n+2)} dx.$$

Desejamos que nossa área tenha um erro menor que 10^{-4} , então

$$\int_0^1 \frac{3 \cdot x^{(2n+2)}}{(n+1)!} dx < 10^{-4},$$

logo

$$\frac{3 \cdot x^{(2n+3)}}{(2n+3)(n+1)!} \Big|_0^1 = \frac{3}{(2n+3)(n+1)!} < 10^{-4}.$$

Essa desigualdade é satisfeita para $n = 6$. Portanto temos

$$\int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \frac{x^{12}}{6!} \right) dx = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} + \frac{x^{13}}{13 \cdot 6!} \right) \Big|_0^1$$

e concluímos então que

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} = 0,74683603 \dots$$

Percebemos então que com a utilização da integral do Polinômio de Taylor obtemos para essa aproximação o valor da área com 4 casas decimais corretas.

5.4 Cálculo de Limites

As Séries de Taylor podem ser utilizadas para calcular limites de funções de forma mais precisa do que usando métodos tradicionais, especialmente quando se trata de funções complicadas ou indefinidas. Ao expandir uma função em uma Série de Taylor em torno do ponto em que o limite é avaliado, é possível obter uma aproximação da função que se torna cada vez mais precisa à medida que mais termos da série são incluídos.

Exercício 5.4.1 Vamos calcular o limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$$

Expandimos a série de Taylor de $\ln(1+x)$ em torno de $x=0$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Logo:

$$x - \ln(1+x) = x - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \right) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \dots$$

Dividindo por x^2 :

$$\frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} - \dots$$

Fazendo $x \rightarrow 0$, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Exercício 4.2 Vamos calcular o limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 + x - e^x}$$

Utilizamos as séries de Taylor em torno de $x = 0$:

Para $\cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \Rightarrow 1 - \cos x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \dots$$

Para e^x :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \Rightarrow 1 + x - e^x = 1 + x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots\right) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \dots$$

Portanto:

$$\frac{1 - \cos x}{1 + x - e^x} = \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \dots}{-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \dots}$$

Colocando x^2 em evidência:

$$= \frac{x^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} + \dots\right)}{x^2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{x}{6} + \dots\right)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} + \dots}{-\frac{1}{2} - \frac{x}{6} + \dots}$$

Fazendo $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 + x - e^x} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1$$

5.5 Cálculo de Integrais

Exemplo 5.5.1. Calcular a integral com exatidão de até 0,001:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$$

Expansão de Taylor de $\sin x$

A série de Taylor da função $\sin x$, centrada em $x = 0$, é dada por:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Substituição na integral

Substituindo a série no integrando:

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot x^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+\frac{1}{2}}}{(2n+1)!}$$

Integração termo a termo

A integral torna-se:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^1 x^{2n+\frac{1}{2}} dx$$

A integral de cada termo é:

$$\int_0^1 x^{2n+\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2n+\frac{3}{2}} = \frac{2}{4n+3}$$

Portanto:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2}{(2n+1)!(4n+3)}$$

Cálculo dos primeiros termos

$$\begin{aligned} n=0 : \quad & \frac{2}{1! \cdot 3} = \frac{2}{3} \approx 0,66667 \\ n=1 : \quad & \frac{-2}{3! \cdot 7} = \frac{-2}{42} \approx -0,04762 \\ & \Rightarrow \text{Soma parcial: } 0,66667 - 0,04762 = 0,61905 \\ n=2 : \quad & \frac{2}{5! \cdot 11} = \frac{2}{1320} \approx 0,00152 \\ & \Rightarrow \text{Soma parcial: } 0,61905 + 0,00152 = 0,62057 \\ n=3 : \quad & \frac{-2}{7! \cdot 15} = \frac{-2}{75600} \approx -0,000026 < 0,001 \end{aligned}$$

Como o próximo termo tem módulo menor que 0,001, podemos parar aqui.

Resultado final

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx \approx \boxed{0,62057}$$

com erro inferior a 0,001.

