UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE

FACULDADE DE CIÊNCIAS
Departamento de Matemática e Informática

Trabalho de Licenciatura em Matemática

COMPACIDADE RELATIVA DE CONJUNTOS NOS ESPAÇOS DE FUNÇÕES CONTÍNUAS COM PESO

Autor: Romário Mario Recai

Maputo, 19 de outubro de 2024

UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE

FACULDADE DE CIÊNCIAS
Departamento de Matemática e Informática

Trabalho de Licenciatura em Matemática

COMPACIDADE RELATIVA DE CONJUNTOS NOS ESPAÇOS DE FUNÇÕES CONTÍNUAS COM PESO

Autor: Romário Mário Recai

Supervisor: Prof. Doutor Yury Nepomnyashchikh

Co-Supervisor: Mestre Timóteo Sambo

Maputo, 19 de outubro de 2024

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais que sempre me apoiaram incentivando-me dia pois dias, que trabalharam muito para que eu pode-se estudar.

Agradecimentos

Agradeço à Deus Soberano Jeová por me ter dado forças e vontade de estudar e de aguentar todas as dificuldades passadas durante o curso, especialmente durante a elaboração do presente trabalho.

Agradeço ao Prof. Doutor Yury Nepomnyashchikh e ao Mestre Timóteo Sambo, meus supervisores, pela orientação, paciência, atenção imerecida e pelo material disponibilizado que ajudaram a tornar possível este trabalho.

Declaração de Honra

Declaro, por minha honra, que o presente trabalho nunca foi usado para obtenção de outro grau a não ser o indicado e que é o resultado da minha investigação pessoal, estando indicadas as obras usadas no texto e nas referências bibliográficas.

Maputo, 19 de outubro de 2024

______________________________-

(Romário Mário Recai)

Resumo

Os teoremas de Ascoli-Arzelà oferecem os critérios (as condições necessárias e suficientes) de compacidade relativa de conjuntos no espaço métrico das funções contínuas definidos em espaços métricos compactos, e também de conjuntos no espaço de Banach $C[a,b]$ das funções contínuas reais definidos no segmento $[a;b]$. Um conjunto em $C[a,b]$ é relativamente compacto se e somente se é equicontínuo e equilimitado (a condição de equilimitação pode ser substituída também pela condição mais fraca de limitação do conjunto num ponto).

Neste trabalho, generalizamos os critérios clássicos de Ascoli-Arzelà e suas consequências para o espaço $C_\alpha[a,b]$ das funções contínuas com peso α. Deste modo, estabelecemos alguns critérios novos e algumas condições suficientes de compacidade relativa de conjuntos no espaço $C_\alpha[a,b]$.

Palavras-Chave: Espaço compacto, conjunto relativamente compacto, função do peso, espaço $C_\alpha[a,b]$, conjunto α-equicontínuo, conjunto α-equilimitado, conjunto limitado num ponto.

Abstract

The Ascoli-Arzelà theorems offer us the criteria (the necessary and sufficient) of relative compactness of sets in the metric space of continuous functions defined in compact metric spaces, and also, in a more practical case , of sets in the Banach space $C[a, b]$ of real continuous functions defined in the segment $[a; b]$, endowed with the max-norm. A set in $C[a, b]$ is relatively compact if and only if it is equicontinuous and equilimited (the equilimitation condition can also be replaced by the weaker condition limiting the set at a point).

In this work, we generalize the classical Ascoli-Arzelà criteria and their consequences to the space $C_\alpha[a, b]$ of continuous functions with weight α. In this way, we establish new criteria and some sufficient conditions for relative compactness of sets in the space $C_\alpha[a, b]$.

Keywords: Compact space, relatively compact set, weight function, space $C_\alpha[a, b]$, set α-equicontinuous, set α-equilimited, set limited to one point.

Simbologias

- $\emptyset$ é o conjunto vazio;
- $x \in A$ denota que x pertence ao conjunto A (isto é, x é um elemento de A);
- $x \notin A$ denota que x não pertence ao conjunto A;
- $A \subset B$ (ou $B \supset A$) denota que o conjunto A é um subconjunto do conjunto B (diz-se também que A é contido em B), isto é, $\forall x\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$;
- $P(X)$ é o conjunto de todos os subconjuntos do conjunto X;
- $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ denota o produto cartesiano dos conjuntos $X_1, X_2, \ldots, X_n$, definido por $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \{(x_1, x_2, \ldots x_n) : x_i \in X_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)\}$;
- $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ é o conjunto dos números naturais;
- $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são os conjuntos dos números racionais, irracionais, reais e complexos, respectivamente;
- $\inf\limits_{t\in T} f(t)$, $\sup\limits_{t\in T} f(t)$, $\max\limits_{t\in T} f(t)$, $\min\limits_{t\in T} f(t)$ denotam, respectivamente, o ínfimo, o supremo, o máximo, o mínimo de uma função $f : T \to \mathbb{R}$ (onde T é um conjunto não vazio).
- $\mathbb{P}$ é o corpo associado a um espaço linear ($\mathbb{P} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{P} = \mathbb{C}$) ;
- $\mathbb{R}^n$, ($\mathbb{C}^n$) é o espaço euclidiano real (complexo) n-dimensional dotado da norma euclidiana $\|\cdot\|$ sendo $\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2}$;
- $Int\,(M)$ denota o interior (o conjunto de todos os pontos interiores) do conjunto M num espaço topológico;
- $\overline{M}$ denota o fecho (o conjunto de todos os pontos aderentes) do conjunto M num espaço topológico;
- $\|\cdot\|$ ou $\|\cdot\|_\gamma$ (γ um símbolos qualquer) é uma norma num espaço normado;
- $T(X, Y)$ (onde (X, d) e (Y, ρ) são espaços métricos compactos) é o espaço métrico completo, constituído de todas as funções $f : X \to Y$, dotado da métrica $\rho_\infty(f, g) = \sup\limits_{x\in X} \rho(f(x), g(x))$;
- $C(X, Y)$ é o subespaço do epaço métrico $T(X, Y)$ constituído das funções contínuas.
- $C[a, b]$ é o espaço de Banach, constituído por funções contínuas em $[a, b]$ e dotado da norma $\|x\|_\infty = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$;
- $C_\alpha[a, b]$ é o espaço normado, constituído por funções contínuas em $[a, b]$ com peso $\alpha :]a; b[\to]0, \infty[$, dotado da norma $\|x\|_{\infty,\alpha} = \max\limits_{t\in[a,b]} \alpha(t)|x(t)|$.
- $\square$ denota fim de uma demonstração.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contextualização

Na Matemática, um dos dos conceitos mais importante é da compacidade em espaços topológico. Este conceito permite descrever os espaços topológicos infinitos e de natureza continua por meio de algumas características finitas. O conceito de compacidade é uma extensão topológica das ideias de finitude e limitação.

O estudo de espaços compactos teve o seu início no final do século XIX, pelas mãos de Émile Borel[1] e Henri Lebesgue[2] assim como, as observações acerca de intervalos fechados e limitados da recta real. No século XX, a teoria dos espaços compactos recebeu um desenvolvimento significativo, graças à pesquisa de vários matemáticos, entre os quais destacamos os nomes de Pavel Alexandrov [3], Andrey Tychonoff[4] e Roman Sikorski[5].

O conceito de compacidade é importante em vários ramos da Matemática, tais como a Análise Funcional e Equações Diferenciais. Exemplos concretos desta afirmação são os teorema de Schauder de ponto fixo ([6], [10]), os teoremas de imersão compacta [3], o teorema de Peano[6] sobre existência de soluções de equações diferenciais não lineares ([8, p.107-109]).

A Aplicação em Análise Funcional, o problema central é estabelecer as condições suficientes de compacidade e de compacidade relativa de conjuntos em vários espaços funcionais. Trata-se dos critérios em termos específicos destes espaços, diferentemente dos critérios gerais dos espaços topológicos ou métricos, dá-nos o instrumento conveniente de verificação de compacidade (e de compacidade relativa) de conjuntos concretos em espaços funcionais. Para além disso, os critérios de compacidade de conjuntos é uma ponte para verificação de compacidade de vários operadores lineares e não-lineares em espaços funcionais. Por sua vez, a compacidade de operadores tem mais importância no estudo qualitativo e numérico dos modelos matemáticos na forma dos problemas para equações diferenciais, integrais e Equações diferenciais funcionais, usando métodos modernos de Análise Funcional.

Um conjunto em um espaço métrico (em particular, espaço normado) é relativamente compacto se só se o seu fecho é compacto, ou, de outra maneira, um conjunto é compacto, se e somente se é relativamente compacto e fechado. Deste modo, a verificar de compacidade consiste em duas partes: verificar se o conjunto é relativamente compacto e se é fechado. Para

[1]Félix Édouard Justin Émile Borel (1871—1956) — matemático Francês
[2]Henri Léon Lebesgue (1875—1941) — matemático Francês
[3]Pavel Sergeyevich Alexandrov (1896—1982) — matemático Russo
[4]Andrey Nikolayevich Tychonoff (1906—1993) — matemático Russo
[5]Roman Sikorski (1920—1983) — matemático Polonês
[6]Guiseppe Peano (1858—1932) — matemático Italiano

verificar se um conjunto M em um espaço métrico X é fechado é suficiente, verificar se todos os pontos aderentes de M pertencem a M ou seja, se o limite em X de qualquer sucessão convergente dos pontos de M pertence ao mesmo M. Não existe nenhum elemento especifico para verificação desta propriedade nos espaços funcionais concretos. Em diferença disto, para cada um dos espaços funcionais, os critérios de compacidade relativa de conjunto são formulados em termos específicos, e são diferentes para espaços distintos. Então, no estudo de compacidade em espaços funcionais concretos, são importantes, no primeiro lugar, os critérios e as condições suficientes de tal propriedade de conjunto como compacidade relativa. Isto justifica, porque no título do nosso trabalho trata-se de compacidade relativa de conjuntos, e não de compacidade.

Actualmente, são conhecidos os critérios de compacidade relativa de conjuntos em muitos espaços normados: em $\mathbb{R}^n$, em espaços de sucessões l_p, c, c_0, em espaços das funções contínuas e em espaços de funções integráveis a Lebesgue L_p, e em vários outros. O leitor pode ver esses critérios, por exemplo, em [4], [8], [10].

Estudando a literatura sobre o tema, chegamos à conclusão de que, talvez, entre todas as classes de espaços funcionais, a compacidade tenha sido estudada de forma mais completa e detalhada nos espaços de funções contínuas. Os critérios correspondentes são chamados dos teoremas de Ascoli[7]-Arzelà[8], em homenagem aos matemáticos que obtiveram os primeiros resultados nessa direcção.

Existem teoremas de Ascoli-Arzelà na forma generalizada para o espaço $C(X,Y)$ das funções contínuas $f : X \to Y$ onde X e Y são espaços espaços topológico. Também são conhecidas os teoremas para o caso do espaço de Banach[9] $C[a,b]$ das funções contínuas $x : [a;b] \to \mathbb{R}$ dotado de max-norma, que são muito úteis para aplicações, veja, por exemplo, [4], [8] e [10].

No estudo das equações diferenciais funcionais singulares um dos métodos é o uso dos espaços funcionais com pesos. Também, nos problemas de autovalores para equações diferenciais, é útil considerar tais problemas em espaços funcionais com pesos . Uma generalização do espaço $C[a,b]$ é o espaço com peso $C_\alpha[a,b]$. Dada função contínua $\alpha :]a;b[\to \mathbb{R}$ o espaço de Banach $C_\alpha[a,b]$ consiste em funções contínuas $x :]a;b[\to \mathbb{R}$ tais que a função αx admite a prolongação contínua em $[a;b]$, dotado das operações algébricas usuais e da norma

$$\|x\|_{\infty,\alpha} = \max_{t\in[a;b]} \alpha(t)|x(t)|.$$

Apesar da importância do espaço $C_\alpha[a,b]$ para aplicações, nós não encontramos na literatura os critérios de compacidade relativa de conjuntos neste espaço. Por isso, o presente trabalho tem como foco principal de preencher a esta lacuna e apresentar os critérios de compacidade relativa de conjuntos no espaço de Banach $C_\alpha[a,b]$, junto com várias consequências, relacionas com alguns tipos especiais com pesos. Os resultados estabelecidos no trabalho nesta direção são próprios, e aparentemente novos.

[7]Giulio Ascoli (1843—1896) — matemático Italiano
[8]Cesare Arzelà (1847—1912) — matemático Italiano
[9]Stefan Banach (1892—1945) — matemático Polonês

1.2 Estrutura do trabalho

O trabalho consiste em quatro capítulos, sendo o primeiro constituído pela Introdução, segundo o desenvolvimento do tema, o terceiro as Conclusões e Recomendações e por fim o terceiro a Bibliografia.

No segundo capítulo fazemos a revisão das estruturas básicos da Topologia e de Análise Funcional, tais como espaços topológicos, espaços métricos, espaços normados e de Banach e elementos da teoria de operadores lineares. A descrição destas estruturas servem de pré-requisitos para o estudo de compacidade. Para a descrição dos elementos básicos da teoria dos espaços topológicos e métricos nos baseamos nas obras [5]–[9], [13], [14], para a descrição dos elementos da espaços normados e de operadores lineares nos baseamos nas obras [1], [4], [8] e [10].

No terceiro capítulo é apresentada a revisão da teoria de espaços compactos, também conjuntos compactos e relativamente compactos. São descritas tal como as propriedades gerais relacionadas com a compacidade em espaços topológicos, assim como as propriedades específicos para os espaços métricos e, consecutivamente, para os espaços normados. Utilizamos as obras citadas no parágrafo anterior, e também a revisão da teoria dos espaços compactos feita no trabalho [11].

O terceiro capítulo é principal no trabalho, caracterizemos o seu conteúdo pelas secções.

Na secção 4.1 apresentamos o critério conhecido (teorema de Ascoli-Arzelà) de compacidade relativa de conjuntos no espaço métrico $C(X, Y)$, onde X e Y são espaços métricos compactos. Usamos a demonstração em [8], mas apresentamos com detalhes preenchendo os elementos marcados em [8] no nível de ideias.

Na secção 4.2 apresentamos o critério conhecido de compacidade relativa de conjuntos no espaço de Banach $C[a, b]$ ([6],[8],[10]). Também apresentamos o teorema de Ascoli-Arzelà em duas formas (usando a condição de equilimitação e a condição de limitação num ponto). Diferentemente da demonstração direto apresentado em [8], usamos o método baseado no critério da secção anterior e acompanhamos os resultados com a descrição, interpretação das condições de equilimitação e de equicontinuidade, junto com os exemplos próprios e com vários corolários.

Na secção 4.3 são definidos os espaços com pesos $C_\alpha[a, b]$ e apresentados propriedades destes espaços, também é feito comparação dos espaços com vários pesos, em particular com espaços sem peso $C[a, b]$ (que, no entanto, é o caso particular de $C_\alpha[a, b]$ que corresponde ao peso $\alpha(t) \equiv 1$). Sao apresentadas teoremas básicas sobre imersão, isomorfismo e isometria linear em espaços $C_\alpha[a, b]$, que são acompanhados dos exemplos. A teoria dos espaços $C_\alpha[a, b]$ não foi encontrada na forma explícita em fontes bibliográficas. Não ousaríamos dizer que os resultados são completamente novos, mas é certo que foram feitos de forma independente e são próprios. Na elaboração dos resultados da secção usamos ideias de estudo dos espaços das funções integráveis com peso no trabalho [12].

Na secção 4.4 são apresentados os resultados principais do trabalho: critérios de compacidade relativa de conjuntos nos espaços de funções contínuas com peso $C_\alpha[a, b]$, algumas consequências e teoremas específicos de comparação com critérios para espaço $C[a, b]$, por vários classes de pesos. São apresentadas os contra-exemplos que ilustram a impossibilidade de melhoria das condições dos teoremas. Todos os resultados da secção são novos e próprios.

1.3 Objectivos

1. Objectivos gerais:
   (a) Revisar os critérios de compacidade relativa de conjuntos nos espaços de funções contínuas.
   (b) Estabelecer novos critérios de compacidade relativa de conjuntos nos espaços de funções contínuas com peso.
2. Objectivos específicos
   (a) Apresentar exemplos de conjuntos que ilustram as condições de equilimitação e de equicontinuidade de conjuntos no espaço $C[a,b]$.
   (b) Demonstrar a forma do teorema de Ascoli-Arzelà em que a condição de equilimitação é substituída pela condição mais fraca de limitação num ponto e apresentar algumas consequências do teorema de Ascoli-Arzelà.
   (c) Conceptuar os espaços de funções contínuas com peso $C_\alpha[a,b]$ e apresentar as suas propriedades básicas.
   (d) Investigar os teoremas de comparação da compacidade relativa de conjuntos nos espaços com peso $C_\alpha[a,b]$ e sem peso $C[a,b]$.

1.4 Metodologia

De forma pedagógica e didática no presente trabalho, fazemos o uso de elementos da Lógica e Teoria de conjuntos, Topologia, Análise Funcional, tendo como base as obras indicadas nas referências bibliográficas. A redacção final da tese é feita usando o editor de texto $\LaTeX2_\varepsilon$ e para apresentação de figuras, será usado o software GeoGebra Classic 5.0.

Capítulo 2

Espaços topológicos, métricos e normados

2.1 Espaços topológicos

Na presente secção, faremos apresentações de algumas definições básicas. as definições básicas e propriedades dos espaços topológicos que serão usados durante o desenvolvimento deste trabalho. As demonstrações de algumas propriedades são omitidas, para mais detalhe ver as obras [5]–[8], [13] e [14].

Seja X um conjunto não vazio.

Definição 2.1.1. [[5],p.8-9] Denomina-se **topologia** sobre X um conjunto $\tau \subset P(X)$ (uma família de subconjunto de X) satisfazendo as seguintes propriedades:
(T1) O próprio conjunto X e $\emptyset$ pertencem á τ.
(T2) A união de qualquer família (finita ou infinita) de conjuntos que são elementos de τ é um elemento de τ.
(T3) A intersecção de qualquer família finita de conjunto que são elementos de τ é um elemento de τ.
As condições **(T1)**, **(T2)** e **(T3)** denominam-se axiomas da topologia.

Observação 2.1.2. O axioma **(T3)** é equivalente ao axioma **(T3)***: se $A, B \in \tau$ então $A \cap B \in \tau$.

Definição 2.1.3. O conjunto X junto com a topologia τ chamam-se **espaço topológico** ou seja, a dupla (X,τ) é denominado espaço topológico. Assim sendo, os elementos do X chamam-se pontos, os elementos do conjunto τ são conjuntos **abertos** e seus complementos são denominados conjuntos **fechados** em X.

Exemplo 2.1.4. As duplas (X,τ_t) e (X, τ_d), onde $\tau_t = \{\emptyset, X\}$ e $\tau_d = P(X)$ são espaços topológicos. As topologia τ_d e τ_t denominam-se por **discreta** e **trivial**.

Exemplo 2.1.5. Consideremos o conjunto $X = \{a, b, c\}$. A família de subconjuntos de X definida como $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$ representa uma topologia visto que, obedece os axiomas de topologia.

Definição 2.1.6. Dadas duas topologia τ_1 e τ_2 sobre conjunto X definindo dois espaços topológicos, $T_1 = (X, \tau_1)$ e $T_2 = (X, \tau_2)$, diremos que a topologia τ_1 é mais **forte** ou mais **fina** que a topologia τ_2, se $\tau_2 \subset \tau_1$. Diz-se também que τ_2 é mais **fraca** ou mais **grossa** que τ_1. Por outro lado, as topologia τ_1 e τ_2 não são comparável se, τ_1 não for mais forte nem mais fraca do que τ_2 ($\tau_1 \not\subset \tau_2$ e $\tau_2 \not\subset \tau_1$) mas se a topologia τ_1 for mais forte que τ_2 e τ_2 for mais forte que τ_1 ($\tau_1 \subset \tau_2$ e $\tau_2 \subset \tau_1$) então $\tau_1 = \tau_2$.

2.1.1 Tipos de pontos e operações nos espaços topológicos

Seja (X,τ) um espaço topológico.

Definição 2.1.7. [8] Denomina-se **vizinhança** de um elemento $x \in X$ qualquer conjunto aberto que o contém.

O conjunto de todas as vizinhanças de $x \in X$ chama-se **sistema de vizinhanças** de x e é representa-se por $\mathcal{O}(x)$.

Definição 2.1.8. Denomina-se vizinhança de um conjunto $F \subset X$ a qualquer conjunto aberto que o contém. O conjunto de todas as vizinhanças de F representa-se por $\mathcal{O}(F)$.

Sejam A um subconjunto de X e $x \in X$.

Definição 2.1.9. **1.** x chama-se ponto **interior** de A se existir uma vizinhança V de x tal que $V \subset A$.
2. x chama-se ponto **aderente** de A se qualquer vizinhança de x contém pelo menos um ponto do conjunto A.
3. x chama-se ponto de **acumulação** de A se qualquer vizinhança de x contem pelo menos um ponto diferente de x do conjunto A.
4. x chama-se ponto de **fronteira** de A se não for interior nem exterior de A. Ou seja, qualquer vizinhança de x tem intersecção não vazia com A e com $X \backslash A$.

Seja X um espaço topológico e $A \subset X$.

Definição 2.1.10. **1.** O **Interior** de A é o conjunto de todos pontos interiores do conjunto A e representa-se por $\boldsymbol{Int(A)}$.
2. O **Fecho** de A é o conjunto de todos pontos aderentes do conjunto A e representa-se por $\overline{\boldsymbol{A}}$.
3. O **conjunto Derivado** de A é o conjunto de todos pontos de acumulação do conjunto A e representa-se por $\boldsymbol{Der(A)}$.
6. A **Fronteira** de A é o conjunto de todos pontos da fronteira do conjunto A e representa-se por $\boldsymbol{Fr(A)}$.

2.1.2 Topologia gerada pela família de conjuntos e conceito da base

Seja X um conjunto não vazio.

Lema 2.1.11. *Dado um conjunto das topologias τ_α $(\alpha \in I)$ em X. A família dos conjuntos $\bigcap_{\alpha \in I} \tau_\alpha$ é também topologia em X. Veja a Demonstração em [8]*

Teorema 2.1.12. *Dado $\xi \subset P(X)$, existe a topologia minima $\tau(\xi)$ que contem ξ, ou seja, uma família de conjuntos $\tau(\xi)$ satisfazendo as seguintes propriedades:*
a) *$\tau(\xi)$ é uma topologia em X e $\tau(\xi) \supset \xi$.*
b) *Se τ é uma topologia em X e $\tau \supset \xi$ então $\tau \supset \tau(\xi)$.*
A topologia minima que contem ξ determina-se unicamente pela formula: $\tau(\xi) = \bigcap\{\tau : \tau$ é topologia em X e $\tau \supset \xi\}$.

Definição 2.1.13. Dado $\xi \subset P(X)$ a topologia minima $\tau(\xi)$ que contém a família ξ chama-se **topologia gerada** por família ξ.

Exemplo 2.1.14. Se ξ é uma colecção de todos os intervalos abertos na recta numérica $\mathbb{R}$. A topologia gerada por ξ é chamada de **topologia padrão** em $\mathbb{R}$, que denotaremos por τ_p.

Lema 2.1.15. *Seja* $\xi \subset P(X)$*, então:*
a) $\tau(\tau(\xi)) = \tau(\xi)$*;*
b) $\tau(\xi) = \xi$ *se e só se* ξ *é uma topologia.*

A demonstração deste lema pode ser encontrada em [7, p.34-35].

Seja X um espaço topológico com a topologia τ.

Definição 2.1.16. [14] **Base** da topologia τ (ou do espaço topológico (X,τ)) é um subsistema de conjuntos abertos $\mathcal{B} \subset \tau$ tal que qualquer conjunto aberto pode ser representado como união de alguns conjuntos do subsistema $\mathcal{B}$.

Observação 2.1.17. O facto de que $\mathcal{B}$ é uma base do espaço topológico (X,τ) pode ser escrito de modo simbólico: $\mathcal{B} \subset \tau$ e $(\forall_G \in \tau)$ $(\exists \mathcal{B}_G \subset \mathcal{B})$: $G = \bigcup\{U : U \in \mathcal{B}_G\}$
Notemos que $\emptyset$ é aberto e pode ser representado como união vazia $\emptyset = \bigcup\{U : U \in \emptyset\}$.

Proposição 2.1.18. *Qualquer topologia é a topologia gerada pela sua base. Mais detalhadamente, se* $\mathcal{B}$ *é uma base da topologia* τ *então* $\tau = \tau(\mathcal{B})$*.*

Teorema 2.1.19.(Critério 1) *[8, p.12-13] Uma família* $\mathcal{B} \subset \tau$ *é uma base da topologia* τ *se e somente se* $(\forall x \in X)(\forall V \in \mathcal{O}(x))(\exists U \in \mathcal{B}) : x \in U \subset V$*.*

Teorema 2.1.20.(Critério 2)*[8, p.12-13] Uma família* $\mathcal{B}$ *de subconjuntos de* X *é uma base de uma topologia em* X *se e somente se satisfaz a seguintes condições:*
(B1) $(\forall x \in X)(\exists U \in \mathcal{B}) : x \in U$*;*
(B2) *se* x *pertence a intersecção de dois elementos* U_1, U_2 *de* $\mathcal{B}$*, então existe um elemento* U *de* $\mathcal{B}$ *tal que,* $x \in U \subset U_1 \cap U_2$*.*

Teorema 2.1.21.(Critério 3)*[8, p.12-13] Uma família* $\mathcal{B}$ *de subconjunto de* X *é uma base de uma topologia* τ *em* X *se e somente se satisfaz as seguintes condições:*
$(B1)^*$ X *é a união de todos os elementos de* $\mathcal{B}$*;*
$(B2)^*$ $\forall U_1, U_2 \in B$ *a intersecção* $U_1 \cap U_2$ *pode ser representado na forma de uma união de conjuntos da família* $\mathcal{B}$*.*

Exemplo 2.1.22. Consideremos o conjunto $X = \{1,2,3,4,5,6,\}$. A família
$\tau = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{3,4\}, \{1,5\}, \{1,2,5\}, \{1,2,3,4\}, \{1,3,4\}, \{1,3,4,5\}, X\}$ é uma topologia em X. Pela Definição 2.1.16, ou pelo Critério 1 concluímos que $\mathcal{B} = \{\{1\}, \{1,2\}, \{3,4\}, \{6,5\}\}$ é uma base da topologia τ.

Exemplo 2.1.23. Se X é um conjunto não vazio, a família de todos os subconjunto unitários (que tem um so elemento) é um a base para topologia discreta.

Exemplo 2.1.24. Em $\mathbb{R}$, as famílias de conjuntos $\mathcal{B} = \{]a;b[: a,b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ e $\mathcal{B}_0 = \{]r - 1/n; r + 1/n[: r \in \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N}\}$ são bases da topologia padrão τ_p. Notemos que $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ e $\mathcal{B}_0$ é uma base enumerável (ver a Definição 2.1.55 na Subsecção 2.1.5).

Definição 2.1.25. Seja X um espaço topológico e $\mathcal{S}$ uma família de subconjuntos de abertos de X. Diz-se que $\mathcal{S}$ é uma **sub-base** de X se a família de todas intersecções finitas de elementos de $\mathcal{S}$ forma uma base para X.

Exemplo 2.1.26. Em $\mathbb{R}$, dado $a > 0$ fixo, a família $\mathcal{S} = \{]x; x + a[: x \in \mathbb{R}\}$ (a família dos intervalos abertos de comprimento a) é uma sub-base da topologia padrão τ_p.

Definição 2.1.27. Sejam X um espaço topológico e $x \in X$. A subfamília $\mathcal{B}(x)$ de $\mathcal{O}(x)$ tal que, cada elemento de $\mathcal{O}(x)$ contem um elemento $\mathcal{B}(x)$ chama-se **base no ponto** x do espaço X.

Exemplo 2.1.28. Em $(\mathbb{R}, \tau_p)$, e dado $a \in \mathbb{R}$, a família $\{]a - 1/n; a + 1/n[: n \in \mathbb{N}\}$ é uma base no ponto a.

2.1.3 Subespaço de um espaço topológico e produto topológico

Sejam (X, τ) um espaço topológico e $A \subset X$ e a família τ_A dos subconjunto de A constituída de todas as intersecções $A \cap V$ onde, $V \in \tau$.

Lema 2.1.29. *τ_A é uma topologia em A.*

Demonstração. Notemos que $\emptyset \cap A = \emptyset$ e $A \cap X = A$, deste modo, $\emptyset$ e A pertencem a τ_A.

Consideremos os elementos $U_i \in \tau_A$, $i \in I$. Existem $V_i \in \tau$ tal que $U_i = V_i \cap A$, $i \in I$. Temos que $V = \bigcup\limits_{i \in I} V_i \in \tau$ e $U = \bigcup\limits_{i \in I} U_i = \bigcup\limits_{i \in I} (V_i \cap A) = V \cap A$, tal que $U \in \tau_A$. Desta forma, qualquer união de elementos de τ_A é um elemento de τ_A.

Vejamos que $(V \cap A) \cap (U \cap A) = (U \cap V) \cap A$ e sendo U, V elementos de τ, então $(U \cap V) \cap A$ é um elemento de τ. Deste modo, se $U, V \in \tau_A$ então $U \cap V \in \tau_A$.

É provamos que a familia τ_A de subconjuntos de A satisfaz os axiomas **(T1)**, **(T2)** e **(T3)*** da topologia. Portanto, τ_A é uma topologia em A. $\square$

Definição 2.1.30. 1. O espaço topológico (A, τ_A) chama-se **subespaço** do espaço topológico (X, τ).

2. A familia τ_A diz-se **topologia induzida** da topologia τ no conjunto A.

Proposição 2.1.31. [6, p.10-15] *Um conjunto F é fechado no subespaço $A \subset X$ se e somente se $F = A \cap E$, onde Eé um conjunto fechado no espaço X.*

Teorema 2.1.32. *[14, p.20-24] Sejam $\mathcal{B}$ uma base no espaço topológico (X, τ) e $A \subset X$. A família de conjuntos $\mathcal{B}_A = \{G \cap A : G \in \mathcal{B}\} \backslash \{\emptyset\}$ é uma base da topologia induzida τ_A.*

Definição 2.1.33. Um subespaço $A \subset X$ chama-se **subespaço aberto (fechado)** se A é conjunto aberto (fechado, respectivamente) em X.

Definição 2.1.34. [13, p.16-17] Dados conjuntos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ define-se **produto cartesiano** destes conjuntos ao conjunto $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n = \{(x_1, x_2, \ldots x_n) : x_i \in X_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)\}$.

Definição 2.1.35. A **topologia do produto** no produto cartesiano $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ dos espaços topológicos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é a topologia que tem como base a colecção $\mathcal{B}$ de todos os conjuntos da forma $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$, onde U_i é um aberto em X_i, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.

A base $\mathcal{B}$ chama-se **base canónica** da topologia do produto.

Teorema 2.1.36. [8, p.17-18] *Se, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, $\mathcal{B}_i$ é uma base da topologia num espaço topológico X_i, então $\{V_1 \times V_2 \times ... \times V_n : V_i \in \mathcal{B}_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)\}$ é uma base para topologia do produto em $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$.*

Exemplo 2.1.37. Sejam $X = \{1, 2, 3\}$, $\tau_x = \{\emptyset, \{1\}, X\}$, e seja P o produto topológico de (X, τ_x) por (X, τ_x).

É conveniente fazer o esboço de P na forma de 3×3 matriz. Vamos usar as designações dos elementos de P, escrevendo ts em vez de (t, s). Então, a base canónica $\mathcal{B}$ da topologia do produto P é:

$$\mathcal{B} = \{\emptyset, \{1\} \times \{1\}, \{1\} \times X, X \times \{1\}, X \times X\} = \{\emptyset, \{11\}, \{11, 12, 13\}, \{11, 21, 31\}, X^2\}.$$

A topologia τ é constituído de todas a uniões dos elementos de $\mathcal{B}$, isto é:

$$\tau = \{\emptyset, \{11\}, \{11, 12, 13\}, \{11, 21, 31\}, \{11, 12, 13, 21, 31\}, X^2\}.$$

Exemplo 2.1.38. Seja o espaço topológico $\mathbb{R}$ com topologia padrão. A topologia do produto $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n} = \mathbb{R}^n$, chama-se **topologia padrão** ou **topologia euclidiana**[1], tem como

[1]Euclides (325—265 a.c.) — matemático Grego

base canónica a colecção de produtos $U_1 \times U_2 \times \dots U_n$ onde U_i São conjuntos abertos em $\mathbb{R}$ (para cada $i = 1, 2, \dots, n$).

Pelos Teorema 2.1.36 o Exemplo 2.1.24 a família de conjuntos $\{]a_i; b_i[\colon a_i, b_i \in \mathbb{R},\ a_i < b_i\ (i = 1, 2, \dots, n)\}$ é uma outra base do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.

por outro lado, a topologia padrão na recta $\mathbb{R}$ e a topologia induzida sobre a mesma recta como subespaço do espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$, associa-se a $\mathbb{R}$ ao subconjunto $\{(x, 0) \colon x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$.

Observação 2.1.39. Sempre no trabalho, quando não for escrita a condição especial, nos conjuntos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$ considera-se a topologia padrão, e nos seus subconjuntos a topologia induzida da padrão.

2.1.4 Aplicações continuas. Homeomorfismo

Sejam X e Y espaços topológicos com topologias τ_X e τ_Y, respectivamente. Seja $f : X \to Y$ uma função (aplicação).

Definição 2.1.40. [Continuidade em um ponto] A função f chama-se **continua no ponto** $x \in X$ se para cada vizinhança V de $f(x)$ existe uma vizinhança U de x tal que, $f(U) \subset V$.

Definição 2.1.41. [continuidade] A função f chama-se **contínua no conjunto** $M \subset X$ se f é contínua em todos os pontos de M.

A função f chama-se **contínua** se f é contínua em X.

Teorema 2.1.42. *[14, p.90-91] A função f é continua se e somente se a pré-imagem de qualquer conjunto aberto em Y é um conjunto aberto em X, isto é, $(\forall G \in \tau_Y)\ f^{-1}(G) \in \tau_X$).*

Corolário 2.1.43. *Seja $\mathcal{S}$ uma sub-base de Y (em particular, uma base de Y). A função f é continua se e somente $(\forall G \in \mathcal{S})$ o conjunto $f^{-1}(G)$ é aberto em X.*

Corolário 2.1.44. *A f é continua se a pré-imagem de qualquer conjunto fechado em Y é um conjunto fechado em X.*

Exemplo 2.1.45. Em $\mathbb{R}$, consideremos as topologia $\tau_+ = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a; \infty[\colon a \in \mathbb{R}\}$ e $\tau_- = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]-\infty; a[\colon a \in \mathbb{R}\}$ e $f(x) = -x^3$. Notemos que, f é continua como função de $(\mathbb{R}, \tau_+)$ em $(\mathbb{R}, \tau_-)$ visto que: $\forall a \in \mathbb{R},\ f^{-1}(]-\infty; a[) =]\sqrt[3]{-a}; \infty[\in \tau_+$.

Mas, f não é continua como função de $(\mathbb{R}, \tau_-)$ em $(\mathbb{R}, \tau_-)$, visto que: se $a \in \mathbb{R}$ temos $f^{-1}(]-\infty; a[) =]\sqrt[3]{-a}; \infty[\notin \tau_-$.

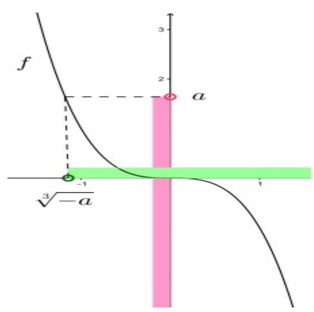

Figura 2.1: Para a função $f(x) = -x^3$ temos $f^{-1}(]-\infty; a[) =]\sqrt[3]{-a}; \infty[$

Proposição 2.1.46. *Se X é um espaço topológico munido da topologia discreta então para todo espaço topológico Y, qualquer função f de X em Y é continua.*

Demonstração. Sejam $f : X \to Y$ sendo que $\tau_X = \tau_d$ e τ_Y qualquer topologia. Portanto, segundo a definição τ_d é um sistema de todos os subconjuntos de X então $\forall G \in \tau_Y : f^{-1}(G) \in \tau_d$. □

Proposição 2.1.47. *A composição de duas funções continuas é uma função continua.*

Demonstração. Sejam (X, τ_X), (Y, τ_Y), (Z, τ_Z) espaços topológicos, as funções $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ são contínuas. Definamos a função $h : X \to Z$ por $h = g \circ f$. Seja $W \in \tau_Z$. Pelo Teorema 2.1.42 temos que $V = g^{-1}(W) \in \tau_Y$ e $U = f^{-1}(V) \in \tau_X$. Então,

$$h^{-1}(W) = (g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W)) = f^{-1}(V) = U \in \tau_X.$$

Aplicando de novo o Teorema 2.1.42 concluímos que a função h é contínua. □

Proposição 2.1.48. *Sejam dados espaços topológicos X, Y, Z e as funções $f : X \to Y$, $g : X \to Y$. A função "vectorial" $h : X \to Y \times Z$, definida por $h(x) = (f(x), g(x))$ é contínua se e somente se ambas funções coordenadas f e g são contínuas.*

Demonstração. Seja h contínua. Se U é um conjunto aberto em Y então, pela definição da topologia do produto temos que $U \times Z$ é aberto em $Y \times Z$. Pelo Teorema 2.1.42 o conjunto $h^{-1}(U \times Z)$ é aberto em X. Daqui e da igualdade

$$f^{-1}(U) = \{x \in X : f(x) \in U\} = \{x \in X : f(x) \in U \wedge g(x) \in Z\} = h^{-1}(U \times Z)$$

segue que o conjunto $f^{-1}(U)$ é aberto em X. Pelo Teorema 2.1.42, a função f é contínua. A continuidade de g demonstra-se de modo análogo.

Reciprocamente, sejam as funções f e g contínuas. Sejam U e V conjuntos abertos em Y e Z. respectivamente. Da continuidade de f e g, segue pelo axioma **T3** que o conjunto

$$h^{-1}(U \times V) = \{x \in X : f(x) \in U \wedge g(x) \in V\} = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$$

é aberto em X. Pela definição da topologia do produto e pela Proposição 2.1.43 a função h é contínua. □

Definição 2.1.49. Uma função $f : X \to Y$ bijectiva, continua e com inversa f^{-1} continua (uma função biunívoca e bicontínua) é chama-se de **homeomorfismo** dos espaço X e Y, isto é, X e Y são ditos **homeomorfos**.

Observação 2.1.50. Existe a aplicação bijectiva e continua que não são homeomorfos.

Exemplo 2.1.51. Seja a função $f : [0; 2\pi[\to S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$ definida por $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Notemos que, a função f:

a) é bijectiva (verifica-se diretamente a injectividade e sobrejetividade);
b) é continua visto que, para todo G aberto em S^1 o conjunto $f^{-1}(G)$ é aberto em $[0; 2\pi[$;
c) tem a função inversa f^{-1} que não é continua.

Proposição 2.1.52. *Seja $f : X \to Y$ uma função bijectiva e continua. f é um homeomorfismo se e somente se $G \in \tau_X \Rightarrow f(G) \in \tau_Y$ isto é, se a imagem de qualquer conjunto aberto é aberto.*

Teorema 2.1.53. *Seja $f : X \mapsto Y$ uma função bijectiva. São equivalentes as seguintes afirmações:*

(a) *A função f é um homeomorfismo;*

(b) *Um conjunto* $U \subset X$ *é aberto em* X *se e somente se* $f(U)$ *é aberto em* Y*;*

(c) *Um conjunto* $E \subset X$ *é fechado em* X *se e somente se* $f(E)$ *é fechado em* Y*;*

(d) $f(Int\,(A)) = Int\, f(A) \quad (\forall A \subset X)$.

Definição 2.1.54. Uma propriedade sobre espaços topológicos diz-se **propriedade topológica** se conserva sob os homeomorfismos. Isto é, se uma proposição é válida para um espaço topológico X então será também válida qualquer que seja espaço topológico homeomorfo a X.

2.1.5 Axiomas de enumerabilidade. Espaços de Hausdorff

Definição 2.1.55. Diz-se que um conjunto X é **enumerável no sentido próprio** se existe uma correspondência biunívoca entre X e o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

Diz-se que X é **enumerável** se X for finito ou enumerável no sentido próprio.

Proposição 2.1.56. [propriedades de conjuntos enumeráveis]

a) Se $A \subset B$ *e* B *é enumerável então* A *é enumerável;*

b) Se $A \subset B$ *e* A *não é enumerável então* B *não é enumerável;*

c) Uma união enumerável dos conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável;

d) Um produto cartesiano finito $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ *é um conjunto enumerável se e somente se cada um dos factores* X_i *é um conjunto enumerável;*

e) Se X *infinito é enumerável no sentido próprio então o conjunto* $P(X)$ *não é enumerável.*

Exemplo 2.1.57. Os conjuntos $\emptyset$, $\{a\}$, $\mathbb{N}$, o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros, o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, também $\mathbb{Q}^n$ são enumeráveis.

Qualquer intervalo aberto $]a; b[$ (também os intervalos semiabertos e fechados caso $a < b$), os conjuntos dos números irracionais, reais e também $\mathbb{R}^n$ são não enumeráveis.

Seja X um espaço topológico.

Definição 2.1.58. Diz-se que X satisfaz o $\mathbf{1^0}$ **axioma de enumerabilidade** se qualquer ponto de X tem uma base enumerável ou seja, se para cada elemento $x \in X$ existir uma base enumerável em x.

Definição 2.1.59. Diz-se que X satisfaz o $\mathbf{2^0}$ **axioma de enumerabilidade** se existir uma base enumerável da topologia em X, ou seja, se X tiver uma base enumerável.

Definição 2.1.60. Diz-se que um subconjunto $A \subset X$ é totalmente denso (denso em X) se $\overline{A} = X$.

Definição 2.1.61. Um espaço topologia X chama-se **separável** se existir subconjunto enumerável e totalmente denso.

Proposição 2.1.62. *Se um espaço topológico satisfaz o* 2^0 *axioma de enumerabilidade, então satisfaz o* 1^0 *axioma de enumerabilidade e é separável.*

Exemplo 2.1.63. $\mathbb{R}$ satisfaz o 2^0 axioma de enumerabilidade. De facto (ver o exemplo 2.1.24), $\mathcal{B}_0 = \{]r - 1/n; r + 1/n[:\ r \in \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N}\}$ é uma base da topologia padrão em $\mathbb{R}$, e a função $f(]r - 1/n; r + 1/n[) = (r, n)$ é uma correspondência biunívoca entre $\mathcal{B}_0$ e conjunto enumerável $\mathbb{Q} \times \mathbb{N}$.

Em particular, $\mathbb{R}$ é separável. Isto segue da Proposição 2.1.62 ou do facto que o conjunto enumerável $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.1.64. $\mathbb{R}^n$ satisfaz o 2^0 axioma de enumerabilidade. De facto, dos Teorema 2.1.36 e exemplo 2.1.24 segue que a família de conjuntos $\{V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n)\colon V_i \in \mathcal{B}_0\ (i = 1, 2, \ldots, n)\}$ (onde $\mathcal{B}_0$ é definido no exemplo anterior), é uma base enumerável de $\mathbb{R}^n$. Notemos também, que $\mathbb{R}^n$ é separável, e o conjunto enumerável $\mathbb{Q}^n$ é denso em $\mathbb{R}^n$.

Proposição 2.1.65. *Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma aplicação continua. Se X é separável então $f(X)$ com topologia induzida de Y também é separável.*

Definição 2.1.66. Diz-se que um espaço topológico X é **espaço de Hausdorff**[1], se quaisquer dois elementos $x, y \in X$, tem vizinhanças disjuntas, isto é, $(\forall x, y \in X)(\exists U \in \mathcal{O}(x))(\exists V \in \mathcal{O}(y)) : U \cap V = \emptyset$.

Exemplo 2.1.67. Os espaços $\mathbb{R}^n$ e qualquer espaço topológico com a topologia discreta τ_d são espaços de Hausdorff.

O espaço $(\mathbb{R}, \tau_t)$ onde τ_t é a topologia trivial, não é espaço de Hausdorff. $(\mathbb{R}, \tau)$ onde $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a; \infty[: a \in \mathbb{R}\}$ não é espaço de Hausdorff. De facto, seja $x, y \in \mathbb{R}$, $x_1 < y_2$ e $U \in \mathcal{O}(x)$ e $V \in \mathcal{O}(y)$, Temos que $U = \mathbb{R}$ ou $U =]a; \infty[$ onde $a < x$, e também $V = \mathbb{R}$ ou $V =]b; \infty[$ onde $b < y$, tal que $U \cap V \neq \emptyset$.

2.2 Espaços métricos

2.2.1 Noção de espaço métrico

Definição 2.2.1. [14] Sejam X um conjunto não vazio e $\rho(x, y)$ uma função real definida sobre $X \times X$. O conjunto X junto com a função ρ chama-se **espaço métrico** se a função ρ satisfaz às seguintes condições:

M1: ρ é não negativa $(\forall x, y \in X\ \rho(x, y) \geq 0)$, mais ainda, $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
M2: $\rho(y, x) = \rho(x, y)$ com $x, y \in X$; (simetria);
M3: $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ com $x, y, z \in X$ (propriedade triangular).

Neste caso a função $\rho(x, y)$ chama-se **métrica** ou **distância** no espaço métrico X. As condições **M1**, **M2** e **M3** chamam-se **axiomas de métrica**.

Exemplo 2.2.2. Seja X conjunto não vazio e com $x, y \in X$. Fazendo

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y; \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}. \tag{2.1}$$

Notemos que este, é um espaço métrico visto que cumpri com as axiomas de métrica e é denominado por espaço dos pontos **isolados** ou espaço **discreto**.

Exemplo 2.2.3. Conjuntos dos números reais $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ munido da distância:

$$\rho(x, y) = |x - y|. \tag{2.2}$$

Fornece-nos um espaço métrico. A métrica (2.2) chama-se **métrica padrão** em $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.2.4. O conjunto $\mathbb{R}^n$ munido da distância

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \tag{2.3}$$

[1]Felix Hausdorff (1868—1942) — matemático Alemão

fornece-nos um espaço métrico. A métrica (2.3) chama-se métrica **euclidiana** ou métrica **padrão** em $\mathbb{R}^n$. O $\mathbb{R}^n$ dotado da métrica euclidiana chama-se espaço euclidiano.

Definição 2.2.5. Dado um conjunto M em um espaço métrico (X, ρ) o **diâmetro** de M denotado por $diam(M)$ define-se por

$$diam(M) = \sup_{x,y \in M} \rho(x, y).$$

M chama-se **limitado** se $diam(M) < \infty$. O espaço (X, ρ) chama-se limitado se X como conjunto é limitado.

Observação 2.2.6. O espaço discreto X é limitado, pois $diam(X) = 1$. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ (em particular, o espaço $\mathbb{R}$ com a métrica padrão) não é limitados, pois $diam(\mathbb{R}^n) = \infty$.

Exemplo 2.2.7. Dado um conjunto $X \neq \emptyset$ e dado espaço métrico (Y, ρ) a totalidade de todas as funções $f : X \to Y$ tais que o conjunto $f(X) = \{f(x) \colon x \in X\}$ é limitado em Y, munido da distância

$$\rho_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} \rho(f(x), f(y)),$$

fornece um espaço métrico, que denotemos por $T(X, Y)$. O espaço métrico $T(X, Y)$ é limitado, se e somente se o espaço Y é limitado.

Definição 2.2.8. [[5],p.24] Num dado espaço métrico X com $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, denomina-se **bola aberta** $B(x, \varepsilon)$ ou $B_\varepsilon(x)$ de centro x e raio ε o conjunto dos pontos $y \in X$ que satisfazem a condição $\rho(x, y) < \varepsilon$. E denomina-se **bola fechada** $D(x, \varepsilon)$ ou $D_\varepsilon(x)$ o conjunto dos pontos $y \in X$ para os quais se cumpre $\rho(x, y) \leq \varepsilon$.

Exemplo 2.2.9. Seja $X = \mathbb{R}$ um espaço métrico, com $\rho(x, y) = |x - y|$ então: $B(x, \varepsilon) =]x - \varepsilon; x + \varepsilon[$, isto é, as bolas abertas são os intervalos abertos.

Exemplo 2.2.10. Seja o espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$. Geometricamente, uma bola aberta $B(x, \varepsilon)$ no plano cartesiano representa-se um círculo aberto com o centro no ponto $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ do raio ε.

De modo análogo, considerando o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, uma bola aberta $B(x, \varepsilon)$ no espaço cartesiano representa-se uma bola aberta no sentido da figura geométrica espacial, com o centro no ponto $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ do raio ε.

Notemos que o termo "bola" em qualquer espaço métrico é motivado desta interpretação geométrica no espaço $\mathbb{R}^3$.

Proposição 2.2.11. *[[11],p.14] Um conjunto em um espaço métrico é limitado se e somente se é contido em uma bola.*

Proposição 2.2.12. *As bolas abertas num espaço métrico formam uma base para uma topologia no espaço métrico, chamada de* ***topologia métrica****.*

Demonstração. Seja (X, ρ) um espaço métrico e $\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x) \colon x \in X,\ \varepsilon > 0\}$.

1. Claramente que, $\bigcup_{x \in X} B(x, 1) = X$.

2. Seja $z \in B(x, \varepsilon_x) \cap B(y, \varepsilon_y)$. Então $\varepsilon = \min\{\varepsilon_x - \rho(x, z), \varepsilon_y - \rho(y, z)\}$ é um número positivo e temos:

$$B(z, \varepsilon) \subset B(x, \varepsilon_x) \cap B(y, \varepsilon_y).$$

De facto se $w \in B(z, \varepsilon)$ então

$$\rho(w, x) \leq \rho(w, z) + \rho(z, x) < \varepsilon + \rho(z, x) \leq \varepsilon_x - \rho(z, x) + \rho(z, x) = \varepsilon_x,$$

logo, $w \in B(x, \varepsilon_x)$. De forma análogo, $w \in B(y, \varepsilon_y)$.

Segundo o Teorema 2.1.20 o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base duma topologia em X. □

Observação 2.2.13. Segundo Proposição 2.2.12 qualquer espaço métrico é um espaço topológico (com a topologia métrica). Deste modo, a qualquer espaço métrico podem ser aplicadas várias noções e proposições da teoria dos espaços topológicos.

Proposição 2.2.14. *[[14],p.13-14] Num espaço métrico X, qualquer bola aberta $B(x, \varepsilon)$ é um conjunto aberto e qualquer bola fechada $D(x, \varepsilon)$ é um conjunto fechado.*

Observação 2.2.15. Apesar da Proposição 2.2.14, num espaço métrico nem sempre é verdade que a bola fechada coincida com o fecho da bola aberta. Por exemplo, no espaço discreto $(\mathbb{R}, \tau_d)$ temos que $B_1(0) = \overline{B_1(0)} = \{0\}$ mas $D_1(0) = \mathbb{R}$, tal que $\overline{B_1(0)} \neq D_1(0)$.