Exemplo 5.5.2. Vamos resolver o seguinte integral $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$

Começamos expandindo a função $\ln(1+x)$ em uma série de Taylor:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

Agora, substituimos isso na integral:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \int_0^1 \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} dx$$

Podemos trocar a ordem da soma e da integral, já que a série converge uniformemente no

intervalo $[0, 1]$:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \int_0^1 x^{n-1} dx$$

A integral de x^{n-1} é:

$$\int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n}$$

Então a integral se torna:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$$

Essa série é conhecida como a Série Alternada de Basile e sua soma é:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Portanto:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \frac{\pi^2}{12}$$

5.6 Aplicações das Séries de Taylor em diferentes áreas

5.6.1 Biologia e Medicina

Modelação de Crescimento Populacional

Suponhamos que a população de uma espécie de bactéria cresce de acordo com a função $P(t) = P_0 e^{kt}$, onde P_0 é a população inicial, t é o tempo e k é a taxa de crescimento. poderemos usar a série de Taylor para aproximar e^{kt} até o segundo termo e derivar uma expressão para o crescimento populacional aproximado. A expansão de Taylor para e^{kt} até o segundo termo é

$$1 + kt + \frac{(kt)^2}{2}$$

Substituindo na função de crescimento populacional e simplificando, obtemos uma expressão aproximada para o crescimento.

Vamos fazer a comparação dos resultados através da tabela abaixo e considerado $P_0 = 100$

Meteorologia

Tempo t	Valor Exato $P(t) = 100e^{0.2t}$	Aproximação $P_{\text{aprox}}(t)$	Erro Absoluto
1	122.14	121.00	1.14
2	149.18	144.00	5.18
3	182.21	169.00	13.21
4	222.55	196.00	26.55

Tabela 5.1: Comparação da Aproximação da Função de Crescimento Populacional

Previsão do Tempo

Suponhamos que queremos prever a temperatura em uma determinada região com base em dados históricos de temperatura. Se tivermos os dados de temperatura para os últimos 6 meses, podemos usar uma série de Taylor para prever a temperatura para o próximo mês.

Seja $T(n)$ a temperatura média em Celsius para o n -ésimo mês (começando com $n = 1$ para janeiro) e queremos prever a temperatura para o sétimo mês. Use uma série de Taylor para aproximar a função de temperatura e prever a temperatura para o próximo mês.

Vamos supor que temos os seguintes dados de temperatura para os últimos 6 meses:

$$T(1) = 20C, T(2) = 22C, T(3) = 24C, T(4) = 26C, T(5) = 28C, T(6) = 30C$$

Podemos usar uma série de Taylor de segunda ordem para aproximar a função de temperatura. A série de Taylor em torno de $n = 6$ será:

$$T(n) \approx T(6) + T'(6)(n - 6) + \frac{T''(6)}{2!}(n - 6)^2$$

Para calcular as derivadas de $T(n)$, podemos usar os dados fornecidos e calcular as diferenças entre as temperaturas para obter as aproximações das derivadas. Vamos calcular:

Primeira derivada de $T(n)$:

$$T'(6) \approx \frac{T(6) - T(5)}{6 - 5} = \frac{30 - 28}{6 - 5} = 2C/\text{mês}$$

Segunda derivada de $T(n)$:

$$T''(6) \approx \frac{T(6) - 2T(5) + T(4)}{(6 - 5)^2} = \frac{30 - 2(28) + 26}{(6 - 5)^2} = \frac{30 - 56 + 26}{1} = 0C/\text{mês}^2$$

Substituindo esses valores na série de Taylor:

$$\begin{aligned} T(n) &\approx 30 + 2(n - 6) + \frac{0}{2!}(n - 6)^2 \\ &= 30 + 2n - 12 \end{aligned}$$

$$= 2n + 18$$

Portanto, a previsão da temperatura para o próximo mês (sétimo mês) é $2 \times 7 + 18 = 32C$.