Proposição 2.2.16. *Num espaço métrico X, qualquer que seja $x \in X$ a familia de conjuntos $\mathcal{B}(x) = \{B_\varepsilon(x) \colon \varepsilon > 0\}$ (a familia de bolas abertas com centro em x) é uma base no ponto x do espaço topológico X (com a topologia métrica).*

Proposição 2.2.17. *Seja X um espaço métrico, são válidas as seguintes proposições:*

1. *Um conjunto $A \subset X$ é aberto se, e somente se $(\forall x \in X)(\exists \varepsilon > 0)\ B(x, \varepsilon) \subset A$;*

2. *Um conjunto $D \subset X$ é não é aberto se, e somente se $(\exists x \in X)\ (\forall \varepsilon > 0)\ B(x, \varepsilon) \not\subset D$.*

Demonstração. Segue diretamente da Definição 2.1.9 e Proposição 2.2.16. □

A Proposição 2.2.17 para o espaço métrico $\mathbb{R}^2$ é ilustrada na figura 2.2.

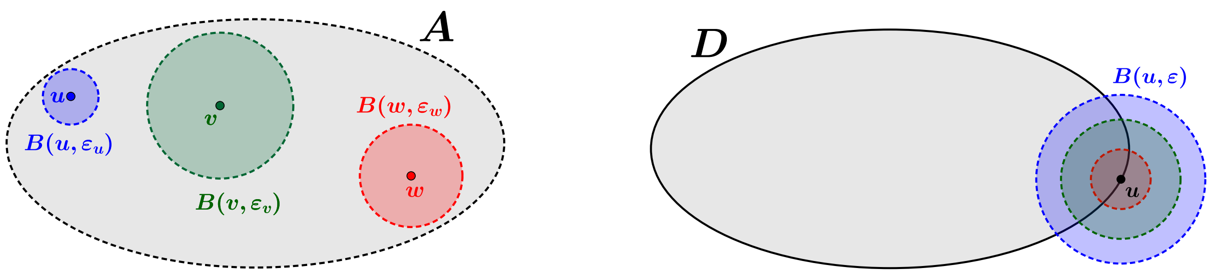

Figura 2.2: O conjunto aberto A e o conjunto não aberto D em $\mathbb{R}^2$

Proposição 2.2.18 ([3],p.26-27)**.** *Dado um espaço métrico X e um conjunto $M \subset X$ tem lugar a igualdade $diam(M) = diam(\overline{M})$.*

Corolário 2.2.19. *Um conjunto num espaço métrico é limitado se e somente se o seu fecho é limitado.*

2.2.2 Espaços topológicos metrizáveis

Definição 2.2.20. [[13],p.19-20] Um espaço topológico (X, τ) diz-se **metrizável** se existir uma métrica ρ em X, que gera a topologia τ.

Exemplo 2.2.21. O espaço topológico $(\mathbb{R}, \tau_d)$ é um espaço metrizável, onde a topologia discreta τ_d é gerada pela métrica discreta (2.1).

Exemplo 2.2.22. O espaço topológico $(\mathbb{R}, \tau_p)$ é um espaço metrizável, onde a topologia padrão τ_p é gerada pela métrica padrão (2.2).

Exemplo 2.2.23. O espaço topológico $(\mathbb{R}^n, \tau_p)$ é um espaço metrizável, onde a topologia padrão (euclidiana) τ_p é gerada pela métrica euclidiana (2.3).

Na subsecção anterior foi mencionado que qualquer espaço métrico é um espaço topológico (com a topologia métrica). No entanto, não é todo espaço topológico metrizável! Apresentemos um exemplo correspondente.

Exemplo 2.2.24. O espaço topológico (X, τ_t) não é metrizável, se X tem mais do que um elemento.

Demonstração. Suponhamos que (X, τ_t) é metrizável, isto é, existe uma métrica ρ que gera a topologia trivial τ_t.

Consideremos dois elementos diferentes x e y que pertencem ao X e consideremos $\varepsilon > 0$ satisfazendo a condição $0 < \varepsilon < \rho(x, y)$. Consideremos a bola

$$B(x, \varepsilon) = \{z \in X : \rho(x, z) < \varepsilon\}.$$

Como $\rho(x, x) = 0 < \varepsilon$, então x pertence à $B(x, \varepsilon)$, ou seja, $B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ e por ser uma topologia trivial, $B(x, \varepsilon) = X$.

Por outro lado, temos que $\varepsilon < \rho(x, y)$ então y não pertence à $B(x, \varepsilon)$, ou seja, y não pertence ao X, o que é um absurdo, pois y é elemento de X.

Portanto, o espaço (X, τ_t) não é metrizável. □

Proposição 2.2.25 ([5],p.31)**.** *Qualquer espaço metrizável satisfaz o 1^0 axioma de enumerabilidade e é um espaço de Hausdorff.*

Proposição 2.2.26. *Um espaço metrizável é separável, se e somente se satisfaz o 2^0 axioma de enumerabilidade.*

2.2.3 Limite de sucessões em espaços métricos. Métricas equivalentes

Sejam (X, ρ) um espaço métrico.

Definição 2.2.27. [14] Seja $\{x_n\}$ uma sucessão de elementos de X. Diz-se que a sucessão $\{x_n\}$ é **convergente** para algum $x \in X$ se

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n \geq N) : \rho(x_n, x) < \varepsilon.$$

Com essa definição obtemos as seguintes proposições:

Proposição 2.2.28. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *se e somente se a sucessão numérica* $\{\rho(x_n, x)\}$ *converge a zero, ou seja* $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x, x_n) = 0$.

Proposição 2.2.29. *O limite de uma sucessão convergente é único.*

Proposição 2.2.30. *Um ponto x pertence ao fecho de um subconjunto A de X se e só se existe uma sucessão dos pontos de A convergindo para x.*

Corolário 2.2.31. *Um conjunto $M \subset X$ é fechado se e somente se para toda a sucessão dos pontos de M convergindo em X o limite pertence ao conjunto M.*

Proposição 2.2.32. *Sejam d e ρ duas métricas num conjunto não vazio X, que geram as topologias $\tau(d)$ e $\tau(\rho)$, respectivamente. São equivalentes as seguintes condições:*

(a) *Qualquer sucessão convergente em relação à métrica d converge em relação à métrica ρ para mesmo limite, isto é,* $[d(x_n, x) \to 0] \Rightarrow [\rho(x_n, x) \to 0]$*;*

(b) *A topologia $\tau(d)$ é mais forte do que $\tau(\rho)$, isto, é,* $\tau(d) \supset \tau(\rho)$*;*

(c) *a aplicação $i : (X, d) \to (X, \rho)$ definida por $i(x) = x$ $(x \in X)$ é contínua.*

Definição 2.2.33. A métricas d e ρ num conjunto não vazio X chamam-se **equivalentes** (designação $d \sim \rho$) se qualquer sucessão convergente em relação a uma destas métricas converge em relação à outra para o mesmo limite, isto é:

$$[d(x_n, x) \to 0] \Leftrightarrow [\rho(x_n, x) \to 0].$$

Proposição 2.2.34. *Duas métricas em um conjunto não vazio X são equivalentes se e somente se elas geram a mesma topologia.*

A demonstração desta proposição segue diretamente da Proposição 2.2.32. Veja em [[5],p.35]

2.2.4 Funções contínuas e uniformemente contínuas em espaços métricos

Sejam (X, d) e (Y, ρ) dois espaços métricos e $f : X \to Y$ uma função (aplicação). Os conceitos de continuidade de f num ponto e de continuidade são dadas nas Definições 2.1.40 e 2.1.41, e são aplicadas para topologias métricas correspondentes. No entanto, caso dos espaços métricos, o conceito de continuidade no ponto admite uma descrição equivalente em termos das métricas:

Teorema 2.2.35. *Seja $x \in X$. São equivalentes as seguintes condições:*

(a) *A função f é contínua no ponto x;*

(b) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall u \in X, d(u, x) < \delta) : \rho(f(u), f(x)) < \varepsilon$*;*

(c) *A pré-imagem de qualquer bola aberta com centro no ponto $f(x)$ do espaço Y contém uma bola aberta com centro x no X;*

(d) *Se $x_n \to x$ então $f(x_n) \to f(x)$.*

Proposição 2.2.36. *A métrica $d(\cdot, \cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.*

Definição 2.2.37. Uma função $f : X \to Y$ diz-se **uniformemente contínua** se

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall u, v \in X, d(u, v) < \delta) \; : \; \rho(f(u), f(v)) < \varepsilon.$$

Teorema 2.2.38. *Qualquer função uniformemente contínua em espaços métricos é contínua.*

Observação 2.2.39. Existem funções contínuas que não são uniformemente contínuas. Tais funções são, por exemplo, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g :]0; 1] \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^{-1}$.
A continuidade é evidente, mas não são uniformemente continua, como podemos notar, a inclinação dos gráficos dessas funções não é limitada.

2.2.5 Espaço métrico completo

Seja X um espaço métrico com a métrica ρ.

Definição 2.2.40. ([9],[8]) Uma sucessão $\{x_n\}$ de pontos de X chama-se **sucessão de Cauchy**[1] se

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq N) : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon \tag{2.4}$$

Proposição 2.2.41. *Toda sucessão convergente é uma sucessão de Cauchy.*

Proposição 2.2.42. *Toda a sucessão de Cauchy é limitada*

Demonstração. Seja $\{x_n\}$ uma sucessão de Cauchy em X. Escolhemos $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que seja $\rho(x_n, x_m) \leq 1$ para todos m, n naturais que são maiores o iguais a n_0. É claro que

$$R = \max\{\rho(x_n, x_{n_0})\colon n = 1, 2, \ldots, n_0 - 1\} < \infty \quad \text{e} \quad \sup\{\rho(x_n, x_{n_0})\colon n = n_0, n_0 + 1, \ldots\} \leq 1.$$

Então, $\forall m, n \in \mathbb{N}$

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x_{n_0}) + \rho(x_{n_0}, x_m) \leq 2R + 2 < \infty,$$

tal que $diam\{x_n\} < \infty$. □

Definição 2.2.43. [[14],p.37] Diz-se que um espaço métrico X é **completo** quando toda a sucessão de Cauchy em X é convergente.

Proposição 2.2.44. *Se X for um espaço métrico completo e $M \subset X$, então o sub-espaço métrico M é completo se e só se M for fechado de X*

Demonstração. Se M for fechado de X e se $\{x_n\}$ for uma sucessão de Cauchy de elementos de M, então uma vez que é um espaço métrico completo $\{x_n\}$ converge para algum $x \in X$. Como M é fechado, pelo Corolário 2.2.31 $x \in M$. Então a sucessão de Cauchy $\{x_n\}$ no subespaço M é convergente. Pela Definição, o subespaço M é completo.

Reciprocamente, seja M é completo, e $\{x_n\}$ uma sucessão dos pontos de M convergindo a um $x \in X$. Pela Proposição 2.2.41 $\{x_n\}$ é uma sucessão de Cauchy em X, logo também em M. Como M é completo $\{x_n\}$ converge em M a um $x^* \in M$. Neste caso $x_n \to x^*$ em X, pela unicidade do limite (a Proposição 2.2.29) $x = x^* \in M$. Pelo Corolário 2.2.31 o conjunto M é fechado em X. □

2.3 Espaços lineares

Nesta e na próxima secção, serão apresentados alguns conceitos básicos relacionados com a teoria dos espaços lineares e espaços normados. Em primeiro lugar, será definido o espaço linear e tipos de conjuntos no espaço linear, depois iremos apresentar os conceitos básicos sobre os espaços normados e espaços de Banach, e também os exemplos básicos de espaços funcionais que são de Banach. As referências básicas utilizadas nesse são [1], [6], [8] e [10].

Vamos sempre usar a notação $\mathbb{P}$ para o corpo dos números reais $\mathbb{P} = \mathbb{R}$ ou para o corpo de números complexos $\mathbb{P} = \mathbb{C}$.

[1] Augustin-Louis Cauchy (1789—1857) — matemático Francês

2.3.1 Noção do espaço linear e exemplos

Definição 2.3.1. [[8],p. 91] Seja L um conjunto não vazio. Denomina-se **espaço linear** ou **vectorial** sobre um corpo $\mathbb{P}$ o conjunto L que goza as seguintes proposições:

1. Para quaisquer elementos de L, x e y, existe um elemento $x+y$ de L, chama-se **soma** de x e y, sendo que $\forall x, y, z \in L$ se cumprem as seguintes condições:
   (a) $x + y = y + x$;
   (b) $(x + y) + z = x + (y + z)$;
   (c) Existe um único elemento de L, chama-se elemento nulo de L e denotado por θ tal que $\theta + x = x$;
   (d) Existe um único $-x$ que pertence á L tal que $x + (-x) = \theta$.

2. Para qualquer x que pertence ao conjunto L e qualquer α que pertence ao $\mathbb{P}$, existe um único $\alpha \cdot x$ pertencente à L chamado **produto** de x por número α, sendo que $\forall x, y \in L$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{P}$ se cumprem as seguintes condições:
   (a) $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$;
   (b) $1 \cdot x = x$ (1 é unidade do corpo $\mathbb{P}$);
   (c) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ (primeira lei distributiva);
   (d) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ (segunda lei distributiva).

Exemplo 2.3.2. O conjunto $\mathbb{P}^n$ munido das operações:
soma: $x + y = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$ e
produto com um número: $\alpha x = \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$,
constituem um espaço linear sobre corpo $\mathbb{P}$.

Exemplo 2.3.3. O conjunto $\mathbb{P}^\infty$ das sucessões de numéricas $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, onde $x_n \in \mathbb{P}$ munidos das operações:
soma: $x+y = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) + (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n, \ldots)$ e
produto com um número: $\alpha x = \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n, \ldots)$,
constituem um espaço linear sobre corpo $\mathbb{P}$.

Exemplo 2.3.4. O conjunto $C[a, b]$ das funções contínuas $x : [a; b] \to \mathbb{R}$, dotado das operações algébricas usuais:

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t), \qquad (cx)(t) = c \cdot x(t), \qquad (\forall t \in [a; b]),$$

para todos $x, y \in C[a, b]$ e $c \in \mathbb{R}$, é um espaço linear sobre $\mathbb{R}$. Nesse espaço, o elemento nulo é a função $\theta(t) = 0, \forall t \in [a; b]$.

2.3.2 Subespaço linear. Base. Dimensão

Definição 2.3.5. [[14],p.98] Um subconjunto $M \neq \emptyset$ do espaço linear L sobre $\mathbb{P}$ chama-se **subespaço linear** de L se o conjunto M é dotado das operações algébricas do espaço L for mesmo um espaço linear sobre $\mathbb{P}$, ou seja, se $x_1, x_2 \in M$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{P}$ então $c_1 x_2 + c_2 x_2 \in M$.

Proposição 2.3.6. *Qualquer subespaço linear de um espaço linear L contém o elemento zero θ de L.*

Demonstração. Seja M um subespaço linear de L. Então existe pelo menos um elemento x que pertence a M. Pela Definição do subespaço linear $\theta = x - x \in M$. □

Proposição 2.3.7. *Se M e N são subespaços lineares de um espaço linear L, então o conjunto dos elementos que constituem a intersecção $M \cap N$ é um subespaço linear de L.*

Demonstração. Sejam x e y dois elementos quaisquer da intersecção $M \cap N$ e α e β dois escalares arbitrários. $\alpha x + \beta y$ pertencerá ao subespaço M e também ao subespaço N, logo pertencerá ao subespaço $M \cap N$. Portanto, $M \cap N$ é um subespaço linear de L. □

Exemplo 2.3.8. Seja o espaço linear $\mathbb{R}^2$. O subconjunto

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2023x\}$$

é um subespaço linear de $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 2.3.9. O subconjuntos l_∞, c e c_0 do espaço linear $\mathbb{P}^\infty$ constituídos das sucessões numéricas $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ que são limitadas, convergentes e convergentes a 0, respectivamente, são subespaços lineares de $\mathbb{P}^\infty$. Mais ainda, $c_0 \subset c \subset l_\infty \subset \mathbb{P}^\infty$ é uma cadeia de espaços lineares em que cada espaço é um subespaço linear de qualquer espaço que fica à direita dele.

Seja L um espaço linear sobre o corpo $\mathbb{P}$.

Definição 2.3.10. [[8],p.98] Os elementos $x_{1,}, x_2, \ldots, x_m$ de L são ditos **linearmente dependentes** se existir uma família de números $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{P}$ não todos nulos tais que

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m = 0 \tag{2.5}$$

Os elementos $x_{1,}, x_2, \ldots, x_m$ são ditos **linearmente independentes** se de (2.5) implica $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$,

Um conjunto $M \subset L$ é dito **linearmente independente** se os elemento de qualquer subconjunto finito de M são linearmente independentes.

Um elemento de L da forma $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m$ chama-se **combinação linear** dos elementos $x_{1,}, x_2, \ldots, x_m$ de L.

Definição 2.3.11. Dados subconjunto $M \subset L$ o conjunto de todas as combinações lineares (finitas) formados por elementos de M, chama-se **subespaço linear gerado** por M e denota-se por $Sp(M)$.

Teorema 2.3.12. *Dado $M \subset L$, o conjunto $Sp(M)$ é um subespaço linear de L e $Sp(M) \supset M$. Mas ainda, $Sp(M)$ é intersecção de todos os subespaços lineares que contêm conjunto M.*

Definição 2.3.13. O subconjunto M de L chama-se **base** de L se M é linearmente independente e $Sp(M) = L$

Proposição 2.3.14. *Todas as bases de L contêm o mesmo número de elementos (incluindo o caso possível de elementos infinitos).*

Definição 2.3.15. O numero de‘ elementos de uma base de L (o que, pela Proposição 2.3.14, é o mesmo para cada base), chama-se **dimensão** de L, e denota-se por $\dim L$.

Caso $\dim L < \infty$ diz-se que L é de **dimensão finita**.

Caso $\dim L = \infty$ diz-se que L é de **dimensão infinita**.

Observação 2.3.16. Um espaço linear L com $\dim L = 0$ consiste em um só elemento zero. Mas qualquer espaço linear L com $\dim L > 0$ contém infinitos elementos. No trabalho sempre vamos supor que todos os espaços lineares (a partir da seguinte secção, também todos os espaços normados e de Banach) têm a dimensão positiva: $\dim L > 0$.

Teorema 2.3.17. *Todos espaços lineares sobre $\mathbb{P}$ de dimensão $n \in \mathbb{N}$ são isomorfos entre si, em particular, são isomorfos ao $\mathbb{P}^n$.*

Proposição 2.3.18. *L é de dimensão infinita, se e somente se $\forall n \in \mathbb{N}$ existem n elementos linearmente independentes.*

Exemplo 2.3.19. Os espaços lineares $\mathbb{P}^\infty$, l_∞, c, c_0 e $C[a,b]$ são de dimensão infinita.

Em c_0 (mesmo que em c, l_∞ e $\mathbb{P}^n$), para todo $n \in \mathbb{N}$, os elementos $e_1, e_2, \ldots, e_n$ são linearmente independentes, onde $e_k = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1}, 1, 0, 0, \ldots)$ $(k \in \mathbb{N})$.

Em $C[a,b]$, para todo $n \in \mathbb{N}$, os elementos $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são linearmente independentes, onde $p_k(t) = t^{k-1}$ $(t \in [a;b],\ k \in \mathbb{N})$.

2.4 Espaços normados e espaços de Banach

Nesta secção iremos apresentar os conceitos básicos dos espaços normado assim como os respectivos exemplo. Também, iremos definir os espaços de Bannach a partir dos espaços normados completos, junto com respetivos exemplos.

2.4.1 Noções e propriedades básicas

Definição 2.4.1. [[8],p.118] Seja L um espaço linear sobre corpo $\mathbb{P}$. Um funcional $\|\cdot\| : L \to \mathbb{P}$, chama-se **norma** se satisfaz as seguintes condições:

(N1): $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$, $(\forall x \in L)$;
(N2): $\|\alpha \cdot x\| = \mid \alpha \mid \cdot \|x\|$ $(\forall x \in L, \forall \alpha \in \mathbb{P})$;
(N3): $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $(\forall x, y \in L)$ (propriedade triângular).

As condições (N1), (N2) e (N3) denominam-se por axiomas da norma.

Definição 2.4.2. Um espaço linear L munido de uma norma $\|\cdot\|$ denomina-se **espaço normado**.

Proposição 2.4.3. *Qualquer espaço normado X é um espaço métrico dotado da métrica associada à norma $\rho(x,y) = \|x - y\|$.*

Demonstração. Sejam $x, y, z \in X$ elementos quaisquer. Pelo axioma (N1) da norma temos:

$$\rho(x,y) \geq 0, \qquad x = y \Leftrightarrow x - y = \theta \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow \rho(x,y) = 0.$$

Deste modo, ρ satisfaz o axioma **M1** da métrica.

Pelo axioma (N2) da norma

$$\rho(x,y) = \|x - y\| = \|-(y - x)\| = \mid -1 \mid \|y - x\| = \|y - x\| = \rho(y,x),$$

tal que ρ satisfaz o axioma **M2**.

Finalmente, usando a propriedade triangular (N3) obtemos

$$\rho(x,z) = \|x-z\| = \|x-y+y-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| = \rho(x,y) + \rho(y,z),$$

tal que ρ satisfaz o axioma **M3**.

Portanto, ρ é uma métrica tal que (X,ρ) é um espaço métrico. □

Observação 2.4.4. Um espaço normado constitui um dos objecto matemático muito interessante subponto de vista da ligação das propriedades algébricas e propriedades topológicas. Por isso, em um espaço normado são aplicáveis todas as noções e proposições da teoria dos espaço lineares e da teoria dos espaços métricos.

Por exemplo, em um espaço normado, uma bola aberta com centro en $x \in X$ do raio $\varepsilon > 0$ é o conjunto

$$B_\varepsilon(x) = B(x,\varepsilon) = \{y \in X : \|y-x\| < \varepsilon\}.$$

É claro que qualquer espaço normado X não é limitado (segundo condição $\dim X > 0$ declarado na observação 2.3.16), mas é união enumerável das bolas limitadas $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} B(\theta,n)$ onde θ é elemento zero de X.

Em um espaço normado, uma sucessão $\{x_n\}$ converge para x se e somente se

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) : \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Proposição 2.4.5. *Operações algébricas em um espaço normado X são continuas. Isto é, caso $x, y, x_n, y_n \in X$ e $\alpha, \alpha_n \in \mathbb{P}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ são válidas as seguintes proposições:*

1. *se $x_n \to x$ e $y_n \to y$ então $x_n + y_n \to x + y$*
2. *$x_n \to x$ e $\alpha_n \to \alpha$ então $\alpha_n x_n \to \alpha x$.*

Demonstração. 1. Sejam $x_n \to x$ e $y_n \to y$, isto é,

(a) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_1 \in \mathbb{N})$ $(\forall n \geq N_1)$ será que $\|x_n - x\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$;

(b) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_2 \in \mathbb{N})$ $(\forall n \geq N_2)$ será que $\|y_n - y\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$;

Vejamos que

$$\|x_n + y_n - (x+y)\| = \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N}, N = \min\{N_1, N_2\}), \forall n \geq N \text{ tal que } \|x_n + y_n - (x+y)\| < \varepsilon.$$

Deste modo, $x_n + y_n \to x + y$. Com isto, a soma é contínua.

2. Sejam $x_n \to x$ e $\alpha_n \to \alpha$.

(a) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_1 \in \mathbb{N})$ $\forall n \geq N_1$ será que $\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2M}$, onde $M = \max\{\|x\|, 1\}$;

(b) Como α_n converge, então, existe $r > 0$ tal que $\mid \alpha_n \mid \leq r$, deste modo,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq N_0) \text{ será que } \mid \alpha_n - \alpha \mid < \frac{\varepsilon}{2r}.$$

Então, $\forall n \geq N = \max\{N_1, N_0\}$ temos

$$\|\alpha_n x_n - \alpha x\| = \|\alpha_n x_n - \alpha_n x + \alpha_n x - \alpha x\| = \|\alpha_n(x_n - x) + (\alpha_n - \alpha)\|$$
$$\leq \mid \alpha_n \mid \|x_n - x\| + \mid \alpha_n - \alpha \mid \|x\| \leq r\frac{\varepsilon}{2r} + \frac{\varepsilon}{2\|x\|}\|x\| = \varepsilon.$$

demonstramos que $\alpha_n x_n \to \alpha x$. Portanto, o produto por escalares é contínuo. □

Diferentemente do que foi dito na Observação 2.2.15 para espaços métricos arbitrários, para os espaços normados tem lugar a seguinte proposição.

Proposição 2.4.6 ([8],p.102). *Em qualquer espaço normado X, quais quer que sejam $x \in X$ e $\varepsilon > 0$ tem lugar $\overline{B(x,\varepsilon)} = D(x,\varepsilon)$.*

Definição 2.4.7. Um espaço normado completo (veja a Definição 2.2.43) chama-se **espaço de Banach**.

Definição 2.4.8. Seja X um espaço normado. Um conjunto $Y \subset X$ chama-se **subespaço** do espaço normado X se Y é um subespaço linear de X e é um conjunto fechado em X.

Proposição 2.4.9. *Um subespaço linear Y de um espaço de Banach X é um espaço de Banach se e somente se Y é um subespaço de X.*

Demonstração. Segue directamente da Definição 2.4.7 e da Proposição 2.2.44. □

2.4.2 Exemplos de espaços normados e de Banach

1. Consideremos o espaço real n-dimensional $\mathbb{R}^n$ e o espaço complexo n-dimensional $\mathbb{C}^n$ com as operações de soma de vectores e produto de vectores com números definidos no exemplo 2.3.2. Para cada p real fixo, satisfazendo a condição $1 \leq p < \infty$, esses espaços lineares munidos da norma
$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{se} \quad 1 \leq p < \infty \\ \max\limits_{i=1,2,\ldots n} |x_i| & \text{se} \quad p = \infty \end{cases}$$
são espaços normados completos, isto é, espaços de Banach, denomina-se por $\mathbb{R}^n_p$ ou $\mathbb{C}^n_p$.