5.6.2 Química e Bioquímica

Aproximação de uma Função de Taxa de Reação em Cinética Química

Suponha que a taxa de reação r de uma reação química dependa da concentração de um reagente $[A]$ de acordo com a seguinte função:

$$r = k[A]^2$$

Onde k é a constante de velocidade da reação. Aproxime a taxa de reação r como uma série de Taylor de primeira ordem em torno de uma concentração $[A]_0$. Para aproximar a função r como Polinômio de Taylor de primeira ordem, usamos a expansão em série de Taylor centrada em $[A]_0$:

Uma notação mais clara e bem estruturada para essa equação pode ser:

$$r \approx r_0 + \left. \frac{dr}{d[A]} \right|_{[A]=[A]_0} \cdot ([A] - [A]_0)$$

Onde $r_0 = k[A]_0^2$ é a taxa de reação no ponto $[A]_0$, e $\left. \frac{dr}{d[A]} \right|_{[A]=[A]_0} = 2k[A]_0$ é a derivada da taxa de reação em relação à concentração $[A]$ avaliada em $[A]_0$.

Aproximação de uma Função de Ligação em Bioquímica

Suponha que a energia de ligação E de uma molécula dependa da distância r entre os átomos de acordo com a seguinte função:

$$E = \frac{A}{r^6} - \frac{B}{r^{12}}$$

Onde A e B são constantes. Aproxime a energia de ligação E como um Polinômio de Taylor de segunda ordem em torno de uma distância r_0 .

Para aproximar a função E como uma série de Taylor de segunda ordem, usamos a expansão em série de Taylor centrada em r_0 :

$$E \approx E_0 + \left. \frac{dE}{dr} \right|_{r=r_0} \cdot (r - r_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2E}{dr^2} \right|_{r=r_0} \cdot (r - r_0)^2$$

Onde $E_0 = \frac{A}{r_0^6} - \frac{B}{r_0^{12}}$ é a energia de ligação no ponto r_0 , $\left. \frac{dE}{dr} \right|_{r=r_0} = -6\frac{A}{r_0^7} + 12\frac{B}{r_0^{13}}$ é a derivada da energia de ligação em relação à distância r avaliada em r_0 , e $\left. \frac{d^2E}{dr^2} \right|_{r=r_0} = 42\frac{A}{r_0^8} - 156\frac{B}{r_0^{14}}$ é a segunda derivada da energia de ligação em relação à distância r avaliada em r_0 .

5.6.3 Aplicações na Física

Na Física, assim como na Matemática e em outras áreas, os polinômios de Taylor são usados frequentemente com o objetivo de simplificar funções, obtendo-se boas aproximações para as mesmas.

O Problema da Curvatura da Terra

Ao planejar uma rodovia através do deserto, o engenheiro deve medir as diferenças nas elevações do terreno e fazer correções devido à curvatura da Terra. A Figura 5.2 apresenta um esboço para o problema, onde R é o raio da Terra (aproximadamente 6370 km), L é o comprimento da rodovia e C , a correção a ser feita.^[7]

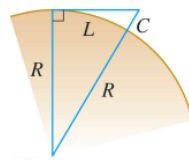


Figura 5.2: Esquema da Curvatura da Terra (Fonte: (STEWART, 2007))

Sabemos que L é o comprimento do arco determinado pelo ângulo θ . E o comprimento de um arco, em radianos, é dado pela medida de seu raio multiplicada pela medida do ângulo central. Logo,

$$L = R\theta \Rightarrow \theta = \frac{L}{R}$$

Observando as relações trigonométricas dadas na figura, temos:

$$\cos \theta = \frac{R}{R+C} \Rightarrow \sec \theta = \frac{R+C}{R}$$

$$R \sec \theta = R + C$$

$$\Rightarrow C = R \sec \theta - R$$

Dessa forma, determinamos a correção a ser feita, em função do comprimento da rodovia (já que R é constante):

$$C = R \sec \left(\frac{L}{R} \right) - R \quad (5.1)$$

Usando um polinômio de Taylor, podemos mostrar que:

$$C \approx \frac{L^2}{2R} + \frac{5L^4}{24R^3} \quad (5.2)$$

Antes, precisamos encontrar uma série de potências que represente a função $f(x) = \sec x$. Calculando as derivadas da função no ponto $x = 0$, até a quarta ordem, obtemos:

$$f(x) = \sec x \quad \Rightarrow \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \sec x \tan x \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = \sec x \tan^2 x + \sec^3 x \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 1$$

$$f'''(x) = \sec x \tan^3 x + 5 \sec^3 x \tan x \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = 0$$

$$f^{(iv)}(x) = \sec x \tan^4 x + 8 \sec^3 x \tan^2 x + 5 \sec^5 x \quad \Rightarrow \quad f^{(iv)}(0) = 5$$

Assim, o polinômio de Taylor em $x = 0$ (o polinômio de Maclaurin) que aproxima a função $f(x) = \sec x$ é:

$$\sec x = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(iv)}(0)}{4!}x^4 + \dots$$

$$\sec x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{5}{4!}x^4$$

Ao usarmos

$$\sec x \approx T_4(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4$$

obtemos

$$\begin{aligned} C &\approx R \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{L}{R} \right)^2 + \frac{5}{24} \left(\frac{L}{R} \right)^4 \right] - R \\ &= R + \frac{1}{2}R \frac{L^2}{R^2} + \frac{5}{24}R \frac{L^4}{R^4} - R \\ &= \frac{L^2}{2R} + \frac{5L^4}{24R^3} \end{aligned}$$

que é a aproximação pretendida em (5).

Para verificarmos a precisão obtida pela aproximação dada em (5), vamos tomar como exemplo uma rodovia que tenha 100 km de extensão, considerando o raio da Terra como 6370 km.

Pela fórmula (4), temos

$$C = R \sec\left(\frac{L}{R}\right) - R = 6370 \sec\left(\frac{100}{6370}\right) - 6370 \approx 0,78500996544 \text{ km}$$

E pela aproximação polinomial de (5),

$$C \approx \frac{L^2}{2R} + \frac{5L^4}{24R^3} = \frac{100^2}{2 \cdot 6370} + \frac{5 \cdot 100^4}{24 \cdot 6370^3} \approx 0,78500995736 \text{ km}$$

Assim, usando um polinômio de grau 4, obtemos uma ótima aproximação para a correção a ser feita, pois a diferença entre os dois resultados encontrados é de apenas 0,0000000808 km ou 0,0000808 m.

O Problema da Velocidade da Onda

A velocidade de uma onda de água está relacionada com seu comprimento e a profundidade da água por

$$v^2 = \frac{gL}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)$$

onde:

- v é a velocidade com a qual a onda se move;
- L é o comprimento da onda;
- d é a profundidade da água;
- g é a constante gravitacional.

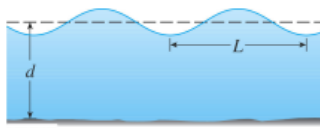


Figura 5.3: Representação de uma onda de água Fonte: (STEWART, 2007)

Assim, se a água for profunda, então $2\pi d/L$ é grande. E sabemos que $\tanh x \rightarrow 1$ quando $x \rightarrow \infty$. Portanto, podemos considerar $\tanh(2\pi d/L) \approx 1$, obtendo uma aproximação para a velocidade da onda em função de seu comprimento:

$$v^2 \approx \frac{gL}{2\pi} \cdot 1 \Rightarrow v \approx \sqrt{\frac{gL}{2\pi}}$$

Porém, se a água for rasa, podemos mostrar que a velocidade da onda tende a ser independente de seu comprimento.

Para isso, vamos obter a série de Maclaurin para $\tanh x$, pois nesse caso $2\pi d/L$ é próximo de 0.

Calculando as três primeiras derivadas de $f(x) = \tanh x$ em $x = 0$, temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \tanh x & \Rightarrow & f(0) = 0 \\ f'(x) &= \operatorname{sech}^2 x & \Rightarrow & f'(0) = 1 \\ f''(x) &= -2 \operatorname{sech}^2 x \cdot \tanh x & \Rightarrow & f''(0) = 0 \\ f'''(x) &= 2 \operatorname{sech}^2 x (3 \tanh^2 x - 1) & \Rightarrow & f'''(0) = -2 \end{aligned}$$

Assim, a série de Maclaurin para $f(x) = \tanh x$ é

$$\tanh x = 0 + x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{(-2)}{3!}x^3 + \dots$$

Se usarmos o polinômio de Taylor de ordem 3 para aproximar a função, teremos

$$\tanh x \approx x - \frac{1}{3}x^3$$

Pelo primeiro termo do polinômio, obtemos

$$\tanh \frac{2\pi d}{L} \approx \frac{2\pi d}{L} \tag{5.3}$$

e então

$$v^2 \approx \frac{gL}{2\pi} \cdot \frac{2\pi d}{L} \Rightarrow v \approx \sqrt{gd}$$

como queríamos mostrar.