   Caso $p = 2$ a norma $\|\cdot\|_2$ chama-se **norma euclidiana** que corresponde a métrica euclidiana definida no exemplo 2.2.4 (caso $\mathbb{P} = \mathbb{R}$). Para espaços euclidianos vamos usar a notação mais simples $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n_2$.

   Pelos Teorema 2.4.45 e a Proposição 2.4.43, todos os espaços normados de dimensão n sobre o corpo $\mathbb{P}$ são espaços de Banach e são isomorfos ao espaço euclidiano $\mathbb{P}^n$.

   Na figura 2.3 são representadas no plano cartesiano as bolas $B(\theta,\varepsilon)$ com centro em $\theta = (0,0)$ em espaços $\mathbb{R}^2_p$, por alguns $p \in [1;\infty]$.

2. Consideremos os subespaços lineares diferentes do espaço linear $\mathbb{R}^\infty$, considerados no Exemplo 2.3.9:

   (a) $m = l_\infty$ consiste em sucessões é limitadas $x = (x_1, x_2, \ldots)$, isto é, tais que $(\exists K > 0)$ $(\forall n \in \mathbb{N}) : \mid x_n \mid \leq K$;

   (b) c consiste em sucessões convergentes;

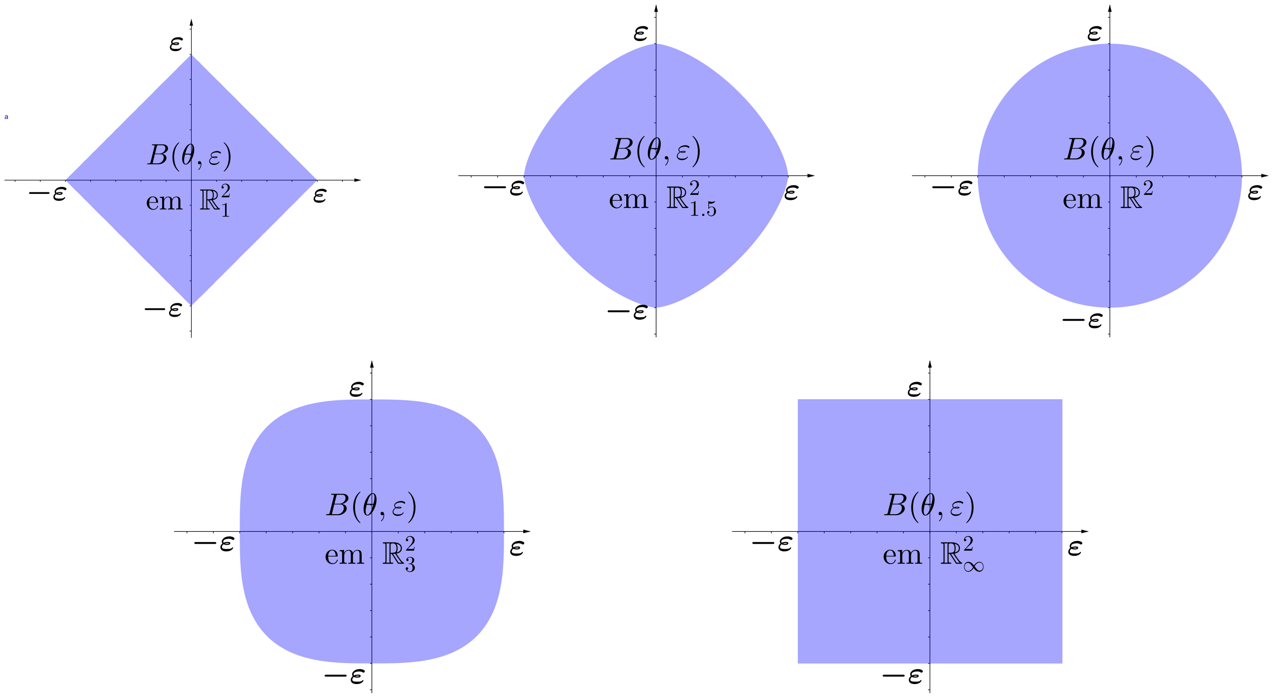

Figura 2.3: A bola $B(\theta,\varepsilon)$ nos espaços $\mathbb{R}^2_1$, $\mathbb{R}^2_{1.5}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2_3$ e $\mathbb{R}^2_\infty$

(c) c_0 conjunto das sucessões convergente a zero;

O espaços lineares m, c, c_0 munidos com a norma

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \quad \text{onde} \quad x = (x_1, x_2, \ldots).$$

são espaços de Banach. Notemos que c_0 é um subespaço de c e c é um subespaço de m.

3. O espaço l_p $(1 \leq p < \infty)$ das sucessções sujeitas à condição $\sum_{n=1}^{\infty} \mid x_n \mid^p < \infty$ é um espaço de Banach munido com a norma

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.6}$$

Proposição 2.4.10. *[14] Se $1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty$ então $l_{p_1} \subset l_{p_2}$, sendo que l_{p_1} é denso em l_{p_2}, isto é o fecho do conjunto l_{p_1} em l_{p_2} coincide com l_{p_2}.*

4. O conjunto $C[a,b]$ das funções reais continuas no intervalo $[a;b]$ com a norma

$$\|x\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} \mid x(t) \mid$$

É um espaço de Banach.

5. $C_{(p)}[a,b](1 \leq p < \infty)$ das funções reais continuas no intervalo $[a;b]$ mas com a norma

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

é um espaço normado não completo ou seja, não é um espaço de Banach.

6. A definição dos espaços das funções integráveis exige o conhecimento os elementos básicos da teoria de medida e do integral de Lebesgue, que podem ser encontradas em [1] e [8]. Todos integrais abaixo são considerados no sentido de Lebesgue.

   Definição 2.4.11. [11] Seja $1 \leq p < \infty$. Uma função $x : [a;b] \to \mathbb{R}$ diz-se **te grau p integrável** se a função $|x|^p$ é integrável a Lebesgue em $[a;b]$, isto é,

   $$\int_a^b |x(t)|^p \, dt < \infty.$$

   O conjunto constituído pelas classes de equivalência (em relação à medida de Lebesgue em $[a,b]$) das funções de grau p integráveis denotamos por $L_p[a,b]$.

   Teorema 2.4.12. *$L_p[a,b]$ é um espaço linear com operações algébricas usuais, e, dotado da norma*

   $$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.7}$$

   é um espaço de Banach.

   Proposição 2.4.13. *Se $1 \leq p < \infty$, então o espaço normado $C_{(p)}[a,b]$ (mas precisamente, o espaço das classes das funções equivalentes a uma função contínua em relação à medida de Lebesgue em $[a;b]$), é um subespaço linear de $L_p[a,b]$ que é denso em $L_p[a,b]$.*

   Proposição 2.4.14. *Se $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$, então $L_{p_2}[a,b]$ é um subespaço linear de $L_{p_1}[a,b]$ que é denso em $L_{p_1}[a,b]$.*

2.4.3 Operadores lineares em espaços normados

Na Análise Funcional é tradicional uma função (aplicação) usar o termo sinónimo operador, e designar os operadores, como regra, por linear maiúsculas. Apresentemos uma breve revisão da teoria dos operadores lineares em espaços normados, limitando por tais elementos da teoria que são necessários para apresentação dos resultados do trabalho. Para conhecimento mais profundo encaminhando ao leitor para manuais [1], [6], [8] e [10].

Sejam X, Y, e Z conjuntos não vazios.

Definição 2.4.15. Um **operador** F com domínio X e com contra domínio Y (designação $F : X \to Y$) é uma função (aplicação) de X em Y, isto é uma regra ou algoritmo, pelo que a qualquer elemento $x \in X$ corresponder exactamente um elemento $y = Fx \in Y$.

Subconjunto do contradomínio Y definido por $Im\, F = F(X) = \{Fx : x \in X\}$ chama-se **imagem** do operador F.

A composição $H = G \circ F$ de dois operadores $F : X \to Y$ e $G : Y \to Z$ chama-se **produto** dos operadores F e G, e denota-se por $H = GF$.

Exemplo 2.4.16. [[10],p.83] A expressão

$$(Fx)(t) = \int_0^1 tx(s)ds + x(t), \qquad t \in [0;1]. \tag{2.8}$$

define um operador $F : C[0,1] \to C[0,1]$. Notemos que o valor do operador F no ponto $w \in C[0,1]$ definido por $w(t) = 3t^2$, $t \in [0;1]$ é o elemento $Fw \in C[0,1]$ definido por $(Fw)(t) = 3t^2 + t$, $t \in [0,1]$.

Definição 2.4.17. 1. Um operador $F : X \to Y$ chama-se **injectivo** se $[x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2] \Rightarrow [F_{x_1} \neq F_{x_2}]$.

2. Um operador $F : X \to Y$ chama-se **sobrejectivo** se $Im\, F = Y$.

3. Um operador injectivo e sobrejectivo chama-se **bijectivo**.

4. O operador $I : X \to X$ definido por $I_X x = x$, $x \in X$, chama-se **operador de identidade** em X.

5. Um operador $F : X \to Y$ chama-se **invertível** se existe um operador $F^{-1} : Y \to X$ tal que $F^{-1}F = I_X$ e $FF^{-1} = I_Y$. Neste caso o operador F^{-1} denomina-se **inverso** do operador X.

Proposição 2.4.18. *[8] Para um operador $F : X \to Y$ são equivalentes as seguintes proposições:*

1. *F é bijectivo se e somente se F é invertível.*

2. *Para F é invertível então o operador inverso F^{-1} é único e também é invertível, tal que $(F^{-1})^{-1} = F$.*

Exemplo 2.4.19. [[10],p.87] 1. Os exemplos dos operadores invertíveis são o operador de identidade I_X e o operador F definido por (2.8). Os seus inversos, como é fácil ver são operadores $I_X^{-1} = I_X$ e $F^{-1} : C[0,1] \to C[0,1]$ definido por

$$(F^{-1}x)(t) = x(t) - \frac{2}{3}\int_0^1 tx(s)ds), \qquad t \in [0;1].$$

2. O operador $F_1 : C[0,1] \to C[0,1]$ definido por $(F_1 x)(t) = tx(0)$ não é injectivo nem sobrejectivo.

3. O operador $F_2 : C[0,1] \to C[0,1]$ definido por $(F_2 x)(t) = tx(t)$ é injectivo mas não é sobrejectivo. sobrejectivo.

4. O operador $F_3 : l_\infty \to l_\infty$ definido por $(F_3 x)(t) = (x_2, x_3, \ldots$ onde $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_\infty$ é sobrejectivo mas não é injectivo.

Sejam, agora X e Y espaços lineares sobre o corpo $\mathbb{P}$.

Definição 2.4.20. Um operador $A : X \to Y$ chama-se **linear** se

$$A(c_1 x_1 + \beta x_2) = c_1 A x_1 + c_2 A x_2 \qquad (\forall x, y \in X, \forall c_1, c_2 \in \mathbb{P})$$

Exemplo 2.4.21. O operador de identidade I_X é um operador linear. Os operadores F, F_i, F_2, F_3 dos Exemplos 2.4.16 e 2.4.19, como é fácil verificar, são lineares. Mas um exemplo do operador linear é operador nulo $O : X \to Y$ definido por $Ox = \theta_Y$ $(x \in X)$ onde θ_Y é elemento zero de Y.

Definição 2.4.22. Dado um operador linear $A : X \to Y$ o conjunto $\ker A = \{x \in X \colon Ax = \theta_Y\}$ chama-se **núcleo** do operador A.

Proposição 2.4.23. *Dado um operador linear $A : X \to Y$, São válidas as seguintes proposições:*

1. *$A\theta_X = \theta_Y$;*

2. *O núcleo* $\ker A$ *e a imagem* $Im\, A$ *são subespaços lineares dos espaços X e Y, respectivamente;*

3. *A é injectivo se e somente se o núcleo de A consiste de um só elemento zero de X, ou seja* $\ker A = \{\theta_X\}$*;*

4. *Se A é invertível então o operador inverso $A^{-1} : Y \to X$ é linear.*

Proposição 2.4.24. *O produto de operadores lineares é um operador linear.*

Proposição 2.4.25. *Um operador linear $A : X \to Y$ é injectivo se e somente se o núcleo de A consiste de um só elemento zero de X, ou seja* $\ker A = \{\theta_X\}$.

Sejam X e Y espaços normados com normas $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Y$, respectivamente, e seja $F : X \to Y$ um operador

Definição 2.4.26. 1. O operador F chama-se **contínuo** no ponto $x \in X$ se $x_n \in X, x_n \to x \Rightarrow Fx_n \to Fx$.
Um operador continuo em todos pontos do seu domínio chama-se contínuo.

2. O operador F chama-se limitado se transformar os conjunto limitados de X em conjuntos limitados em Y.

Observação 2.4.27. Notemos que a propriedade de continuidade de um operador F em espaços normados depende só topologias geradas pelas normas, e deste modo a noção do operador contínuo num ponto da Definição 2.4.26 está em concordância com a condição (e) do Teorema 2.2.35.

A diferença de continuidade, a noção do operador limitado em espaços normados é diferente da noção da função real limitada na Análise Matemática. De facto, uma função $f : S \to \mathbb{R}$ onde S é um conjunto não vazio é limitada se $f(S)$ é um conjunto limitado em $\mathbb{R}$, ou seja existe $R < +\infty$ tal que $|f(x)| \le R$ para todo $x \in D$. Em contraste, um operador $F : X \to Y$ é limitado se para todo o conjunto D limitado em X o conjunto $F(D)$ é limitado em Y. Assim, a função de identidade $f(x) = x$ em $\mathbb{R}$ não é limitada em $\mathbb{R}$ no sentido de Análise Matemática, mas se mesma função f represente-se o operador de identidade $I_{\mathbb{R}}$ no espaço normado $\mathbb{R}$ e este operador é limitado.

Proposição 2.4.28. *O produto de operadores contínuos (limitados) lineares é um operador contínuo (limitado, respectivamente).*

Teorema 2.4.29. *Para um operador linear $A : X \to Y$ são equivalentes as seguintes condições:*

(a) *A é contínuo num ponto de X;*

(b) *A é contínuo (isto é, contínuo em X);*

(b) *A é uniformemente contínuo (no sentido da Definição 2.2.37, aplicado para métricas geradas pelas normas em X e Y);*

(d) *A é limitado;*

(e) *O conjunto $\{Ax\colon \|x\|_X \le 1\}$ é limitado em Y;*

(f) *Existe* $c < +\infty$ *tal que* $\|Ax\|_Y \leq c\|x\|_X$ $(\forall x \in X)$.

Observação 2.4.30. O Teorema 2.4.29 diz, em particular, que na classe de operadores lineares as propriedades de continuidade e de limitação são equivalentes. Notemos que todos os operadores lineares considerados nos Exemplos 2.4.16 e 2.4.19 são limitados (= contínuos).

Teorema 2.4.31. [de Banach do operador inverso] *Se um* X, Y *são espaço de Banach e* $A : X \to Y$ *um operador linear e contínuo, então o operador inverso* $A^{-1} : Y \to X$ *também é contínuo.*

2.4.4 Imersão, isomorfismo, isometria linear

Sejam X e Y espaços normados com normas $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Y$, respectivamente,

Definição 2.4.32. [3] Se $X \subset Y$ dizemos que o espaço normado X é **imerso** no espaço normado Y, neste caso o operador $i : X \to Y$ definido por $i(x) = x$ $(x \in X)$ chama-se **imersão** de X em Y.

Se $X \subset Y$ e a imersão i é contínua dizem que X é **imerso continuamente** em Y e este facto denota-se $X \hookrightarrow Y$.

Proposição 2.4.33. *Caso* $X \subset Y$ *são equivalentes as seguintes condições;*

(a) $X \hookrightarrow Y$;

(b) *Existe uma constante* $c < +\infty$ *tal que* $\|x\|_Y \leq c\|x\|_X$ $(\forall x \in X)$.

(c) *No espaço linear* X, *a topologia gerada pela norma* $\|\cdot\|_X$ *é mais forte do que a topologia gerada pela norma* $\|\cdot\|_Y$.

Demonstração. (a)$\Leftrightarrow$(b) segue diretamente do teorema 2.4.29 aplicada para o operador i. (a)$\Leftrightarrow$(c) segue da Proposição 2.2.32. □

Definição 2.4.34. Duas normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_*$ num espaço linear X dize-se **equivalentes** se existem constantes positivas e finitas c_1 e c_2 tais que

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_* \leq c_2\|x\|_1, \qquad x \in X.$$

Proposição 2.4.35. *Duas normas* $\|\cdot\|$ *e* $\|\cdot\|_*$ *num espaço linear* X *são equivalentes, se e somente se para os espaços normados* $X_1 = (X, \|\cdot\|)$ *e* $X_2 = (X, \|\cdot\|_*)$ *têm lugar* $X_1 \hookrightarrow X_2$ *e* $X_2 \hookrightarrow X_1$.

Demonstração. Segue diretamente das Definição 2.4.34 e Proposição 2.4.33. □

Observação 2.4.36. Caso X é um subespaço linear de Y com a mesma norma (em particular, X é um subespaço de Y) temos, evidentemente que $X \hookrightarrow Y$. No entanto, em geral, caso $X \hookrightarrow Y$ as normas $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Y$ no espaço linear X não são equivalentes, e, respectivamente, as topologias τ_X e τ_Y geradas pelas essas normas são diferentes (da Proposição 2.4.33 pode ser garantido só $\tau_Y \subset \tau_X$).

Proposição 2.4.37. *para* $1 \leq p < r < \infty$ *temos que* $C[a,b] \hookrightarrow C_{(p)}[a,b] \hookrightarrow L_p[a,b]$ *e* $L_r[a,b] \hookrightarrow L_p[a,b]$.

Observação 2.4.38. A Proposição 2.4.37 fortalece a as Proposições 2.4.13 e 2.4.14. No entanto, chamemos atenção a diferença de imersões da Proposição 2.4.37. Na imersão $C_{(p)}[a,b] \hookrightarrow L_p[a,b]$ o espaço $L_p[a,b]$ e seu subespaço linear $C_{(p)}[a,b]$ têm a mesma norma $\|\cdot\|_p$. Mas em $C[a,b] \hookrightarrow C_{(p)}[a,b]$, a norma $\|\cdot\|_\infty$ do espaço de Banach $C[a,b]$ e a norma $\|\cdot\|_p$ no espaço normado não completo $C_{(p)}[a,b]$ não são equivalentes. Analogamente, as normas $\|\cdot\|_r$ e $\|\cdot\|_p$ no espaço linear $L_r[a,b]$ não são equivalentes.

Definição 2.4.39. [8] Os espaços normados X e Y são ditos **isomorfos** se existir um operador linear e bijectivo $J : X \to Y$ que é um homeomorfismo. O próprio operador J neste caso chama-se **isomorfismo** dos espaços normados X e Y.

Proposição 2.4.40. *Um operador $J : X \to Y$ é um isomorfismo dos espaços normados X e Y, se e somente se J é linear, bijectivo e existem constantes positivos e finitas c_1 e c_2 tais que*

$$c_1\|x\|_X \leq \|J(x)\|_Y \leq c_2\|x\|_X, \qquad x \in X.$$

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 2.4.29 aplicada para os operadores J e J^{-1}. □

Corolário 2.4.41. *Se duas normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_*$ num espaço linear X são equivalentes, então os espaços normados $X_1 = (X, \|\cdot\|)$ e $X_2 = (X, \|\cdot\|_*)$ são isomorfos por isomorfismo $J : X_1 \to X_2$ definido por $J(x) = x$.*

Observação 2.4.42. Realmente, no corolário 2.4.41 J é o operador de identidade I_X se considerar no mesmo espaço linear, mas não completamente correcto chamar J como operador de identidade em espaços normados (e pode ser $\|J\| \neq 1$). Por exemplo, o isomorfismo $J : (\mathbb{R}, \|\cdot\|) \to (\mathbb{R}, \|\cdot\|_*)$, onde $\|x\| = |x|$ e $\|x\|_* = 3|x|$, definido por $J(x) = x$, tem a norma $\|J\| = 3$.

Proposição 2.4.43. *Dois espaços normados isomorfos ambos são espaços de Banach ou ambos não são de Banach.*

Proposição 2.4.44. *Se os espaços normados X e Y são ambos de Banach e existe um operador linear, bijectivo e contínuo $J : X \to Y$, então os espaços X e Y são isomorfos por isomorfismo J.*

Demonstração. Do teorema de Banach do operador inverso (o Teorema 2.4.31) segue que o operador inverso $J^{-1} : Y \to X$ é contínuo, tal que J é um homeomorfismo. Segundo definição J é um isomorfismo de X e Y. □

Teorema 2.4.45. *Qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, todos espaços normados de dimensão n são isomorfos entre si, e todos são espaços de Banach.*

Observação 2.4.46. Diferentemente da propriedade dos espaços de dimensão finita apresentada no Teorema 2.4.45, existem espaços normados de dimensão infinita que são de Banach e que não são de Banach, sendo que entre espaços de Banach existem muitos não isomorfos entre si.

Definição 2.4.47. Os espaços normados X e Y são ditos **linearmente isométricos** se existir um operador linear e bijectivo $J : X \to Y$ tal que $\|Jx\|_Y = \|x\|_X$ $(x \in X)$. O próprio operador J neste caso chama-se **isometria linear** dos espaços normados X e Y.

Proposição 2.4.48. *Qualquer isometria linear de espaços normados é um isomorfismo desses espaços. Consecutivamente, se dois espaços normados são linearmente isométricos então são isomorfos.*

Demonstração. Segue diretamente das Definição2.4.47 e da Proposição 2.4.40. □

Capítulo 3

Espaços compactos

No presente capítulo, apresentamos noções básicas de compacidade neste caso, os espaços compactos, funções continuais nos espaços compactos e as suas propriedades gerais. Também discutimos as propriedades gerais de conjuntos compactos e relativamente compactos e suas propriedades específicas em espaços métricos e espaços normados. As referências básicas utilizadas nesse capítulo são [1], [5]. [8], [9], [11] e [14].

3.1 Compacidade nos espaços topológicos

3.1.1 Noções do espaço compacto e do conjunto compacto

Definição 3.1.1. [[7],p.112]

1. Diz-se que um conjunto X é **coberto** por um sistema de conjuntos σ se $X \subset \bigcup_{A \in \sigma} A$. Neste caso, o sistema σ denomina-se **cobertura** de X.

2. Uma cobertura σ de um conjunto X chama-se **cobertura finita** se σ é conjunto finito e é **enumerável** se o σ for enumerável.

3. Se σ é uma cobertura de X, $\sigma_1 \subset \sigma$ e σ_1 é também uma cobertura do X diz-se que σ_1 é **subcobertura** se σ.

4. Uma cobertura de um conjunto em um espaço topológico é dito **cobertura aberta** se todos os elementos desta cobertura são conjunto abertos.

Exemplo 3.1.2. Seja

$$\sigma = \{]a - \varepsilon; a + \varepsilon[: a \in [0; 1]\} \tag{3.1}$$

com $0 < \varepsilon < 0.1$ podemos notar que constitui uma cobertura aberta do conjunto $[0; 1]$ em $\mathbb{R}$ visto que:

1. Todos elementos de σ são abertos em $\mathbb{R}$.

2. $[0; 1] \subset \bigcup_{A \in \sigma} A = \bigcup_{a \in [0;1]}]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$ isto é, o σ cobre o conjunto $[0; 1]$ ou seja, o σ é uma cobertura do conjunto $[0; 1]$.

Proposição 3.1.3. [Lema de Heine[1]-Borel] *Se um segmento $[a; b]$ é coberto por um sistema de intervalos abertos, então existe um subsistema finito que é também cobertura do $[a; b]$.*

[1] Heinrich Eduard Heine, (1821—1881) — matemático Alemão

Vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo 3.1.4. Escolhemos da cobertura aberta (3.1) de $[0;1]$ do exemplo 3.1.2 uma subcobertura finita. É claro que existe uma sucessão crescente finita dos pontos $0 = a_1 < a_2 < ... < a_n = 1$ tais que, $a_{i+1} - a_i < \varepsilon$. Consideremos a familia de conjuntos

$$\sigma_1 = \{]a_i - \varepsilon; a_i + \varepsilon[: i = 1, 2, ..., n\}.$$

Notemos que,

1. $\sigma_1 \subset \sigma$ (subsistema σ).
2. $[0;1] \subset \bigcup_{A \in \sigma_1} A$ (o subsistema σ_1 é cobertura de $[0;1]$).
3. σ_1 é uma família de conjuntos finita (contém $n < \infty$ elementos).

Deste modo, σ_1 é uma subcobertura finita da cobertura aberta σ.

Observação 3.1.5. O exemplo de σ e σ_1 serve como uma ilustração da proposição de Heine-Borel mas não demonstração (a demonstração exige a consideração da cobertura arbitrária e não só concreta definida por (3.1)).

Definição 3.1.6. [9] **[espaço compacto]** Um espaço topológico X diz-se **espaço compacto** se qualquer cobertura aberta do X contém subcobertura finita.

Exemplo 3.1.7. Um espaço topológico discreta X só pode ser compacto se for finito. Uma vez que a cobertura aberta $\{\{x\} : x \in X\}$ não possui nenhuma sub-cobertura além dela própria.

Exemplo 3.1.8. $\mathbb{R}$ com a topologia padrão, não é compacto. Visto que a cobertura aberta $\{] - n, n[: n \in \mathbb{N}\}$ não possui subcobertura finita.

Definição 3.1.9. [conjunto compacto] Um subconjunto de um espaço topológico X chama-se **conjunto compacto** se for compacto como subespaço do X.

Lema 3.1.10. *[6] Um conjunto A num espaço topológico X é conjunto compacto se e só se qualquer cobertura aberta (em X) do conjunto A contém subcobertura finita.*

Demonstração. 1. Sejam A um conjunto compacto em X e σ uma cobertura aberta de A, isto é: elementos de σ são conjuntos abertos em X e $A \subset \bigcup_{U \in \sigma} U$ pela definição da topologia induzida $\sigma_A = \{U \cap A : U \in \sigma\}$ é uma família de conjuntos abertos no subespaço topológico A. Como $A \subset \bigcup_{V \in \sigma_1} V$ temos que σ_A será uma cobertura aberta do subespaço A.

Pelas Definições 3.1.6 e 3.1.9, σ contém subcobertura finita σ'_A. É evidente, que $\sigma' = \{U \in \sigma : U \cap A \in \sigma_1\}$ é uma subcobertura finita da cobertura σ para o conjunto A.

2. Reciprocamente, seja qualquer cobertura aberta (em X) do conjunto A contém subcobertura finita. Seja σ_A uma cobertura aberta do subespaço A. Pela definição da topologia induzida $\forall V \in \sigma_A$ existe conjunto U_V aberto em X tal que $V = U_V \cap A$. É claro que $\sigma = \{U_V : V \in \sigma_A\}$ é uma família de conjuntos abertos em X que satisfaz a condição $A \subset \bigcup_{U \in \sigma} U$, tal que σ é uma cobertura aberto do conjunto A em X. Então existe subcobertura finita σ' da cobertura σ, tal que $B = \bigcup_{U \in \sigma'} U \supset A$.

Consideremos a família de conjuntos $\sigma'_A = \{V \in \sigma_A : U_V \in \sigma'\}$. É claro que σ' é uma subfamília finita da cobertura σ_A. De $B \supset A$ segue

$$\bigcup_{V \in \sigma'_A} V = \bigcup_{U \in \sigma'} (U \cap A) = A \cap \left(\bigcup_{U \in \sigma'} U \right) = A \cap B \supset A.$$

Daqui segue que σ'_A é uma subcobertura da cobertura aberta σ_A do subespaço A.

Pela Definição 3.1.6 o subespaço A é compacto, e pela Definição 3.1.9 o conjunto A é compacto em X. □

Teorema 3.1.11. *Qualquer conjunto fechado em um espaço topológico compacto é um conjunto compacto.*

Demonstração. Seja X um espaço topológico compacto e $F \subset X$ um conjunto fechado. Seja σ uma cobertura aberta do conjunto F. Então, $\sigma_1 = \{V \cup (X \setminus F) \colon V \in \sigma\}$ é uma cobertura aberta de X. Como X é compacto, existe subfamília finita $\sigma'_1 = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ de σ_1 que ainda cobre X.

Pela construção de σ_1, existem $V_i \in \sigma$ tais que $U_i = V_i \cup (X \setminus F)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. É claro que $F \cap U_i \subset V_i$, e como σ'_1 cobre X

$$\bigcup_{i=1}^{n} V_i \supset \bigcup_{i=1}^{n} (F \cap U_i) = F \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i \right) = F \cap X = F.$$

Demonstramos que σ'_1 é uma subcobertura finita da cobertura σ. Pelo Lema 3.1.10 o conjunto F é compacto em X. □

Observação 3.1.12. Nem todo subconjunto de um espaço compacto é compacto. Vejamos o exemplo a seguir: Seja $]0;1[\subset [0;1]$ e que as coberturas abertas do conjunto $[0;1]$ possuem subcoberturas finitas isto é, o conjunto $[0;1]$ é compacto, mas podemos notar que $]0;1[$ não é compacto visto que, a cobertura aberta $\sigma = \left\{ \left] \frac{1}{n}; 1 - \frac{1}{n} \right[: n \in \mathbb{N} \right\}$ do conjunto $]0;1[$ não tem nenhuma subcobertura finita.

Teorema 3.1.13. *Uma união finita de conjuntos compactos de espaço topológico X é conjunto compacto.*

Demonstração. Seja X espaço topológico e $\{A_i \subset X,\ i = 1, 2, ..., n\}$ conjuntos compactos. Seja σ uma cobertura aberta do conjunto $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. É claro que para cada $i \in \{1, 2, \dots n\}$ a família σ é uma cobertura aberta de A_i, e como A_i é compacto, pelo Lema 3.1.10 existe subcobertura finita σ_i de A_i. Então, a familia de conjuntos $\sigma' = \bigcup_{i=1}^{n} \sigma_i$ é, evidentemente, uma subcobertura finita da cobertura σ do conjunto A. Aplicando mais uma vez o Lema 3.1.10 concluímos que A é conjunto compacto. □

Teorema 3.1.14. [lema de Alexandrov[2]] *Seja X um espaço topológico e $\int$ uma sub-base de X (ver a Definição 2.1.25). X é compacto se e somente se toda cobertura aberta de X, cujos elementos pertencem a $\mathcal{S}$, admitem uma subcobertura finita.*

Teorema 3.1.15. ([7, p.143], [13, p.53]) *Um produto cartesiano $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ dos espaços topológicos (com a topologia do produto, ver a Definição 2.1.35) é um espaço compacto, se e somente se todos os factores X_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ são espaços compactos.*

3.1.2 Espaços compactos de Hausdorff

Definição 3.1.16. [o compacto] Um **compacto** é um espaço topológico compacto que ao mesmo tempo é espaço de Hausdorff.

Teorema 3.1.17. *Todo conjunto compacto em um espaço de Hausdorff é fechado.*

[2]Pavel Sergeyevich Alexandrov (1896—1982) — matemático Russo

Demonstração. Seja X um espaço de Hausdorff e K um conjunto compacto em X. É suficiente demonstrar que o conjunto $X \setminus K$ é aberto em X, o seja qualquer ponto de $X \setminus K$ é um ponto interior.

Seja $x \in X \setminus K$. Procuremos uma vizinhança $U \in \mathcal{O}(x)$ tal que $x \in U$ e $U \subset X \setminus A$.

Temos pela definição do espaço de Hausdorff que

$$(y \in K)(\exists_{U_y} \in \mathcal{O}(x))(\exists_{V_y} \in \mathcal{O}(y)) \ : \ U_y \cap V_y = \emptyset.$$

Então deste modo obtemos uma cobertura aberta $\sigma = \{V_y \colon y \in K\}$ do conjunto K. Como K é conjunto compacto existe subcobertura finita $\sigma' = \{V_{y_1}, V_{y_2}, \ldots, V_{y_n}\}$ do conjunto K.

Consideremos o conjunto $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$. É claro que $x \in U$ e pelo axioma **(T3)** ta topologia U é conjunto aberto. Pela construção,

$$U \cap K \subset U \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i} \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (U \cap V_{y_i}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} (U_{y_i} \cap V_{y_i}) = \emptyset,$$

daqui decorre $U \subset X \setminus K$.

É demonstrado que qualquer ponto de $X \setminus K$ é um ponto interior. Portanto, o conjunto $X \setminus K$ é aberto em X, e, respectivamente, o seu complemento $K = X \setminus (X \setminus K)$ é fechado. □

Observação 3.1.18. O Teorema 3.1.17 diz que qualquer subconjunto de M de um espaço de Hausdorff X que não for fechado em X não poderá ser compacto.

Exemplo 3.1.19. Nenhuma das partes M de $\mathbb{R}$ não fechados não é compacta. O fecho $\overline{M}$ de um tal subconjunto M de X pode, entretanto ser compacta. Esta propriedade verifica para qualquer parte limitada da recta numérica (ver a Subsecção 3.2.4

Corolário 3.1.20. *Um subespaço F em um compacto X é o compacto se e somente se F é fechado em X.*

Demonstração. A demonstração segue directamente dos Teoremas 3.1.11, 3.1.17 e do facto (demonstra-se directamente) que qualquer subespaço se um espaço de Hausdorff é de Hausdorff. □

3.1.3 Funções contínuas em espaços compactos

Agora consideremos as propriedades dos espaços compactos relacionadas com a continuidade das funções.

Sejam X, Y espaços topológicos.

Teorema 3.1.21. *Se X é um espaço compacto e $f : X \to Y$ uma aplicação contínua, então $f(X)$ é um sub-espaço compacto de Y.*

Demonstração. Seja σ uma cobertura aberta do conjunto $f(X)$ em Y, tal que $f(X) \subset \bigcup_{U \in \sigma} U$. Então

$$X = f^{-1}(f(X)) \subset f^{-1} \left(\bigcup_{U \in \sigma} U \right) = \bigcup_{U \in \sigma} f^{-1}(U). \tag{3.2}$$

Como f é contínua, os conjuntos $f^{-1}(U)$ são abertos em X, e segundo (3.2) $\sigma_X = \{f^{-1}(U) \colon U \in \sigma\}$ é uma cobertura aberta de X. Como X é compacto essa cobertura admite uma sub-cobertura finita $\{f^{-1}(U_i)\}_{i=1}^{n}$ onde $U_i \in \sigma$. Temos que $X = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(U_i)$, então

$$f(X) = f \left(\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(U_{i_k}) \right) = f \left(f^{-1} \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i \right) \right) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i.$$

Então $\sigma' = \{U_i\}_{i=1}^n$ é subcobertura finita da cobertura σ do conjunto $f(X)$. Pelo lema 3.1.10 o conjunto $f(X)$ é compacto em Y, logo, $f(X)$ é subespaço compacto. □

Corolário 3.1.22. *Seja X compacto. Se a função $f : X \to Y$ continua e sobrejectiva então Y é espaço compacto.*

Definição 3.1.23. Uma função $f : X \to Y$ diz-se **fechada** se a imagem de qualquer conjunto fechado em X é conjunto fechado em Y.

Teorema 3.1.24. *Se X é um espaço compacto e Y é um espaço de Hausdorff, então qualquer função $f : X \to Y$ continua é fechada.*

Demonstração. Seja F um conjunto fechado em X. Pelo teorema 3.1.11 F é subespaço compacto de X. A restrição da função f para subespaço F, isto é, a função $h : F \to Y$ definida por $h(x) = f(x)$, $x \in F$ é contínua, logo, pelo Teorema 3.1.21 o conjunto $h(F)$ é compacto em Y. Mas $f(F) = h(F)$ e este conjunto é compacto no espaço de Hausdorff Y. Pelo Teorema 3.1.17, o conjunto $f(F)$ é fechado em Y. Pela definição, a função f é fechada. □

Teorema 3.1.25. *Se X é um espaço compacto e Y é um espaço de Hausdorff, então qualquer função bijectiva e contínua $f : X \to Y$ é um homeomorfismo.*

Demonstração. Seja $f : X \to Y$ uma função bijectiva e contínia.Pela definição do homeomorfismo, é suficiente provar que a função inversa $g = f^{-1} : Y \to X$ é contínua.

Se F uma conjunto fechado em X, então $g^{-1}(F) = \left(f^{-1}\right)^{-1}(F) = f(F)$, e pelo Teorema 3.1.24 o conjunto $f(F)$ é fechado em Y. é mostrado que a pré-imagem de qualquer conjunto fechado pela função g é uma conjunto fechado. Pelo Corolário 2.1.44 a função g é contínua. □

Teorema 3.1.26. *Se X é um espaço compacto e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua, então o conjunto $f(X)$ é limitado em $\mathbb{R}$ e a função f atinge os seus valores máximo e mínimo em alguns pontos de X.*

3.1.4 Compacidade sequêncial

Começaremos do teorema de Bolzano[3]-Weierstrass[4] clássica que caracteriza os conjuntos limitados em $\mathbb{R}$.

Teorema 3.1.27. [Bolzano-Weierstrass]*[10] Todo conjunto infinito e limitado de números reais, possui um ponto de acumulação (que pertence ao conjunto ou não).*

Corolário 3.1.28. *Todo conjunto infinito e limitado de números reais, possui um ponto de acumulação (que pertence ao conjunto).*

Observação 3.1.29. É um facto notável que realmente, qualquer espaço topológico compacto goza da propriedade de Bolzano-Weierstrass, que na terminologia moderna é chamada compacidade sequencial. A ligação entre a compacidade e a compacidade sequencial esclareça a caracterização dos espaços compactos em termos da famílias centradas.

Definição 3.1.30. Um espaço X diz-se **sequencialmente compacto** se qualquer subconjunto infinito $M \subset X$ (ou, o que é equivalente, qualquer sucessão M dos elementos de X) tem pelo menos um ponto de acumulação pertencente a M).

[3]Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781—1848) — matemático da República Checa
[4]Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815—1897) — matemático Alemão

Definição 3.1.31. [[10],p.99] Diz-se que uma família $\mathcal{F} = \{F_s : s \in S\}$ tem **propriedade da intersecção finita** ou é uma família **centrada** se para cada $S' \subset S$ finito, a intersecção $\bigcap_{s \in S'} F_s$ é um conjunto não vazia.

Teorema 3.1.32. *Um espaço topológico X é compacto se e somente se toda a família centrada de conjuntos fechados de X tem a intersecção não vazia.*

Corolário 3.1.33. *Se X for um espaço topológico compacto e $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ for uma sucessão decrescente (isto é, $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$) de conjuntos fechados não vazios em X, então a intersecção $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ não é vazia.*

Demonstração. A família de conjuntos $\mathcal{F} = \{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ satisfaz a propriedade da intersecção finita, então pelo Teorema 3.1.32 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$. □

Com base deste corolário demonstra-se o seguinte teorema fundamental:

Teorema 3.1.34. *Qualquer espaço compacto é sequencialmente compacto.*

Proposição 3.1.35. *Para que um espaço topológico X seja sequencialmente compacto é necessário e suficiente que qualquer cobertura aberta enumerável contenha uma cobertura finita.*

Teorema 3.1.36.
1. *Para espaços com 2^{o} axioma de enumerabilidade, os conceitos de compacidade e compacidade sequencial coincidem.*
2. *Para espaço metrizáveis os conceitos de compacidade e compacidade sequencial coincidem.*

Observação 3.1.37. Existem espaços topológicos sequêncialmente compactos que não são compactos (ver, por Exemplo, [5])

3.1.5 Conjuntos relativamente compactos

Na revisão da matéria desta subsecção usamos as fontes [8] e [11].

Definição 3.1.38. Um subconjunto M de um espaço topológico X chama-se **relativamente compacto** em X, se seu fecho $\overline{M}$ for compacto em X .

Analogamente, M é **sequencialmente relativamente compacto** em X se qualquer subconjunto infinito $A \subset M$ tiver pelo menos um ponto de acumulação (pertencente ou não o M), que quer dizer $\overline{M}$ é sequencialmente compacto em X.

Teorema 3.1.39. *São validas as seguintes proposições:*

1. *Qualquer conjunto em um espaço compacto é relativamente compacto.*
2. *Em um espaço topológico, qualquer conjunto relativamente compacto e fechado é compacto.*
3. *Em um espaço topológico de Hausdorff, um conjunto é compacto se e somente se é relativamente compacto e fechado.*
4. *Em um espaço topológico, todos subconjuntos de um conjunto relativamente compacto são relativamente compactos.*
5. *Em um espaço topológico, a reunião finita de conjuntos relativamente compactos é um conjunto relativamente compacto.*

6. *Em um espaço topológico, a intersecção qualquer de conjuntos relativamente compactos é um conjunto relativamente compacto.*

Teorema 3.1.40. *Se A é um sub-espaço de dois espaços topológicos X e Y com a mesma topologia induzida, então A é conjunto compacto em X se e somente se é compacto em Y.*

Demonstração. Se A é um conjunto compacto em X, então A é um sub-espaço compacto de X, e deste modo tem a propriedade: qualquer cobertura aberta do espaço A contém sub-cobertura finita. Mas a essa propriedade não depende do espaço em que A é sub-espaço, em particular, é válida também para qualquer espaço topológico Y, em que A é um sub-espaço. □

Observação 3.1.41. Se A um sub-espaço de dois espaços topológicos X e Y (com a mesma topologia induzida), e A é conjunto relativamente compacto em X, então A pode ser conjunto não relativamente compacto em Y. Apresentemos dois contra-exemplos correspondentes.

Exemplo 3.1.42. Consideremos o conjunto $A =]0;1[$ no espaço $X = \mathbb{R}$ (com a topologia padrão) e no espaço $Y =]0;\infty[$ (como sub-espaço de X). O conjunto A é relativamente compacto em X, pois seu fecho $[0;1]$ é compacto em X (ver o teorema de Heine-Borel).

De outro lado, suponhamos que A é relativamente compacto em Y, isto significa que o fecho de A em Y denotado por B é um conjunto compacto em Y, portanto é conjunto compacto em X (pelo Teorema 3.1.40). No entanto, $B =]0;1]$, logo, é um conjunto não fechado no espaço de Hausdorff X, e pelo Teorema 3.1.17 B não é compacto em X. A contradição obtida implica que o conjunto A não é relativamente compacto em Y.

Exemplo 3.1.43. O conjunto dos pontos racionais do intervalo $]0;1[$ é relativamente compacto se considerado como subconjunto da recta real $\mathbb{R}$, e não o é se for considerado como um subconjunto de todos os racionais $\mathbb{Q}$ (com a topologia induzida de $\mathbb{R}$).

Observação 3.1.44. A noção de compacidade relativa, introduzida na Definição 3.1.38 para subconjunto dos espaços topológicos de Hausdorff, é aplicável, em particular as partes de um espaço métrico. Neste contexto, os conceitos de compacidade sequencial relativa e de compacidade relativa, coincidem, e temos outras condições equivalentes a compacidade relativa (ver a secção seguinte).

3.2 Compacidade nos espaços métricos

3.2.1 Conjuntos totalmente limitados

Seja X um espaço métrico com a métrica ρ.

Definição 3.2.1. [11] Seja M um conjunto em X e $\varepsilon > 0$. Um conjunto $A \subset X$ chama-se **ε-rede para (de) M** se

$$\bigcup_{x \in A} D(x,\varepsilon) \supset M$$

onde $D(x,\varepsilon) = D_\varepsilon(x) = \{y \in X : \rho(x,y) \leq \varepsilon\}$ (bola fechada).

Ou seja, um conjunto $A \subset X$ chama-se ε-rede de M se

$$(\forall x \in M)(\exists a \in A) : \rho(x,a) \leq \varepsilon.$$

Lema 3.2.2. *Se A é ε-rede finita do M então existe subconjunto $B \subset M$ cujo número dos elementos não é maior do que o número dos elementos de A e tal que B é 2ε-rede para M.*

Demonstração. Seja $A_1 = \{a \in A : D_\varepsilon(a) \cap M \neq \emptyset\}$. Qualquer que seja $a \in M$ escolhemos um elemento $b(a) \in D_\varepsilon(a) \cap M$ arbitrário, e consideremos o conjunto $B = \{b(a) : a \in A_1\}$. É claro que $B \subset M$ e o número dos elementos de B não é maior do que o número dos elementos de A. Agora mostremos que B é $2\varepsilon-$rede de M.

Fixemos $x \in M$ e, usemos que A é $\varepsilon-$rede de M, tomemos $a \in A$ tal que $\rho(x, a) \leq \varepsilon$ então, $a \in A_1$, e para $b(a) \in M$ temos $\rho(x, b(a)) \leq \rho(x, a) + \rho(a, b(a)) \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. □

Definição 3.2.3. Um **conjunto** M chama-se **totalmente limitado** se para este conjunto existe ε-rede finita qualquer que seja $\varepsilon > 0$.

Definição 3.2.4. Analogamente da Definição 3.2.3, um **espaço métrico** X chama-se **totalmente limitado** se X (considerado como subconjunto de X) é totalmente limitado.

Ou seja, um espaço métrico X diz-se totalmente limitada quando $\forall\varepsilon > 0$ existe um numero finito de pontos $x_1, \ldots, x_n \in M$ tais que todo ponto $x \in M$ dista menos do ε de algum dos x_i.

Proposição 3.2.5.

1. *Um subconjunto M de X é totalmente limitado se e só se M considerado como espaço métrico (subespaço do X) é totalmente limitado.*

2. *Qualquer conjunto totalmente limitado é limitado.*

3. *Um conjunto M é totalmente limitado se e só se $\overline{M}$ é totalmente limitado.*

Teorema 3.2.6. *Para que um espaço métrico seja totalmente limitado é necessário e suficiente que dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, X é representável como união de um numero finito de subconjuntos $X = S_1 \cup, ..., \cup S_n$ em que cada tem diâmetro menor que ε ($diam S_i < \varepsilon$).*

Teorema 3.2.7. *Todo subespaço M de um espaço métrico X totalmente limitado é ainda totalmente limitado.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Pelo Teorema 3.2.6 tem lugar a representação $X = S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_n$ com $\text{diam} S_i \leq \varepsilon$ e $\varepsilon > 0$. Sendo $M \subset X$ então M pode ser escrito na forma de união de conjuntos finitos de M intersectando com S_i, isto é, $M = (M \cap S_1) \cup \ldots \cup (M \cap S_n)$ com $\text{diam}(M \cap S_i) \leq \text{diam}(S_i)$, tal que $\text{diam}(M \cap S_i) \leq \varepsilon$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. □

Exemplo 3.2.8. Todo subconjunto limitado S da recta $\mathbb{R}$ é totalmente limitado.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Como S é limitado então está contido numa união finita dos intervalos fechados de comprimento menor ou igual a ε. □

Proposição 3.2.9. *Qualquer espaço totalmente limitado tem uma base enumerável, em particular, é separável.*

Proposição 3.2.10. *Seja X e Y espaços métrico sendo que X é totalmente limitada. Se $f : X \to Y$ é uma função uniformemente continua (ver a Definição 2.2.37) então $f(X)$ é subespaço totalmente limitado em Y.*

Observação 3.2.11. A proposição anterior, deixa claro que a imagem uniformemente continua de um espaço métrico totalmente limitado é um espaço totalmente limitado.

3.2.2 Compacidade relativa e limitação total

É interessante que nos espaço métricos, existe ligação profundo entre compacidade e limitação total (e como vamos ver abaixo), entre compacidade relativa e limitação total. Começaremos de três teoremas (a Demonstração pode ver em [8]).

Teorema 3.2.12. *Para espaços métricos os conceitos de compacidade e compacidade sequencial coincidem.*

Teorema 3.2.13. *Um espaço métrico é compacto se e somente se o espaço é totalmente limitado e completo.*

Teorema 3.2.14. *Para que um subconjunto M de um espaço métrico completo X seja relativamente compacto é necessário e suficiente que seja totalmente limitada.*

Destes três teorema profundas segue o seguinte teorema, em que apresentamos várias condições equivalentes a compacidade relativa de um conjunto num espaço métrico completo.

Teorema 3.2.15. *Seja um subconjunto M de um espaço métrico completo, são equivalentes as seguintes condições:*

(a) *M é relativamente compacto isto é, $\overline{M}$ é compacto;*

(b) *M é relativamente sequencialmente compacto isto é, qualquer subconjunto infinito contém ponto de acumulação;*

(c) *Qualquer sucessão $\{x_n\}$ dos elementos do M contém subsucessão convergente (seu limite não necessariamente pertence a M)*

(d) *M é conjunto totalmente limitado isto é, $(\forall \varepsilon > 0)$ existe uma $\varepsilon-$rede finita para M.*

Corolário 3.2.16. *Seja X um espaço métrico completo e Y um subespaço fechado em X. Um conjunto $M \subset Y$ é relativamente compacto em X se e somente se é relativamente compacto em Y.*

Demonstração. Seja M relativamente compacto em X. Pelo Teorema 3.2.15, qualquer sucessão $\{x_n\}$ dos elementos do M contém subsucessão convergente em X para um $x \in X$. Mas como Y é subespaço fechado, temos pela Proposição 2.2.31 que $x \in Y$, e deste modo, a sucessão $\{x_n\}$ contém a subsucessão convergente em Y. Daqui e do Teorema 3.2.15, atendendo que o espaço Y é completo (pela Proposição 2.2.44) segue que M é relativamente compacto em Y.

Reciprocamente, seja M é relativamente compacto em Y. Pela Proposição 2.2.44 o espaço métrico Y é completo. Então, pelo Teorema 3.2.15, qualquer sucessão $\{x_n\}$ dos elementos do M contém subsucessão convergente em Y. Mas esta subsucessão, evidentemente, é convergente em X. Pelo mesmo Teorema 3.2.15, o conjunto M é relativamente compacto em X. □

Observação 3.2.17. Os Exemplos 3.1.42 e 3.1.43 mostram que caso o subespaço Y não for fechado a conclusão do Corolário 3.2.16 pode ser inválida.

Corolário 3.2.18. *Seja M um subconjunto de um espaço métrico completo, são equivalentes os seguintes condições:*

(a) *M é compacto;*

(b) *M é relativamente compacto é fechado;*

(c) *M é relativamente compacto é completo;*

(d) *M é relativamente sequencialmente compacto é fechado;*

(e) *M é relativamente sequencialmente compacto é completo;*

(f) *Qualquer sucessão $\{x_n\}$ dos elementos do M contém subsucessão convergente a um $x \in M$;*

(g) *M é conjunto totalmente limitado e fechado;*

(h) *M é conjunto totalmente limitado e completo.*

Corolário 3.2.19. *Um subconjunto relativamente compacto (compacto) de um espaço métrico é limitado (limitado e fechado, respectivamente).*

Teorema 3.2.20. *Seja X e Y espaços métricos, sendo que X é compacto. Então, qualquer função $f : X \to Y$ contínua é uniformemente continua.*

Demonstração. Designemos por d e ρ as métricas em X e Y, respectivamente e realizamos a demonstração por redução ao absurdo. Suponhamos que uma continua $f; X \to Y$ não é uniformemente continua.