Como $\tanh x$ é uma função ímpar, sua série de Maclaurin é alternada. Portanto, o erro na aproximação feita em (5.3) usando-se o primeiro termo da série é menor que o segundo termo. Se $L > 20d$, por exemplo, então

$$\frac{1}{3} \left(\frac{2\pi d}{L} \right)^3 < \frac{1}{3} \left(2\pi \cdot \frac{1}{20} \right)^3 = \frac{\pi^3}{3000}$$

Como,

$$\frac{gL}{2\pi} \cdot \frac{\pi^3}{3000} \approx 0,00164$$

a aproximação $v \approx \sqrt{gd}$ tem precisão de duas casas decimais.

Capítulo 6

Análise Crítica e Comparativa

6.1 Análise comparativa entre polinômios de aproximação e Séries de Taylor

vamos apresentar a Análise comparativa entre polinômios de aproximação e as séries de Taylor:

Centro de Aproximação:

- Polinômios de Interpolação: Podem ser centrados em qualquer ponto a do domínio da função.
- Séries de Taylor: A série de Taylor é centrada em um ponto específico a . A série de Maclaurin é um caso especial em que $a = 0$.

Generalidade:

- Polinômios de Aproximação: Podem ser polinômios de qualquer ordem e são geralmente mais flexíveis em termos de ajuste de precisão.
- Séries de Taylor: São uma forma especial de polinômios de aproximação onde todos os termos são derivadas da função original no ponto de centro. Por isso, fornecem uma aproximação precisa apenas em torno desse ponto específico.

Expressão:

- **Polinômios de Aproximação:** São expressos como polinômios de grau n , onde n é o grau do polinômio.
- **Séries de Taylor:** São expressas como uma soma infinita de termos que envolvem as derivadas da função original em torno do ponto de centro.

Precisão:

- **Polinômios de Aproximação:** A precisão depende do grau do polinômio escolhido e da distância entre o ponto de avaliação e o ponto de centro.
- **Séries de Taylor:** A precisão é determinada pelo número de termos incluídos na série. Quanto mais termos, mais precisa é a aproximação dentro da região de convergência da série.

Aplicação:

- **Polinômios de Aproximação:** São úteis em situações onde a função pode ser bem aproximada por um polinômio em um intervalo limitado.
- **Séries de Taylor:** São amplamente utilizadas em análise matemática, física e engenharia para fornecer aproximações precisas de funções em torno de um ponto específico.

6.2 Análise Crítica

6.2.1 Polinômios de Aproximação:

- **Limitações de Aproximação:** Polinômios de ordem baixa podem ter dificuldade em capturar características complexas de funções.
- **Problemas de Interpolação:** Em certos casos, a interpolação por polinômios pode levar a oscilações indesejadas (fenômeno de Runge).

6.2.2 Séries de Taylor:

- **Restrições de Convergência:** As séries de Taylor podem não convergir para a função em toda parte, especialmente em pontos singulares ou onde a função é descontínua.
- **Necessidade de Derivadas:** O cálculo das derivadas pode ser complicado ou computacionalmente caro, especialmente para funções complicadas.
- **Dependência do Ponto de Expansão:** A precisão da série de Taylor depende significativamente do ponto de expansão escolhido.

6.2.3 Crítica Geral:

- **Aplicabilidade Contextual:**
A escolha entre polinômios de aproximação e séries de Taylor depende do contexto específico e dos requisitos de precisão.
- **Complexidade Computacional:**
Embora as séries de Taylor possam oferecer maior precisão teórica, o cálculo das derivadas pode torná-las impraticáveis em certos casos.
- **Trade-off entre Precisão e Simplicidade:**
Polinômios de aproximação são mais simples, mas podem sacrificar precisão em comparação com as séries de Taylor.
- **Considerações Numéricas:**
Em problemas de computação numérica, é importante equilibrar a precisão da aproximação com a eficiência computacional.