Então existe $\varepsilon > 0$ tal que, dado qualquer numero natural n, em X se encontrarão dos pontos x_n e y_n satisfazendo simultaneamente as condições

$$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \quad \wedge \quad \rho(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3.3}$$

(d e ρ as métricas em X e Y, respectivamente).

Em virtude da compacidade de X, e pelo Corolário 3.2.18, da sucessão $\{x_n\}$ pode-se extrair uma subsucessão $\{x_{n_k}\}$ convergindo para um ponto $x \in X$. De (3.3) segue

$$d(y_{n_k}, x) \leq d(y_{n_k}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{n} + d(x_{n_k}, x),$$

tal que $\{y_{n_k}\}$ converge para x.

Pelo Teorema 2.2.35 existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo a condição $n \geq n_0$ será que:

$$\rho(f(x_{n_k}), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \rho(f(y_{n_k}), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Deste modo, para $n \geq n_0$

$$\rho(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \leq \rho(f(x_{n_k}), f(x)) + \rho(f(x), f(y_{n_k})) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

o que contradiz a segunda desigualdade (3.3). □

Observação 3.2.21. Os Teoremas 2.2.38 e 3.2.20 implica que caso o espaço X seja compacto, os conjuntos das funções contínua e uniformemente contínuas de X em Y coincidem.

3.2.3 Espaços métricos $T(X,Y)$ e $C(X,Y)$

Seja X e Y espaços métricos compactos com métricas d e ρ, respectivamente. Notemos que pelo Teorema 3.2.13 os espaços X e Y são completos, e pela Proposição 3.2.5 (2) são limitados.

Consideremos o conjunto $T(X,Y)$ constituído de todas as funções $f : X \to Y$. É fácil ver que a função $\rho_\infty : (T(X,Y))^2 \to [0;\infty[$ definida por

$$\rho_\infty(f,g) = \sup_{x\in X} \rho(f(x), g(x))$$

é uma métrica em $T(X,Y)$, tal que $(T(X,Y)$ munido da distância ρ_∞ é um espaço métrico. Da limitação de Y segue que todas as funções do espaço $T(X,Y)$ são limitados.

Teorema 3.2.22. *$T(X,Y)$ é um espaço métrico completo.*

Demonstração. Usaremos a ideia da demonstração em [8, p.46]. Seja $\{f_n\}$ uma sucessão de Cauchy em $T(X,Y)$. É evidente, $\forall t \in X$ $\{f_n(x)\}$ é uma sucessão de Cauchy em Y, e como Y é completo (pelo Teorema 3.2.22), esta sucessão converge para um $f(x) \in Y$. Deste modo é definida uma função $f \in T(X,Y)$.

Mostremos que a sucessão $\{f_n\}$ converge para f em $T(X,Y)$, ou seja $\rho_\infty(f_n, f) \to 0$, quando $n \to \infty$. Seja $\varepsilon > 0$. Usando que $\{f_n\}$ é uma sucessão de Cauchy em $T(X,Y)$, escolhemos um n_0 natural tal que para todo n,m naturais satisfazendo a condição $n,m \geq n_0$ será que

$$\rho_\infty(f_n, f_m) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \Rightarrow \quad (\forall x \in X)\ \ \rho(f_n(x), f_m(x)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para cada $x \in X$ fixo, passando na última desigualdade ao limite, quando $m \to \infty$ obtemos

$$(\forall x \in X)\ \ \rho(f_n(x), f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \Rightarrow \quad \rho_\infty(f_n, f) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

É demostrado a sucessão de Cauchy $\{f_n\}$ em $T(X,Y)$ converge para $f \in T(X,Y)$. Como a sucessão de Cauchy for arbitraria temos, segundo definição o que o espaço métrico $T(X,Y)$ é completo. □

Agora, consideremos o subespaço $C(X,Y)$ do espaço métrico $T(X,Y)$ constituído das funções contínuas $f : X \to Y$. Notemos (veja a Observação 3.2.21) $C(X,Y)$ pode ser definido de modo equivalente como subespaço das funções uniformemente contínuas $f : X \to Y$. Alem disso, pelas Proposições 2.1.43, 2.1.47, 2.1.48 e 2.2.36 a função $\varphi : X \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = \rho(f(x), g(x))$ é contínua, então, pelo Teorema 3.1.26 atinge o seu valor máximo, tal que $\forall f,g \in X(X,Y)$

$$\rho_\infty(f,g) = \sup_{x\in X} \rho(f(x), g(x)) = \max_{x\in X} \rho(f(x), g(x)).$$

Lema 3.2.23. *$C(X,Y)$ é um subespaço fechado de $T(X,Y)$.*

Demonstração. Sejam $f_n \in C(X,Y)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ e $f_n \to f$ em $T(X,Y)$. É suficiente demonstrar que $f \in C(X,Y)$ (isto, é, a função f é contínua).

Fixemos $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$. Escolhemos pela condição $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(\forall n \geq n_0)$

$$\rho_\infty(f_n, f) = \sup_{x\in X} \rho(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.4}$$

Tomamos algum número natural $n \geq n_0$ e encontramos segundo continuidade da função f_n o número $\delta > 0$ tal que $(\forall x \in B_\delta(x_0))$ se cumpre

$$\rho(f_n(x), f_n(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.5}$$

De (3.4), (3.5), e dos axiomas **M2** e **M3** da métrica obtemos ($\forall x \in B_\delta(x_0)$)

$$\rho(f(x), f(x_0)) \le \rho(f(x), f_n(x)) + \rho(f_n(x), f_n(x_0)) + \rho(f_n(x_0), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Então, f é função contínua. □

Teorema 3.2.24. *O espaço métrico $C(X, Y)$ é completo.*

Demonstração. Segue directamente dos Lema 3.2.23, Teorema 3.2.22 e Proposição 2.2.44. □

3.2.4 Critério de compacidade em $\mathbb{R}^n$

Teorema 3.2.25. *Um subconjunto E do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é compacto se, somente se for limitado e fechado.*

Demonstração. Se um conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ é compacto, então, pelo corolário 3.2.19, é limitado e fechado.

Mostremos a proposição recíproca. Seja E um conjunto limitado e fechado em $\mathbb{R}^n$. Sendo limitado, E está contido num paralelipípedo $[a_1; b_1] \times ... \times [a_n; b_n] = P$. Pelos Proposição 3.1.3 e Teorema 3.1.15, P é compacto em E. Como E é fechado em $\mathbb{R}^n$, pela Proposição 2.1.31, E é conjunto fechado no espaço compacto P. Pela Proposição 3.1.11 E é conjunto compacto em P. Finalmente, pelo Teorema 3.1.40 o conjunto E é compacto em $\mathbb{R}^n$. □

Corolário 3.2.26. *Um conjunto S no espaço euclidiana $\mathbb{R}^n$ é relativamente compacto se, somente se é limitado.*

Demonstração. Segue directamente dos Teoremas 3.2.25, 3.2.15 e corolário 2.2.19. □

3.2.5 Conjuntos relativamente compactos nos espaços normados

Todas propriedades dos conjuntos compactos e relativamente compactos, apresentadas na secção 3.2, em particular, os critérios do Teorema 3.2.15 e do Corolário 3.2.18 são aplicáveis sem alteração, para os espaços normados (veja a observação 2.4.4). Nesta secção só chamaremos de alguns propriedades específicas em espaços normados, relacionadas com o estrutura de espaço linear nesses espaços, que o leitor pode encontrar em vários manuais de Análise Funcional, por Exemplo, em [6], [8] e [10].

Seja X um espaço normado sobre o corpo $\mathbb{P}$ de números reais ou complexos.

Proposição 3.2.27. *Se um conjunto $M \subset X$ é relativamente compacto em X, então $co(M)$, isto é, o conjunto mínimo convexo (em relação à inclusão de conjuntos) que contem o M também é relativamente compacto em X.*

Se os conjuntos $M, N \subset X$ são relativamente compactos em X e $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$ então o conjunto $\alpha M + \beta N$ é também relativamente compacto em X.

Do Corolário 3.2.19 e da Observação 2.4.4 segue, evidentemente, que o próprio X não é espaço compacto.

Pelo Corolário 3.2.19, qualquer conjunto relativamente compacto em X é limitado. Na secção 3.2.4 foi mostrado que para o espaço $\mathbb{R}^n$ também é válida a proposição recíproca. O seguinte teorema estabelece o critério de validade desta proposição em espaços normados quaisquer, em dependência do facto se o espaço é de dimensão finita ou infinita.

Teorema 3.2.28. *Para um espaço normado X são equivalentes as seguintes condições*
(a) $dimX < \infty$;
(b) *Qualquer conjunto limitado é relativamente compacto em X;*
(c) *Alguma bola $B_\varepsilon(x)$ é conjunto relativamente compacto em X;*
(d) *Existe pelo menos um conjunto relativamente compacta em X com interior não vazio.*

Dos Teorema 3.2.28 e Corolário3.2.19 segue o seguinte critério que generaliza os critérios do Teorema 3.2.25 e do Corolário 3.2.26.

Corolário 3.2.29. *Num espaço normado de dimensão finita, um conjunto é relativamente compacto (compacto) se, somente se é limitado (limitado e fechado, respectivamente).*

É útil a seguinte reformulação do Teorema 3.2.28:

Corolário 3.2.30. *Para um espaço normado X são equivalentes as seguintes condições:*
(a) $dimX = \infty$;
(b) *Existe pelo menos um conjunto limitado que não é relativamente compacto em X;*
(c) *Qualquer bola $B_\varepsilon(x)$ não é conjunto relativamente compacto em X;*
(d) *Se $M \subset X$ e $int(M) \neq \emptyset$ então M não é relativamente compacto em X.*

Observação 3.2.31. Para espaços normados da dimensão finita temos o critério, isto é, condições que são necessárias e suficientes em simultâneo, de compacidade (compacidade relativa) de conjuntos na forma do Corolário 3.2.29. Em geral, em espaços métricos completos, em particular, em espaços de Banach (que não são obrigatoriamente de dimensão finita), o Teorema 3.2.15 estabelece só a equivalência de tais propriedades de conjuntos como a compacidade relativa e a limitação total.

Mas, em diferença da limitação, a verificação da limitação total, pela natureza desta propriedade, ainda exige os métodos específicos para cada espaço funcional concreto, tais como $C(X,Y)$, $C[a,b]$, ℓ_p, $L_p[a,b]$ e outros. Então, tem grande interesse de estabelecer os critérios específicos de compacidade relativa de um conjunto (o que é equivalente, da limitação total de conjunto), para espaços funcionais concretos. Trata-se dos critérios formulados em termos relacionados com espaços concretos, que podem ser utilizadas para verificação na prática de compacidade relativa de conjuntos de modo muito mais conveniente do que critério geral na forma do Teorema 3.2.15.

Nos seguinte capítulo iremos abordar os critérios específicos de compacidade relativa de conjuntos no espaço de Banach $C[a,b]$, e obter os critérios novos para espaços funcionais correspondentes com peso.

Observação 3.2.32. Notemos que são interessantes dois tipos de critérios específicos: de compacidade e de compacidade relativa de conjuntos. Pelo Corolário 3.2.18, um conjunto em um espaço métrico completo (em particular, em um espaço de Banach) é compacto se e somente se é relativamente compacto e fechado.

Mas a verificação da propriedade de um conjunto M ser fechado (isto é, $\overline{M} = M$), como regra verifica-se com base da Definição 2.1.9 (em combinação com o Corolário 2.2.16) ou com base do Corolário 2.2.31, deste modo, os critérios da propriedade de um conjunto ser fechado é comum para todos os espaços métricos concretos (sem especificação para cada um destes espaços).

Deste modo, em capítulos seguintes, nós não vamos estudar a propriedade de compacidade de conjuntos em espaços métricos e de Banach concretos, e limitarmos pela propriedade de compacidade relativa.

Observação 3.2.33. No fim deste capítulo apresentemos dois teoremas que serão úteis essencialmente na elaboração dos critérios novos de compacidade relativa de um conjunto em espaços funcionais com pesos, por método de redução para critérios conhecidos em espaços clássicos (sem pesos), usando o facto, que, em muitos casos os espaços com pesos são isomorfos aos espaços clássicos correspondentes.

Teorema 3.2.34. *Sejam X e Y espaço de Banach, sendo X imerso continuamente em Y, quer dizer, $X \hookrightarrow Y$. Então qualquer conjunto $M \subset X$ relativamente compacto em X é também relativamente compacto em Y.*

Demonstração. Seja M um conjunto relativamente compacto em X. Lembramos que espaço de Banach é um espaço normado completo. Pelo Teorema 3.2.15 o conjunto M é totalmente limitado em X.

De outro lado, a imersão $i : X \to Y$ definida por $i(x) = x$ $(x \in X)$ é um operador linear e contínuo, logo, pelo Peorema 2.4.29 é uniformemente contínuo. O conjunto M em Y é a imagem do mesmo conjunto M pela aplicação uniformemente contínua i, quer dizer, $M = i(M)$. Pela Proposição 3.2.10 o conjunto M é totalmente limitado em Y. Aplicando mais uma vez um dos critérios do Teorema 3.2.15 concluímos que o o conjunto M é relativamente compacto em Y. □

Teorema 3.2.35. *Sejam X e Y espaços de Banach isomorfos (em particular, linearmente isométricos) por isomorfismo linear $J : X \to Y$. Então, um conjunto $M \subset X$ é relativamente compacto em X, se e somente se, o conjunto $J(M)$ é relativamente compacto em Y.*

Demonstração. Seja M um conjunto relativamente compacto em X. Pelo Teorema 3.2.15 o conjunto M é totalmente limitado em X. Pelo Teorema 2.4.29 o operador J é uniformemente contínuo, então, pela Proposição 3.2.10, o conjunto $J(M)$ é totalmente limitado em Y. Aplicando mais uma vez o Teorema 3.2.15 concluímos que o conjunto $J(M)$ é relativamente compacto em Y.

Reciprocamente, seja o conjunto $J(M)$ relativamente compacto em Y, É claro que M é a imagem do conjunto $J(M)$ pelo operador J^{-1}. Pelo raciocínio análogo do parágrafo anterior, aplicado para o isomorfismo $J^{-1} : Y \to X$ concluímos que M é relativamente compacto em X. □

Capítulo 4

Critérios de compacidade relativa nos espaços de funções continuas com peso

Neste capítulo, primeiro, iremos abordar sobre critérios de compacidade relativa de conjuntos, nos espaços de funções continuas $C(X, Y)$ caso espaços métricos compactos X e Y e no espaço $C[a, b]$. Trata-se dos critérios (condições que são necessárias e suficientes) específicos. Esses critérios chamam-se em Matemáticos como teoremas de Ascoli-Arzelà. Na revisão usaremos as monografias [7], [8] e [10]. Com base destes critérios e ideias de suas demonstrações estabeleceríamos os critérios de compacidade relativa de conjuntos nos espaços $C_\alpha[a, b]$ de funções contínuas com peso.

4.1 Teorema de Ascoli-Arzelà para espaço $C(X, Y)$

Seja X e Y espaços métricos compactos com métricas d e ρ, respectivamente. Na subsecção 3.2.3 foi definido o espaço métrico $T(X, Y)$ constituído de todas as funções $f : X \to Y$, e o seu subespaço $C(X, Y)$ das funções contínuas com a métrica

$$\rho_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} \rho(f(x), g(x)),$$

que, pelo Teorema 3.2.24, é completo. Nesta secção apresentemos o critério de compacidade relativa de um conjunto em $C(X, Y)$.

Definição 4.1.1. Um conjunto $M \subset C(X, Y)$ chama-se **equicontínuo** se

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x_1, x_2 \in X,\ d(x_1, x_2) < \delta)\ (\forall f \in M)\ :\ \rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon. \tag{4.1}$$

Observação 4.1.2. 1. Notemos que a definição do conjunto equicontínuo tem uma semelhança com definição da função uniformemente contínua. Apenas que na definição da equicontinuidade o δ pode ser escolhida simultaneamente para todas funções de M (δ não depende da função) mas na definição da continuidade uniforme o δ, em geral, depende da função.

2. De outro lado cada função $f \in C(X, Y)$ é uniformemente contínua (ver o Teorema 3.2.20 e a Observação 3.2.21). Portanto, isso junto com dito no parágrafo anterior, deixa claro que se, uma função $f : X \to Y$ for contínua, então o conjunto $M = \{f\}$ (que consiste em um só elemento $f \in C(X, Y)$) é equicontínuo. Mais geral, qualquer subconjunto finito $M \subset C(X, Y)$ é equicontínuo.

3. No entanto, um conjunto infinito $M \subset C(X, Y)$, em geral, pode ser equicontínuo ou não (veja também os exemplos na próxima secção), e deste modo, a equicontinuidade de M é a condição mais forte do que apenas a continuidade uniforme de cada função da família M.

4. Em algumas monografias, por exemplo, em [7], [9], [13] e [14] a condição de equicontinuidade de um conjunto M defina-se de modo diferente da Definição 4.1.1, análogo de condição de continuidade uniforme em relação às funções do conjunto M, e em [9] e [14] a condição (4.1) é chamada a equicontinuidade uniforme. Mas nestes livros foi considerada a situação mais geral, quando o espaço X não é necessariamente compacto. Caso do espaço métrico X compacto, a condição de equicontinuidade no sentido dos livros citados e no sentido da Definição 4.1.1 são equivalentes (ver [14, p.154]). Em vários livros de Análise Funcional, tais como [6], [8] e [10], em que se considera o caso do espaço métrico X compacto, a condição de equicontinuidade entende-se no sentido da Definição 4.1.1.

5. Afinal da observação comprida, esclarecemos o sentido de introdução do conceito de equicontinuidade: é uma coisa notável, que a condição de equicontinuidade de um conjunto em $C(X,Y)$ é equivalente a compacidade relativa do conjunto! Este critério é estabelecido no teorema a seguir.

Teorema 4.1.3. [de Ascoli-Arzelà] *Para que um conjunto $M \subset C(X,Y)$ seja relativamente compacto é necessário e suficiente que M seja equicontínuo.*

Demonstração. Vamos usar o esquema da prova em [8, p.110-111], mas realizemos a demonstração com detalhes.

Necessidade. Seja $M \subset C(X,Y)$ um conjunto relativamente compacto. Seja $\varepsilon > 0$. Pelo Teorema 3.2.15 existe $\frac{\varepsilon}{3}$-rede finita para M. Fixemos agora uma $\frac{\varepsilon}{3}$-rede $A = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$. Pelo Teorema 3.2.20 cada uma das funções f_k é uniformemente continua, logo existe $\delta_k \in \mathbb{R}$ tal que

$$[\forall x_1, x_2 \in X : d(x_1,x_2) < 0] \Rightarrow [\rho(f_k(x_1), f_k(x_2)) < \varepsilon] \quad (k = 1,2,3,...,n). \tag{4.2}$$

Seja $\delta = \min\{\delta_k : k = 1,2,\dots,n\}$. É claro que $\delta > 0$.

Tomemos, agora qualquer $f \in M$ e quaisquer $x_1, x_2 \in X$ que satisfazem a condição $d(x_1,x_2) < \delta$. O conjunto A é uma $\frac{\varepsilon}{3}$-rede para M, estão existe $k \in \{1,2,\dots,n\}$ tal que

$$\rho_\infty(f, f_k) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{4.3}$$

Usando 4.2 e 4.3 e os axiomas **M2** e **M3** da métrica obtemos

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) \le \rho(f(x_1), f_k(x_1)) + \rho(f_k(x_1), f_k(x_2)) + \rho(f_k(x_2), f(x_2)) \le$$
$$\rho_\infty(f, f_k) + \rho(f_k(x_1), f_k(x_2)) + \rho_\infty(f_k, f) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Pela Definição 4.1.1, o conjunto M é equicontínuo.

Suficiência. Seja $M \subset C(X,Y)$ equicontínuo. Pelos Teoremas 3.2.22 e Lema 3.2.23 $C(X,Y)$ é um subespaço fechado do espaço métrico completo $T(X,Y)$, então, pelo corolário 3.2.16, é suficiente demonstrar que o conjunto M é relativamente compacto em $T(X,Y)$. Por sua vez, para mostrar este facto, é suficiente (pelo Teorema 3.2.15) $\forall \varepsilon > 0$ construir uma ε-rede finita para M em $T(X,Y)$

Seja $\varepsilon > 0$. Como M é equicontínuo, existe $\delta > 0$ tal que

$$f \in M \;\wedge\; x_1, x_2 \in X \;\wedge\; d(x_1,x_2) < \delta \quad \Rightarrow \quad \rho(f(x_1), f(x_2)) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.4}$$

Escolhemos, agora uma $\frac{\delta}{2}$-rede finita do compacto X, seja $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, e definimos os conjuntos $E_k \subset X$ recursivamente por

$$E_1 = B(u_1, \delta/2), \qquad E_k = B(u_k, \delta/2) \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} B(u_j, \delta/2) \qquad (k = 2,3,\dots,n).$$

Pela construção, $X = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$, sendo que os conjuntos E_k disjuntos dois a dois (de outras palavras, $\{E_k\}$ é uma partição finita de X). Mais ainda, se $x', x'' \in E_k$ para algum k, então temos que

$$d(x', x'') \leq d(x', u_k) + d(u_k, x'') < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Então,

$$x_1, x_2 \in E_k \quad \Rightarrow \quad d(x_1, x_2) < \delta \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.5}$$

Seja $Y_0 = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ uma $\frac{\varepsilon}{2}$-rede do compacto Y. Consideremos o conjunto M_ε que consiste em todas as funções $f : X \to Y$ que tomam os valores no conjunto finito Y_0 e que são constantes em cada um dos conjuntos E_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. É claro que o conjunto M_ε é finito. Mostremos que M_ε é uma ε-rede para M.

Seja $f \in M$ quaisquer. Como Y_0 é uma $\frac{\varepsilon}{2}$-rede para Y, qualquer que seja $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ existe $j(k) \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tal que

$$\rho(f(u_k), y_{j(k)}) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.6}$$

Escolhemos a função $g \in M_\varepsilon$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} y_{j(1)}, & \text{se} \quad x \in E_1 \\ y_{j(2)}, & \text{se} \quad x \in E_2 \\ & \ldots \\ y_{j(n)}, & \text{se} \quad x \in E_n \end{cases}. \tag{4.7}$$

Seja, agora $x \in X$ qualquer. Escolhemos $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $x \in E_k$. Usando (4.4)-(4.7) obtemos

$$\rho(f(x), g(x)) \leq \rho(f(x), f(x_k)) + \rho(f(x_k), g(x_k)) + \rho(g(x_k), g(x)) <$$
$$\frac{\varepsilon}{2} + \rho(f(x_k), y_{j(k)}) + \rho(y_{j(k)}, y_{j(k)}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + 0 = \varepsilon.$$

Assim, $\rho_\infty(f, g) < \varepsilon$. É demonstrado que M_ε é uma ε-rede finita para M. □

4.2 Teoremas de Ascoli-Arzelà para espaço de Banach $C[a, b]$ e consequências

Lembramos (ver a secção 2.4.2) que $C[a, b]$ é o espaço de Banach que consiste em todas as funções contínuas $x : [a; b] \to \mathbb{R}$ e dotado da norma

$$\|x\|_\infty = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|.$$

Definição 4.2.1. Um conjunto $M \subset C[a, b]$ chama-se **equilimitado** ou **uniformemente limitado** se existir um número $R > 0$ tal que qualquer, que sejam $x \in M$ e $t \in [a; b]$ se cumpre $|x(t)| \leq R$.

Definição 4.2.2. Um conjunto $M \subset C[a, b]$ chama-se **equicontínuo** se

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall t_1, t_2 \in [a; b],\ |t_1 - t_2| < \delta)\ (\forall x \in M)\ :\ |x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon.$$

Observação 4.2.3. A condição de equicontinuidade de um conjunto em $C[a,b]$ é semelhante à condição correspondente da definição 4.1.1 (é um caso particular com as métricas padrão d e ρ em $[a;b]$ e $\mathbb{R}$, respectivamente, caso aplicar a definição 4.1.1 a um caso que Y não é necessariamente compacto). Mesmo que na secção anterior notemos que todo $x \in C[a,b]$ é uma função uniformemente contínua (ver a observação 3.2.21), então qualquer conjunto $M = \{x\}$ (que consiste em um só elemento $x \in C[a,b]$), mais geral qualquer subconjunto finito $M \subset C[a,b]$ é equicontínuo.

Observação 4.2.4. A condição de equilimitação de um conjunto $M \subset C[a,b]$ é equivalente a condição

$$\sup_{t\in[a;b],\, x\in M} |x(t)| < \infty,$$

que, por sua vez, é equivalente a condição de limitação do conjunto M no espaço de Banach $C[a,b]$. Notemos que a condição análoga de equilimitação é válida automaticamente no teorema 4.1.3, pois todo o espaço $C(X,Y)$ é limitado por X e Y compactos. Em diferença da situação da secção anterior, para o espaço $C[a,b] = C([a,b],\mathbb{R})$ sendo $X = [a;b]$ compacto, o espaço $Y = \mathbb{R}$ não é compacto, assim todo o espaço $C[a,b]$ não é limitado. Deste modo, a condição de equilimitação de conjunto em $C[a,b]$ é necessário para formulação do critério de compacidade relativa.

Das definições segue directamente a seguinte proposição.

Proposição 4.2.5. *Sejam $M, N \in C[a,b]$ e $M \subset N$. Se o conjunto N é equilimitado (equicontínuo), então o conjuntos M também é equilimitado (equicontínuo, respectivamente).*

Observação 4.2.6. Quatro exemplos abaixo mostram que as propriedades de equilimitação e de equicontinuidade de um conjunto em $C[a,b]$ são independentes. Para cada destes exemplos escolhemos dois conjuntos, um enumerável e outro não enumerável. Outro sentido destes exemplos é para mostrar que as condições de equilimitação e de equicontinuidade podem ser facilmente verificadas para conjuntos concretos.