6.3 Limitações e desafios dos polinômios de aproximação e séries de Taylor

Embora os polinômios de aproximação e as séries de Taylor sejam ferramentas poderosas, eles também apresentam várias limitações e desafios que podem afectar sua aplicabilidade em diferentes contextos. vamos citar algumas das principais limitações e desafios associados a esses métodos:

6.3.1 Polinômios de Aproximação

- **Fenômeno de Runge:**

Polinômios de interpolação de alta ordem podem levar a oscilações indesejadas (fenômeno de Runge) em certos conjuntos de dados, especialmente em pontos extremos.

- **Sensibilidade aos Dados:**

Pequenas alterações nos pontos de dados podem resultar em grandes variações nos coeficientes do polinômio de interpolação, tornando-o instável.

- **Limitações de Interpolação**

Em muitos casos, a interpolação exacta não é necessária ou desejável, e os polinômios de interpolação podem introduzir artefactos indesejados nos resultados.

- **Complexidade das Derivadas**

O cálculo das derivadas necessárias para as séries de Taylor pode ser complicado, especialmente para funções em domínios multidimensionais.

- **Limitações de Precisão:**

A precisão das séries de Taylor diminui à medida que a distância do ponto de expansão aumenta, o que limita sua aplicabilidade a regiões locais próximas ao ponto de expansão.

Capítulo 7

Conclusão e Recomendações

Esta pesquisa explorou de maneira abrangente os fundamentos e aplicações da teoria de aproximação por meio de polinômios, com foco especial nas Séries de Taylor. Inicialmente, discutiu-se o desenvolvimento de polinômios de aproximação, que permitem representar funções não comuns de forma simplificada em intervalos determinados.

Um ponto crucial foi o estudo do erro nas aproximações, onde técnicas foram investigadas para minimizar a diferença entre a função original e sua representação polinomial, melhorando a precisão. Também foram analisadas funções específicas, como trigonométricas, exponenciais e racionais, aplicando a teoria para obter representações mais acessíveis dessas funções.

Além disso, a pesquisa explorou as inúmeras aplicações práticas da teoria de aproximação, demonstrando sua relevância em áreas como física, engenharia e estatística, onde simplificações matemáticas são indispensáveis para a resolução de problemas complexos. O cálculo de derivadas em série, através das Séries de Taylor, foi abordado como uma ferramenta eficaz para a análise do comportamento local das funções, assim como a determinação do raio de convergência, essencial para delimitar as regiões onde as séries oferecem representações precisas.

Por fim, destacou-se o uso das expansões em série em cálculos de limite, integração e diferenciação, reafirmando a importância das Séries de Taylor como um recurso poderoso e versátil na matemática aplicada.

Bibliografia

- [1] ATKINSON, K. *An Introduction to Numerical Analysis*, 3th ed. 2004.
- [2] BURDEN, FAIRES, J. D. *Métodos Numéricos*. Cengage Learning, Boston, MA, 2010.
- [3] BURDEN, R. F. *Numerical Analysis*, 10th ed. Cengage Learning, Boston, MA, 2016.
- [4] FRANCO, N. B. *Cálculo Numérico*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.
- [5] PISKOUNOV, N. S. *Cálculo Diferencial e Integral Volume 2*. 1987, 1987.
- [6] STEVEN C, R. P. *Métodos Numéricos para Engenharia: Teoria e Aplicações*. McGraw-Hill, 2010.
- [7] STEWART, J. *Cálculo, Volume 2*, 7th ed. Cengage Learning, Boston, MA, 2014.
- [8] STEWART, J. *Essential calculus: Early transcendentals*, 6th ed. Brooks/Cole, a part of the Thomson Corporation, 2016.
- [9] TAYLOR, B. *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*. Gulielmus Innys, London, 1715.
- [10] TREFETHEN, L. N. *Approximation Theory and Approximation Practice*. SIAM, Philadelphia, PA, 2008.
- [11] W, R. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, 1976.
- [12] WILLIAM BOYCE, R. D. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, 11th ed. 2020.