Exemplo 4.2.7. Qualquer que seja $R > 0$, os conjuntos $M_1 = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ onde $x_n(t) = R\cos(t+n)$ $(t \in [a;b])$ e $N_1 = \{x \in C[a,b] : (\forall t \in [a;b])\ |x(t)| \le R \wedge |x'(t)| \le R\}$ (por x' é designada a função da primeira derivada $x' : [a;b] \to \mathbb{R}$ da função x) são equilimitados e equicontínuos.

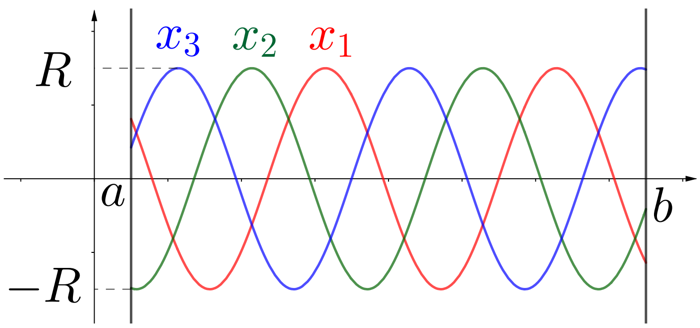

Figura 4.1: As funções $x_n(t) = R\cos(t+n)$ do conjunto M_1

Demonstração. Mostremos as propriedades do exemplo para o conjunto N_1 (para M_1 a demonstração é análoga). O conjunto N_1 é equilimitado, pois $\sup_{t\in[a;b],\, x\in N_1} |x(t)| \le R < \infty$.

Seja $\varepsilon > 0$. Tomemos $\delta = \frac{\varepsilon}{R}$. Para todos $x \in N_1$ e para todos $t_1, t_2 \in [a; b]$ que satisfazem a condição $|t_1 - t_2| < \delta$ obtemos, usando o facto que $x' \in N_1$, pelo teorema de Lagrange[1] (uma consequência do teorema de valor médio do Cálculo Diferencial):

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leq \max_{t \in [a;b]} |x'(t)|\,|t_1 - t_2| \leq R|t_1 - t_2| < R\delta = \varepsilon.$$

Então, o conjunto N_1 é equicontínuo. $\square$

Exemplo 4.2.8. Os conjuntos $M_2 = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ onde $x_n(t) = t + n$ $(t \in [a; b])$ e $N_2 = \{x \in C[a, b] \colon (\forall t \in [a; b])\ |x'(t)| \leq 1\}$ são equicontínuos mas não são equilimitados.

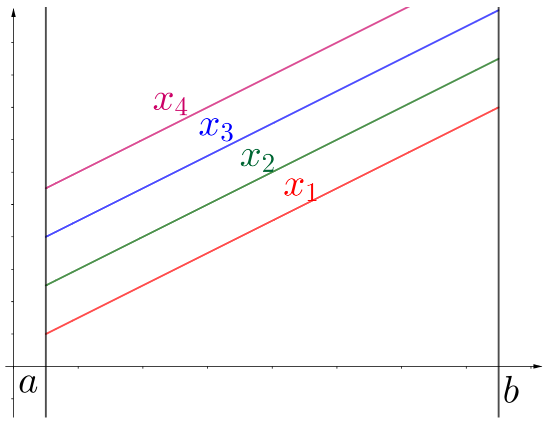

Figura 4.2: As funções $x_n(t) = t + n$ do conjunto M_2

Demonstração. Sejam $\varepsilon > 0$ e $\delta = \varepsilon$. Temos $\forall n \in \mathbb{N}$ e para todos $t_1, t_2 \in [a; b]$ que satisfazem a condição $|t_1 - t_2| < \delta$ que

$$|x_n(t_1) - x_n(t_2)| = |t_1 + n - t_2 - n| = |t_1 - t_2| < \delta = \varepsilon,$$

logo, segundo definição, o conjunto M_2 é equicontínuo.

De outro lado, $\sup\limits_{t \in [a;b],\, x \in M_2} |x(t)| = \sup\limits_{t \in [a;b],\, n \in \mathbb{N}} |t + n| = \infty$, então M_2 não é equilimitado.

A equicontinuidade de N_2 demonstra-se do mesmo modo que no exemplo 4.2.7. N_2 não é equilimitado, pois $\sup\limits_{t \in [a;b],\, x \in N_2} |x(t)| = \infty$. $\square$

Exemplo 4.2.9. Os conjuntos $M_3 = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ onde $x_n(t) = \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^n$ $(t \in [a; b])$ e $N_3 = \{x \in C[a, b] \colon (\forall t \in [a; b])\ |x(t)| \leq 1\}$ (ou N_3 pode ser qualquer bola em $C[a; b]$) são equilimitados mas não são equicontínuos.

Demonstração. É evidente que $\sup\limits_{t \in [a;b],\, x \in M_3} |x(t)| = \sup\limits_{t \in [a;b],\, x \in N_3} |x(t)| = 1 < \infty$, logo, os conjuntos M_3 e N_3 são equilimitados.

Sejam $s_n = a$ e $t_n = a + \frac{b-a}{2n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. É claro que $|t_n - s_n| \to 0$, quando $n \to \infty$, mas

$$|x_n(t_n) - x_n(s_n)| = \left(\frac{b - t_n}{b - a}\right)^n - \left(\frac{b - s_n}{b - a}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n \overset{\text{design.}}{=} c_n \to e^{-1/2}.$$

[1]Joseph Louis Lagrange (1736—1813) — matemático Italiano

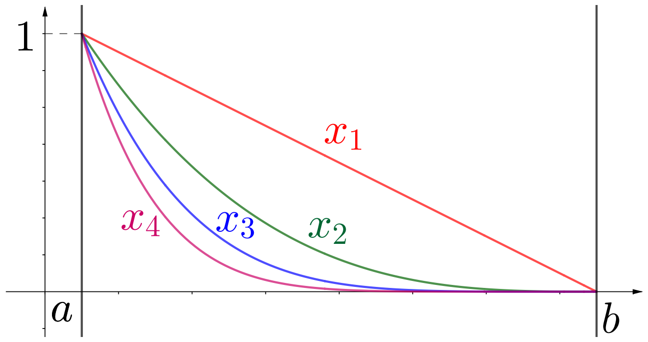

Figura 4.3: As funções $x_n(t) = \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^n$ do conjunto M_3

Mostremos que $\varepsilon_0 = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n > 0$. Primeiro, notemos que $c_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$, logo, $\varepsilon_0 \geq 0$. Em suposição que $\varepsilon_0 = 0$ temos segundo condição $c_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$ que existe uma subsucessão $\{c_{n_k}\}$ que converge para 0. Mas isto é impossível, pois a essa subsucessão, mesmo que $\{c_n\}$ converge para o número positivo $e^{-1/2}$.

É demonstrado que existem $\varepsilon_0 > 0$ e $t_n, s_n \in [a;b]$, tais que $|t_n - s_n| \to 0$ se $n \to \infty$ mas

$$|x_n(t_n) - x_n(s_n)| \geq \varepsilon_0 \qquad n = 1, 2, \dots$$

Isto significa que o conjunto M_3 não é equicontínuo.

Como $M_3 \subset N_3$ temos, pela proposição 4.2.5, que o conjunto N_3 também não é equilimitado. $\square$

Exemplo 4.2.10. Os conjuntos $M_4 = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ onde $x_n(t) = n\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^n$ $(t \in [a;b])$ e $N_4 = C[a;b]$ não são equilimitados nem equicontínuos.

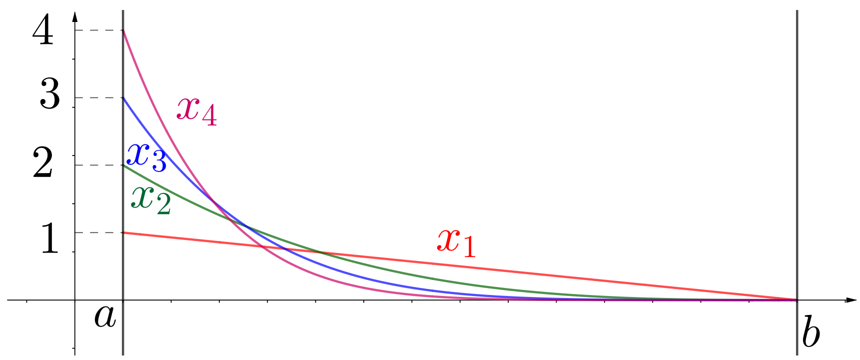

Figura 4.4: As funções $x_n(t) = n\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^n$ do conjunto M_4

Demonstração. Como $M_4 \subset N_4$ é suficiente mostrar as proposições para o conjunto M_4.

$\sup\limits_{t\in[a;b],\, x\in M_4} |x(t)| \geq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n(a)| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} n = \infty$, logo, o conjunto M_3 não é equilimitado.

O facto que M_4 não é equicontínuo demonstra-se do modo análogo que para o conjunto M_3 no exemplo 4.2.10. $\square$

Teorema 4.2.11. [de Ascoli-Arzelà] *Para que um conjunto $M \subset C[a,b]$ seja relativamente compacto é necessário e suficiente que M seja equicontínuo e equilimitado.*

Demonstração. Em diferença da prova em [8], vamos usar a própria demonstração baseada no Teorema 4.1.3.

Necessidade. Seja $M \subset C[a,b]$ um conjunto relativamente compacto. Pelo corolário 3.2.19 M é limitado em $C[a,b]$, o que significa que M é equilimitado.

De outro lado, da limitação de M segue, pela proposição 2.2.11 que existe $R > 0$ tal que $M \subset D_R$ onde

$$D_R = \{x \in C[a,b] \colon (\forall t \in [a;b]) \; |x(t)| \leq R\} \tag{4.8}$$

(a bola fechada no centro em zero do raio R em $C[a,b]$). Pela Proposição 2.2.14 D_r é subespaço métrico fechado do espaço de Banach $C[a,b]$. Pelo corolário 3.2.16 o conjunto M é relativamente compacto no espaço métrico D_R.

Mas D_R representa-se o espaço métrico $C(X,Y)$ considerado na secção anterior onde $X = [a;b]$ e $Y = [-R;R]$ são espaços métricos compactos. Pelo Teorema 4.1.3 o conjunto M é equicontínuo em $C(X,Y)$ no sentido da Definição 4.1.1. É claro, que isto significa a equicontinuidade de M em $C[a,b]$ no sentido da Definição 4.2.2.

Suficiência. Seja $M \subset C[a,b]$ um conjunto equicontínuo e equilimitado. Então, M é limitado em $C[a,b]$, e pela proposição 2.2.11, existe $R > 0$ tal que $M \subset D_R$ onde a bola fechada D_R é Definida por (4.8). Mas D_R representa-se o espaço métrico $C(X,Y)$ onde $X = [a;b]$ e $Y = [-R;R]$ são espaços métricos compactos, e mais ainda, a equicontinuidade de M em $C[a,b]$ significa também a equicontinuidade de M em $C(X,Y)$. Pelo Teorema 4.1.3 o conjunto M é relativamente compacto em $C(X,Y)$. Pela Proposição 2.2.14 $C(X,Y) = D_r$ é um subespaço métrico fechado do espaço de Banach $C[a,b]$. Pelo Corolário 3.2.16 o conjunto M é relativamente compacto em $C[a,b]$. □

Observação 4.2.12. O teorema de Ascoli-Arzelà 4.2.11 é muito útil para verificação de compacidade relativa de conjuntos concretos em $C[a,b]$, pois reduza a verificação das condições gerais do Teorema 3.2.15 para verificação das condições de equicontinuidade e de equilimitação que são específicos para o espaço $C[a,b]$. Assim, dos Exemplos 4.2.7–4.2.10 segue que entre conjuntos M_i e N_i destes exemplos os conjuntos M_1 e N_1 são relativamente compactos em $C[a,b]$ mas os conjuntos M_i e N_i com $i = 2,3,4$ não são relativamente compactos em $C[a,b]$.

Uma área das aplicações do teorema de Ascoli-Arzelà é a teoria da Equações Diferenciais. Formulemos só um teorema correspondente que é o teorema de Peano sobre existência da solução de equação diferenciais não linear. A demonstração este teorema o leitor pode encontrar em [8, p.107-109]

Teorema 4.2.13. [de Peano] *Seja dada a equação diferencial*

$$\frac{dx}{dy} = f(x,y). \tag{4.9}$$

Se a função f é contínua num conjunto limitado e fechado $G \subset \mathbb{R}^2$ com o interior não vazio, então, por qualquer ponto (x_0, y_0), interior a G, passa pelo menos uma curva integral $y = \varphi(x)$ da equação (4.9).

Observação 4.2.14. É interessante que na formulação do teorema de Ascoli-Arzelà, a condição de equilimitação (de limitação uniforme) pode ser substituído pela uma condição mais fraca (do que, no entanto, junto com a equicontinuidade seque a equilimitação). A forma do teorema de Ascoli-Arzelà com tal condição mais fraca tem sentido, pois, na prática, o critério é mais útil na parte da suficiência, isto é, para a dedução da compacidade relativa de conjunto com base do critério.

Definição 4.2.15. Seja M um conjunto de funções $x : [a, b] \to \mathbb{R}$.

M chama-se **limitado no ponto** $\boldsymbol{t \in [a, b]}$ se o conjunto $M_t = \{x(t) \colon x \in M\}$ é limitado em $\mathbb{R}$.

Diremos que M é **limitado num ponto** se existe $t \in [a, b]$ tal que o conjunto M é limitado no ponto t.

É evidente que para um conjunto M de funções $x : [a, b] \to \mathbb{R}$

[M é equilimitado] $\Rightarrow$ [M é limitado em cada ponto $t \in [a, b]$] $\Rightarrow$ [M é limitado num ponto].

É interessante que caso M seja equicontínuo, todas três condições desta cadeia serão equivalentes, o que segue do seguinte lema.

Lema 4.2.16. *Se $M \subset C[a, b]$ é um conjunto equicontínuo e limitado num ponto então M é equilimitado.*

Demonstração. Seja o conjunto M é limitado num ponto $t \in [a, b]$, então, existe $R > 0$ tal que

$$|x(t)| \leq R, \qquad x \in M \tag{4.10}$$

Escolhemos segundo a condição de equicontinuidade de M um número $\delta > 0$ tal que

$$[\, t', t'' \in [a; b],\ |t' - t''| \leq \delta,\ x \in M] \ \Rightarrow\ [\ |x(t') - x(t'')| \leq \varepsilon\ ]. \tag{4.11}$$

Tomemos algum $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo a condição $n > \frac{1}{(b-a)\delta}$ e consideremos os pontos $t_k = \left(1 - \frac{k}{n}\right) a + \frac{k}{n} b$ $(k = 0, 1, \dots n)$. Notemos que $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ e

$$|t_k - t_{k-1}| = \left(\left(1 - \frac{k}{n}\right) a + \frac{k}{n} b - \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) a - \frac{k-1}{n}\right) = \frac{b-a}{n} \leq \delta, \qquad k = 1, 2, \dots, n. \tag{4.12}$$

Seja, agora, $s \in [a; b]$ qualquer satisfazendo a condição $s > t$. Existem índices $i, k \in \{0, 1, \dots, n\}$ tais que $|t - t_k| \leq \delta$ e $|s - t_{k+i}| \leq \delta$.

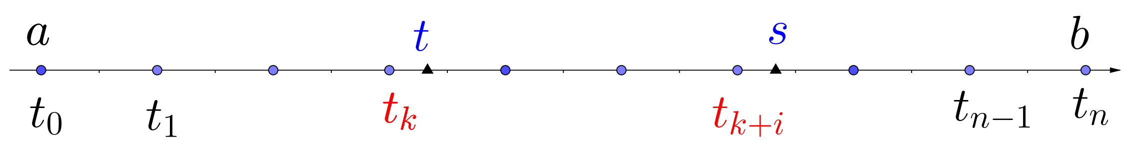

Figura 4.5: Escolha de t_k e t_{k+i} na demonstração do lema 4.2.16

Daqui e de (4.10)–(4.12) segue $\forall x \in M$:

$$|x(s)| \leq |x(s) - x(t)| + |x(t)| \leq |x(s) - x(t_{k+i})| + \sum_{j=1}^{i} |x(t_{k+j}) - x(t_{k+j-1})| +$$
$$|x(t_k) - x(t)| + |x(t)| \leq 1 + i + 1 + |x(t)| \leq R_1,$$

onde a constante finita $R_1 = R + n + 3$ não depende de $x \in M$ e de $s \in [a; b]$. Portanto, o conjunto M é equilimitado. O caso $s < t$ considera-se de modo análogo. $\square$

O Teorema 4.2.11 e o Lema 4.2.16 implica directamente a seguinte forma do critério de compacidade relativa em $C[a,b]$ que é conveniente para utilização prática.

Teorema 4.2.17. [de Ascoli-Arzelà] *Para que um conjunto $M \subset C[a,b]$ seja relativamente compacto é necessário e suficiente que M seja equicontínuo e limitado num ponto.*

Formulemos as condições suficientes de compacidade relativa de um conjunto em $C[a,b]$ que são mais fortes do que as condições de equicontinuidade e da limitação num ponto, e deste modo não são necessárias. No entanto, essas condições suficientes podem ser úteis na prática, pois são mais simples não sua verificação para conjuntos concretos, do que a verificação directa da condição de equicontinuidade.

Corolário 4.2.18. *Se um conjunto $M \subset C[a,b]$ é limitado num ponto e existe uma função $\psi :]0;\infty[\to]0;\infty[$ com a propriedade $\lim_{s\to 0+} \psi(s) = 0$ e tal que*

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leq \psi(|t_1 - t_2|) \qquad (t_1, t_2 \in [a;b],\ x \in M), \tag{4.13}$$

então o conjunto M é relativamente compacto em $C[a,b]$.

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$. Escolhemos $\delta > 0$ tal que $0 < s < \delta \ \Rightarrow\ \psi(s) < \varepsilon$. Então, para todos $t_1, t_2 \in [a;b]$ que satisfazem a condição $s = |t_1 - t_2| < \delta$ e para todo $x \in M$ temos segundo (4.13) que $|x(t_1) - x(t_2)| \leq \psi(s) < \varepsilon$. Então o conjunto M é equilimitado. Pelo teorema 4.2.17 o conjunto M é relativamente compacto em $C[a,b]$. □

Corolário 4.2.19. *Se um conjunto $M \subset C[a,b]$ é limitado num ponto e satisfaz a condição de Lipschitz*[2]

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leq L|t_1 - t_2| \qquad (t_1, t_2 \in [a;b],\ x \in M),$$

onde a constante de Lipschitz $L < +\infty$ não depende de t_1, t_2 e de x, então o conjunto M é relativamente compacto em $C[a,b]$.

Demonstração. É suficiente aplicar o corolário 4.2.18 onde $\psi(t) = Lt$ $(t > 0)$. □

Corolário 4.2.20. *Se um conjunto $M \subset C[a,b]$ é limitado num ponto e existe uma constante finta R tal que*

$$|x'(t)| \leq R \qquad (t \in [a;b],\ x \in M), \tag{4.14}$$

então o conjunto M é relativamente compacto em $C[a,b]$.

Demonstração. Pelo teorema de Lagrange

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leq \max_{t\in[a;b]} |x'(t)|\, |t_1 - t_2| \leq R|t_1 - t_2| \qquad (t_1, t_2 \in [a;b],\ x \in M),$$

tal que M satisfaz a condição de Lipschitz. Pelo corolário 4.2.19 o conjunto M é relativamente compacto em $C[a,b]$. □

Do corolário 4.2.20 decorre imediatamente que conjunto N_1 do exemplo 4.2.7 é relativamente compacto em $C[0,1]$.

Observação 4.2.21. A condição (4.14) esclareça o sentido geométrico da condição de equicontinuidade. Caso M consta das funções diferenciáveis, M é equicontínuo se e somente se a as inclinações dos gráficos das funções de M são limitadas. Isto pode ser ilustrado por meio dos gráficos das funções dos conjuntos M_i $(i = 1,2,3,4)$ nas figuras 4.1–4.4.

[2] Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832—1903) — matemático Alemão

4.3 Noção e as propriedades dos espaços com peso $C_\alpha[a, b]$

Além do espaço $C[a, b]$ definimos o espaço linear $C(a, b)$ que consiste em todas as funções contínuas $x :]a; b[\to \mathbb{R}$, dotado das operações algébricas usuais (ver o Exemplo 2.3.4), que no entanto, em diferença de $C[a, b]$, não admite o estrutura de um espaço normado.

Definição 4.3.1. Vamos dizer que uma função $x \in C(a, b)$ **admite a prolongação contínua em $[a; b]$** se existir uma função $\widetilde{x} \in C[a, b]$ tal que $\widetilde{x}|_{]a;b[} = x$ (a restrição de $\widetilde{x}$ para intervalo aberto $]a; b[$ coincide com a x.

É evidente o seguinte lema.

Lema 4.3.2. *Uma função $x \in C(a, b)$ admite a prolongação contínua em $[a, b]$ se e somente se existem limites laterais finitos $c = \lim\limits_{t \to a^+} x(t)$ e $d = \lim\limits_{t \to b^-} x(t)$. Caso existir, a prolongação contínua $\widetilde{x}$ de $x \in C(a, b)$ em $[a; b]$ é única, sendo $\widetilde{x}(a) = c$ e $\widetilde{x}(b) = d$.*

Lema 4.3.3. *Para que uma função $x \in C(a, b)$ admita a prolongação contínua em $[a, b]$ é necessário que x seja limitada.*

Demonstração. Suponhamos que uma função $x \in C(a, b)$ não é limitada. Pelo Teorema 3.1.26, $\forall n \in \mathbb{N}$ satisfazendo a condição $\frac{2}{n} < b - a$ a restrição da função x para o segmento $A_n = \left[a + \frac{1}{n}; b - \frac{1}{n}\right]$ é uma função limitada. Daqui e do facto que x não é limitada em $]a; b[$ segue que existe uma sucessão $\{t_n\}$ dos pontos do intervalo $]a; b[$ tal que t_n converge à direita para a ou à esquerda para b e $\lim\limits_{n \to \infty} |x(t_n)| = +\infty$. Deste modo, pelo menos um dos limites $\lim\limits_{t \to a+0} x(t)$ ou $\lim\limits_{t \to b-0} x(t)$ não existe ou toma um dos valores $\pm\infty$. Pelo Lema 4.3.2, a função x não admite a prolongação contínua em $[a; b]$. $\square$

Exemplo 4.3.4. Pelo lema 4.3.3, as funções $x, y \in C(0, 1)$ definidas por $x(t) = t^{-p}$ e $y(t) = (1 - t)^{-p}$ (onde $p > 0$) não admitem a prolongação contínua em $[0; 1]$.

Observação 4.3.5. A condição de limitação de uma função $x \in C(a, b)$ é necessária para prolongação contínua em $[a; b]$ mas não é suficiente. Por exemplo, a função $x \in C(0, 1)$ definida por $x(t) = \operatorname{sen} \frac{1}{t}$ é limitada mas não admite a prolongação contínua em $[0; 1]$, pois o limite $\lim\limits_{t \to 0+} x(t)$ não existe.

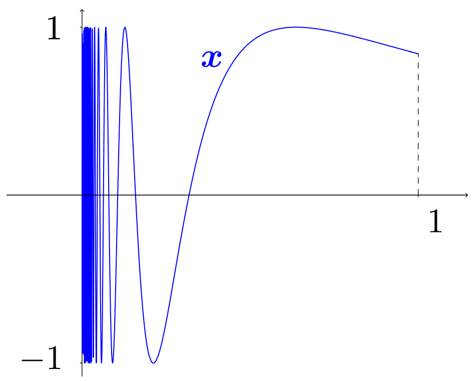

Figura 4.6: A função $x(t) = \operatorname{sen} \frac{1}{t}$, $t \in]0; 1]$

Observação 4.3.6. Para simplificar as notações, caso uma função $x \in C(a,b)$ admite a prolongação contínua em $[a,b]$, então para essa única prolongação, vamos usar o mesmo símbolo x (seja mais correcto para usar um outro símbolo, por exemplo, $\widetilde{x}$, que, no entanto, seja complicar a linguagem matemática). Segundo nossa ligação, podemos o facto que uma função $x \in C(a,b)$ admite a prolongação contínua em $[a,b]$ descrever de modo simbólico como $x \in C[a,b]$.

Designemos por $C_+(a,b)$ o conjunto das funções contínuas $\alpha :]a;b[\to]0;\infty[$, isto é, o subconjunto das funções positivas de $C(a,b)$. O conjunto $C_+(a,b)$ vamos chamar **conjunto dos pesos**.

Consideremos uma certa função $\alpha \in C_+(a,b)$.

Definição 4.3.7. Dada função $x \in C(a,b)$, vamos dizer que x é **contínua em $[a;b]$ com peso α**, se a função αx admite a prolongação contínua em $[a;b]$, ou seja $\alpha x \in C[a,b]$. A totalidade das funções contínuas em $[a;b]$ com peso α designamos por $C_\alpha[a,b]$.

Proposição 4.3.8. *O conjunto $C_\alpha[a,b]$ dotado das operações algébricas usuais e da norma*

$$\|x\|_{\infty,\alpha} = \max_{t\in[a;b]} \alpha(t)|x(t)|,$$

é um espaço de Banach.

Demonstração. E claro que $C_\alpha[a,b]$ dotado das operações algébricas

$$(x+y)(t) = x(t) + y(t), \qquad (cx)(t) = c \cdot x(t), \qquad (\forall t \in]a;b[),$$

para todos $x, y \in C[a,b]$ e $c \in \mathbb{R}$, é um espaço linear sobre $\mathbb{R}$. Nesse espaço, o elemento nulo é a função $\theta(t) = 0, \forall t \in]a;b[$.

Depois, como $\alpha x \in C[a,b]$ temos $\alpha|x| \in C[a,b]$, e deste modo o funcional $\|\cdot\|_{\infty,\alpha} : C_\alpha[a,b] \to [0,\infty[$ está definido correctamente. Os axiomas (N1), (N2) e (N3) para este funcional verificam-se simplesmente.

Finalmente a completação no espaço normado $C_\alpha[a,b]$ demonstra-se de modo análogo que no teorema 3.2.22. $\square$

Observação 4.3.9. O espaço de Banach clássico $C[a,b]$ é um caso especial do espaço com peso $C_\alpha[a,b]$, quando $\alpha(t) \equiv 1$. Dados $\alpha, \beta \in C_+(a,b)$ podem ser quatro alternativas:

1. $C_\alpha[a,b] = C_\beta[a,b]$ (igualdade dos espaços lineares mas não dos espaços normados);
2. $C_\alpha[a,b] \neq C_\beta[a,b]$ mas $C_\alpha[a,b] \supset C_\beta[a,b]$;
3. $C_\alpha[a,b] \neq C_\beta[a,b]$ mas $C_\alpha[a,b] \subset C_\beta[a,b]$;
4. $C_\alpha[a,b] \not\supset C_\beta[a,b]$ e $C_\alpha[a,b] \not\subset C_\beta[a,b]$.

Apresentemos quatro exemplos correspondentes no caso $\beta(t) \equiv 1$ e $[a;b] = [0;1]$.

Exemplo 4.3.10. Se $\alpha(t) = e^t$, então uma função $x :]0;1[\to \mathbb{R}$ pertence a $C[0,1]$ se e somente se a função αx pertence a $C[0;1]$, e deste modo $C_\alpha[a,b] = C[a,b]$.

Exemplo 4.3.11. Seja $\alpha(t) = t^p$ onde $p > 0$. Se $x \in C[0,1]$, então, $y = \alpha x \in C[0;1]$, deste modo $x \in C_\alpha[0,1]$. É mostrado que $C_\alpha[a,b] \supset C[a,b]$. De outro lado, para a função $u(t) = t^{-p}$ temos que $u \notin C[0,1]$ mas $(\alpha u)(t) \equiv 1$, tal que $\alpha u \in C[0,1]$, respectivamente, $u \in C_\alpha[0,1]$. Assim, $C_\alpha[a,b] \neq C[a,b]$.

Exemplo 4.3.12. Seja $\alpha(t) = t^{-p}$ onde $p > 0$. Se $x \in C_\alpha[0,1]$, então, $y = \alpha x \in C[0;1]$, deste modo $x(t) = t^p y(t)$ tal que $x \in C[0,1]$. É mostrado que $C_\alpha[a,b] \subset C[a,b]$. De outro lado, para a função $u(t) \equiv 1$ temos que $u \in C[0,1]$ mas $\lim\limits_{t\to 0+} \alpha(t)u(t) = \lim\limits_{t\to 0+} t^{-p} = +\infty$, então $\alpha u \notin C[0,1]$, respectivamente, $u \notin C_\alpha[0,1]$. Assim, $C_\alpha[a,b] \neq C[a,b]$.

Exemplo 4.3.13. Seja $\alpha(t) = \frac{1-t}{t}$. Para a função $u(t) \equiv 1$ temos que $u \in C[0,1]$ mas $\lim\limits_{t\to 0+} \alpha(t)u(t) = \lim\limits_{t\to 0+} \dfrac{1-t}{t} = +\infty$, então $\alpha u \notin C[0,1]$, respectivamente, $u \notin C_\alpha[0,1]$. Assim, $C_\alpha[a,b] \not\supset C[a,b]$. Para a função $v(t) = \frac{t}{1-t}$ temos que $v \notin C[0,1]$ mas $(\alpha v)(t) \equiv 1$, tal que $\alpha v \in C[0,1]$, respectivamente, $v \in C_\alpha[0,1]$. Assim, $C_\alpha[a,b] \not\subset C[a,b]$.

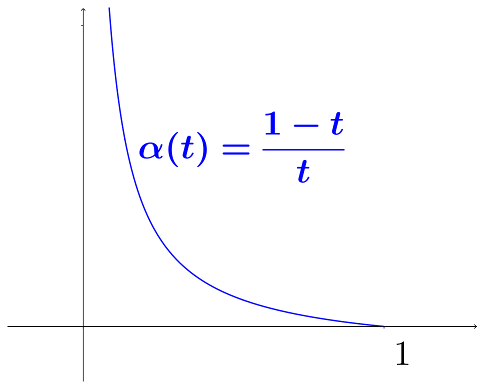

Figura 4.7: A função de peso $\alpha(t) = \frac{1-t}{t}$, $t \in]0;1[$

Estudaremos mais profundamente a relação entre espaços de Banach $C_\alpha[a,b]$ e $C_\beta[a,b]$ com pesos α e β diferentes de modo análogo que foi feito na secção 2.1 do trabalho [12] para espaços de funções integráveis com peso. No entanto, a investigação para as funções contínuas tem muitos elementos específicos.

Teorema 4.3.14. *Sejam $\alpha, \beta \in C_+(a,b)$. Para que seja $C_\alpha[a,b] \subset C_\beta[a,b]$ é necessário e suficiente que a função $\frac{\beta}{\alpha}$ admita a prolongação contínua em $[a;b]$, quer dizer, $\frac{\beta}{\alpha} \in C[a,b]$.*

Mais ainda, caso $\frac{\beta}{\alpha} \in C[a,b]$ temos que

$$\|x\|_{\infty,\beta} \le c_{\alpha,\beta} \|x\|_{\infty,\alpha}, \qquad x \in C_\alpha[a,b],$$

onde

$$c_{\alpha,\beta} = \left\| \frac{\beta}{\alpha} \right\|_\infty = \max_{t\in[a;b]} \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} < \infty,$$

tal que a aplicação $i : C_\alpha[a,b] \to C_\beta[a,b]$ definida por $i(x) = x$ é uma imersão, ou seja $C_\alpha[a,b] \hookrightarrow C_\beta[a,b]$.

Demonstração. Suficiência. Seja $\frac{\beta}{\alpha} \in C[a,b]$. Se $x \in C_\alpha[a,b]$, então pela definição, $\alpha x \in C[a,b]$, tal que $\beta x = \frac{\beta}{\alpha}(\alpha x) \in C[a,b]$ (como o produto das funções $\frac{\beta}{\alpha}$ e αx, ambas contínuas em $[a;b]$). De $\beta x \in C[a,b]$ segue, segundo definição, que $x \in C_\beta[a,b]$. É mostrado que $C_\alpha[a,b] \subset C_\beta[a,b]$.

Necessidade. Seja $\frac{\beta}{\alpha} \notin C[a,b]$. Então pelo menos um dos limites $\lim\limits_{t\to a+0} \alpha(t)$ ou $\lim\limits_{t\to b-0} \alpha(t)$ não existe ou toma o valor $+\infty$. Suponhamos que isto é válido para o limite, quando $t \to a+0$.

Definamos a função $u \in C(a,b)$ por $u(t) = \alpha^{-1}(t)$. Temos que $(\alpha u)(t) \equiv 1$, logo, $\alpha u \in C[a,b]$, e, respectivamente $u \in C_\alpha[a,b]$. Temos, no entanto,

$$\lim_{t\to a+0} (\beta u)(t) = \lim_{t\to a+0} \frac{\beta(t)}{\alpha(t)}$$

mas o limite na parte direita não existe ou é igual a $+\infty$. Temos, assim que $\beta u \notin C[a,b]$, e, respectivamente, $u \notin C_\beta[a,b]$. O caso, quando $\lim\limits_{t\to b-0} \alpha(t)$ não existe ou toma o valor $+\infty$, considera-se analogamente. É mostrado que $C_\alpha[a,b] \not\subset C_\beta[a,b]$.

Seja, agora, $\frac{\alpha}{\beta} \in C[a,b]$. Qualquer que seja $x \in C_\alpha[a,b]$ temos que

$$\|x\|_{\infty,\beta} = \max_{t\in[a;b]} \beta(t)|x(t)| = \max_{t\in[a;b]} \left(\frac{\beta(t)}{\alpha(t)} \cdot \alpha(t)|x(t)| \right) \le \max_{t\in[a;b]} \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} \cdot \max_{t\in[a;b]} \alpha(t)|x(t)| = c_{\alpha,\beta}\|x\|_{\infty,\alpha}.$$

O teorema está demonstrado. □

Teorema 4.3.15. *Sejam $\alpha, \beta \in C_+(a,b)$. Para que seja $C_\alpha[a,b] = C_\beta[a,b]$ é necessário e suficiente que sejam $\beta\alpha^{-1} \in C[a,b]$ e $\alpha\beta^{-1} \in C[a,b]$.*

Mais ainda, caso $C_\alpha[a,b] = C_\beta[a,b]$ temos que

$$c_{\beta,\alpha}^{-1}\|x\|_{\infty,\alpha} \le \|x\|_{\infty,\beta} \le c_{\alpha,\beta}\|x\|_{\infty,\alpha}, \qquad x \in C_\alpha[a,b],$$

onde

$$c_{\alpha,\beta} = \left\|\beta\alpha^{-1}\right\|_\infty < \infty, \quad c_{\beta,\alpha}^{-1} = \left(\|\alpha\beta^{-1}\|\right)^{-1} = \min_{t\in[a;b]} |\beta(t)\alpha^{-1}(t)| > 0,$$

tal que a aplicação $i : C_\alpha[a,b] \to C_\beta[a,b]$ definida por $i(x) = x$ é um isomorfismo de espaços de Banach.

Aplicando os teoremas 4.3.14 e 4.3.15 para os casos especiais, quando $\alpha(t) \equiv 1$ ou $\beta(t) \equiv 1$ obtemos os seguintes corolários.

Corolário 4.3.16. *Seja $\alpha \in C_+(a,b)$. Para que seja $C[a,b] \subset C_\alpha[a,b]$ é necessário e suficiente que $\alpha \in C[a,b]$.*

Mais ainda, caso $\alpha \in C[a,b]$ temos que

$$\|x\|_{\infty,\alpha} \le c_{1,\alpha}\|x\|_\infty, \qquad x \in C[a,b],$$

onde $c_{1,\alpha} = \|\alpha\|_\infty < \infty$, tal que a aplicação $i : C[a,b] \to C_\alpha[a,b]$ definida por $i(x) = x$ é uma imersão, ou seja $C[a,b] \hookrightarrow C_\alpha[a,b]$.

Corolário 4.3.17. *Seja $\alpha \in C_+(a,b)$. Para que seja $C_\alpha[a,b] \subset C[a,b]$ é necessário e suficiente que $\alpha^{-1} \in C[a,b]$.*

Mais ainda, caso $\alpha^{-1} \in C[a,b]$ temos que

$$\|x\|_\infty \le c_{\alpha,1}\|x\|_{\infty,\alpha}, \qquad x \in C_\alpha[a,b],$$

onde $c_{\alpha,1} = \|\alpha^{-1}\|_\infty < \infty$, tal que a aplicação $i : C_\alpha[a,b] \to C[a,b]$ definida por $i(x) = x$ é uma imersão, ou seja $C_\alpha[a,b] \hookrightarrow C[a,b]$.

Corolário 4.3.18. *Seja $\alpha \in C_+(a,b)$. Para que seja $C[a,b] = C_\alpha[a,b]$ é necessário e suficiente que sejam $\alpha, \alpha^{-1} \in C[a,b]$.*

Mais ainda, caso $\alpha, \alpha^{-1} \in C[a,b]$ temos que

$$c_-\|x\|_\infty \le \|x\|_{\infty,\alpha} \le c_+\|x\|_\infty, \qquad x \in C[a,b],$$

onde $c_+ = \max\limits_{t\in[a,b]} |\alpha(t)| < \infty$ e $c_- = \min\limits_{t\in[a,b]} |\alpha(t)| > 0$, tal que a aplicação $i : C[a,b] \to C_\alpha[a,b]$ definida por $i(x) = x$ é um isomorfismo de espaços de Banach.

Confirmamos as conclusões dos exemplos 4.3.10–4.3.13, mas não por a verificação direita mas com base dos corolários 4.3.16–4.3.18.

Exemplo 4.3.19. Seja $\alpha(t) = e^t$. Temos que $\alpha, \alpha^{-1} \in C[0,1]$, então, pelo corolário 4.3.18 $C[a,b] = C_\alpha[a,b]$ e $\|x\|_\infty \le \|x\|_{\infty,\alpha} \le e\|x\|_\infty$ $(x \in C[a,b])$.

Exemplo 4.3.20. Seja $\alpha(t) = t^p$ onde $p > 0$.

Temos que $\alpha \in C[0,1]$, então, pelo Corolário 4.3.16 $C[a,b] \subset C_\alpha[a,b]$ e $\|x\|_{\infty,\alpha} \le \|x\|_\infty$ $(x \in C[a,b])$.

Temos que $\alpha^{-1} \notin C[0,1]$, então, pelo Corolário 4.3.17 $C_\alpha[a,b] \not\subset C[a,b]$.

Exemplo 4.3.21. Seja $\alpha(t) = t^{-p}$ onde $p > 0$.

Temos que $\alpha \notin C[0,1]$, então, pelo Corolário 4.3.17 $C[a,b] \not\subset C_\alpha[a,b]$.

Temos que $\alpha^{-1} \in C[0,1]$, então, pelo Corolário 4.3.16 $C_\alpha[a,b] \subset C[a,b]$ e $\|x\|_\infty \le \|x\|_{\infty,\alpha}$ $(x \in C_\alpha[a,b])$.

Exemplo 4.3.22. Seja $\alpha(t) = \frac{1-t}{t}$. É claro que $\alpha \notin C[0,1]$ e $\alpha^{-1} \notin C[0,1]$. Então, pelos Corolários 4.3.17 e 4.3.17, temos que $C[a,b] \not\subset C_\alpha[a,b]$ e $C_\alpha[a,b] \not\subset C[a,b]$.

Observação 4.3.23. Os Teoremas 4.3.14 e 4.3.15 mostram que a aplicação $i(x) = x$ não sempre é isomorfismo dos espaços $C_\alpha[a,b]$ e $C_\beta[a,b]$ com pesos α, β diferentes (só no caso $\alpha\beta^{-1}, \beta\alpha^{-1} \in C[a,b]$. Em contraste com este facto, realmente todo o espaço $C_\alpha[a,b]$ com peso é isomorfo ao espaço $C[a.b]$, mais ainda, é linearmente isométrico, mas pelo uma outra isometria diferente da aplicação $i(x) = x$. Vamos apresentar o teorema correspondente que, por sua vez, será uma base da generalização dos critérios de compacidade relativa de conjunto $C[a,b]$ para os espaços com peso $C_\alpha[a,b]$.

Teorema 4.3.24. *Qualquer que seja $\alpha \in C_+(a,b)$ os espaços de Banach $C_\alpha[a,b]$ e $C[a,b]$ são linearmente isométricos por a isometria linear $J_\alpha : C_\alpha[a,b] \to C[a,b]$ definida por $J_\alpha(x) = \alpha x$.*

Demonstração. Se $x \in C_\alpha[a,b]$, então $\alpha x \in C[a,b]$, tal que a expressão $J_\alpha(x) = \alpha x$ define o operador $J_\alpha : C_\alpha[a,b] \to C[a,b]$.

O operador J_α é linear, pois $\forall x, y \in C_\alpha[a,b]$ e $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ temos

$$[J_\alpha(c_1 x + c_2 y)](t) = \alpha(t)(c_1 x + c_2 y)(t) = c_1\alpha(t)x(t) + c_2\alpha(t)y(t) =$$
$$c_1[J_\alpha x](t) + c_1[J_\alpha y](t), \qquad t \in]a;b[,$$

tal que $J_\alpha(c_1 x + c_2 y) = c_1 J_\alpha x + c_2 J_\alpha y$.

Sejam θ_α e θ os elementos zeros dos espaços $C_\alpha[a,b]$ e $C[a,b]$, respectivamente. Se $J_\alpha x = \theta$, então $\alpha(t)x(t) = 0$ para todo $t \in]a;b[$. Como $\alpha(t) > 0$ $(t \in]a;b[)$, temos que $x(t) \equiv 0$ em $]a;b[$, tal que $x = \theta_\alpha$. É mostrado que $\ker J_\alpha = \{\theta_\alpha\}$, então o operador J_α é injectivo.

Seja $y \in C[a,b]$ qualquer. A função $x :]a;b[\to \mathbb{R}$ definida por $x(t) = \alpha^{-1}(t)y(t)$ $(t \in]a;b[)$, é, evidentemente, contínua, quer dizer $x \in C(a,b)$. Mais ainda, $\alpha x = \alpha\left(\alpha^{-1} y\right) = y \in C[a,b]$, tal que, pela definição, $x \in C_\alpha[a,b]$ e $J_\alpha(x) = \alpha x = y$. Então, o operador J_α é sobrejectivo. Daqui segue, junto com a injectividade de J_α mostrada no parágrafo anterior, que o operador J_α é bijectivo.

Finalmente, $\forall x \in C_\alpha[a,b]$ temos, atendendo que $\alpha(t) > 0$ para $t \in]a;b[$:

$$\|J_\alpha(x)\|_\infty = \|\alpha x\|_\infty = \max_{t \in [a;b]} \alpha(t)|x(t)| = \|x\|_{\infty,\alpha},$$

o que significa que J_α é uma isometria. $\square$

Corolário 4.3.25. *Quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in C_+(a,b)$ os espaços de Banach $C_\alpha[a,b]$ e $C_\beta[a,b]$ são linearmente isométricos por a isometria linear $J_{\alpha,\beta} : C_\alpha[a,b] \to C_\beta[a,b]$ definida por $J_{\alpha,\beta}(x) = \beta^{-1}\alpha x$.*

Demonstração. Pelo teorema 4.3.24, o operador J_α definido por $J_\alpha(x) = \alpha x$ é uma isometria linear de $C_\alpha[a,b]$ para $C[a,b]$, e também, o operador J_β^{-1} (onde J_β define-se por $J_\beta(x) = \beta x$) é uma isometria linear de $C[a,b]$ para $C_\beta[a,b]$. Então, o operador $J_{\alpha,\beta} = J_\beta^{-1} J_\alpha$ é uma isometria linear de $C_\alpha[a,b]$ para $C_\beta[a,b]$. É evidente que $J_{\alpha,\beta}(x) = \beta^{-1}\alpha x$ $(\forall x \in C_\alpha[a,b])$. □

4.4 Critérios de compacidade relativa nos espaços $C_\alpha[a,b]$ e consequências

Seja $\alpha \in C_+(a,b)$.

O objectivo desta subsecção é estabelecer o critério geral de compacidade no espaço das funções contínuas com peso $C_\alpha[a,b]$, apresentar algumas condições suficientes e analisar a compacidade relativa em alguns casos especiais do peso α relativamente a relação entre espaços $C_\alpha[a,b]$ e $C[a,b]$ (com peso e sem peso).

Todos resultados desta subsecção são próprios e, aparentemente, novos, pelo menos não encontraram fontes onde foram publicados relutados similares.

Definição 4.4.1. Diremos que um conjunto $M \subset C_\alpha[a,b]$ é **equilimitado com peso $\boldsymbol{\alpha}$**, ou simplesmente **$\boldsymbol{\alpha}$-equilimitado** se existir um número $R > 0$ tal que qualquer, que sejam $x \in M$ e $t \in [a;b]$ se cumpre $\alpha(t)|x(t)| \le R$.

Observação 4.4.2. A condição de equilimitação de um conjunto $M \subset C_\alpha[a,b]$ é equivalente a condição

$$\sup_{t\in[a;b],\ x\in M} \alpha(t)|x(t)| < \infty,$$

que, por sua vez, é equivalente a condição de limitação do conjunto M no espaço de Banach $C_\alpha[a,b]$.

Definição 4.4.3. Diremos que um conjunto $M \subset C_\alpha[a,b]$ é **equicontínuo com peso $\boldsymbol{\alpha}$**, ou simplesmente **$\boldsymbol{\alpha}$-equicontínuo** se

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall t_1, t_2 \in [a;b],\ |t_1 - t_2| < \delta)\ (\forall x \in M)\ :\ |\alpha(t_1)x(t_1) - \alpha(t_2)x(t_2)| < \varepsilon.$$

Os resultados principais das subsecção são os seguintes dois critérios.

Teorema 4.4.4. *Para que um conjunto $M \subset C_\alpha[a,b]$ seja relativamente compacto é necessário e suficiente que M seja α-equicontínuo e α-equilimitado.*

Demonstração. Seja $M \subset C_\alpha[a,b]$.

Pelo teorema 4.3.24 o operador $J_\alpha : C_\alpha[a,b] \to C[a,b]$ definido por $J_\alpha(x) = \alpha x$, é uma isometria linear dos espaços de Banach. Pelo teorema 3.2.35, o conjunto M é relativamente compacto em $C_\alpha[a,b]$, se e somente se, o conjunto $J(M) = \{\alpha x \colon x \in M\}$ é relativamente compacto em $C[a,b]$.

Por sua vez, pelo teorema de Ascoli-Arzelà 4.2.11, o conjunto $J(M)$ é relativamente compacto em $C[a,b]$ se e somente se é equicontínuo e equilimitado.

Das definições 4.2.1 e 4.4.1 segue directamente que o conjunto M é α-equilimitado, se e somente se, o conjunto $J(M)$ é equilimitado.

Das definições 4.2.2 e 4.4.3 decorre que o conjunto M é α-equicontínuo, se e somente se, o conjunto $J(M)$ é equicontínuo.

As conclusões dos quatro parágrafos anteriores implica o critério do teorema. □

Segundo definição 4.2.15, um conjunto $M \subset C_\alpha[a,b]$ é **limitado num ponto $\boldsymbol{t} \in]\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}[$** se existir $t \in]a;b[$ tal que o conjunto $M_t = \{x(t)\colon x \in M\}$ é limitado em $\mathbb{R}$.

Teorema 4.4.5. *Para que um conjunto $M \subset C_\alpha[a,b]$ seja relativamente compacto é necessário e suficiente que M seja α-equicontínuo e limitado num ponto $t \in]a,b[$.*

Demonstração. Seja $M \subset C_\alpha[a,b]$.

Pelos teoremas 4.3.24 e 3.2.35 conjunto M é relativamente compacto em $C_\alpha[a,b]$, se e somente se, o conjunto $J(M) = \{\alpha x\colon x \in M\}$ é relativamente compacto em $C[a,b]$.

Pelo teoremas 4.2.11 e 4.2.17, o conjunto $J(M)$ é relativamente compacto em $C[a,b]$ se e somente se é equicontínuo e equilimitado num ponto $t \in]a;b[$.

Das definições 4.2.2 e 4.4.3 decorre que o conjunto M é α-equicontínuo, se e somente se, o conjunto $J(M)$ é equicontínuo.

É claro que dado $t \in]a;b[$, o conjunto $\{x(t)\colon x \in M\}$ é limitado em $\mathbb{R}$ se e somente se o conjunto $\{\alpha(t)x(t)\colon x \in M\}$ é limitado em $\mathbb{R}$. Então, as condições de limitação num ponto $t \in]a;b[$ para os conjuntos M e $J(M)$ são equivalentes.

As conclusões dos quatro parágrafos anteriores implica o critério do teorema. □

Observação 4.4.6. Em diferença do teorema 4.2.17, no teorema 4.4.5 a condição de equilimitação num ponto $t \in]a;b[$ não é possível alterar para a condição de equilimitação num ponto (lembramos que o último significa num ponto do segmento $t \in [a,b]$). De facto, em geral, as condições de α-equicontinuidade e de limitação de M nos extremidades a e b do segmento $[a;b]$ não são suficientes para a compacidade relativa do conjunto M em $C_\alpha[a,b]$. Apresentemos um contra-exemplo correspondente.

Exemplo 4.4.7. Consideremos o espaço $C_\alpha[0,\pi]$ com o peso $\alpha(t) = \frac{1}{\operatorname{sen} t}$ $(t \in]0;\pi[)$ e o conjunto $M = \{x_n\colon n = 1,2,\ldots\}$ onde $x_n(t) = n \operatorname{sen} t$. Como $(\alpha x_n)(t) \equiv n$ $(n = 1,2,\ldots)$ temos $M \subset C_\alpha[0,\pi]$. O conjunto M é α-equicontínuo, pois

$$|\alpha(t_1)x_n(t_1) - \alpha(t_2)x_n(t_2)| = |n - n| = 0 \qquad (t \in [0;\pi]\ n = 1,2,\ldots),$$

e é limitado nos pontos $t = 0$ e $t = \pi$, pois $x_n(0) = x_n(\pi) = 0$. No entanto,

$$\sup_{t\in[0;\pi],\, n\in\mathbb{N}} |x_n(t)| = \sup_{t\in[0;\pi],\, n\in\mathbb{N}} n = \infty,$$

logo, o conjunto M não é α-equilimitado, tal que, pelo teorema 4.4.4, não é relativamente compacto em $C_\alpha[0,\pi]$.

Nos próximos três corolários formulemos as condições suficientes de compacidade relativa de um conjunto em $C_\alpha[a,b]$, de modo que foi feito nos corolários 4.2.18–4.2.20 para espaço $C[a,b]$ (como a demonstração análoga).

Corolário 4.4.8. *Se um conjunto $M \subset C_\alpha[a,b]$ é limitado num ponto e existe uma função $\psi :]0;\infty[\to]0;\infty[$ com a propriedade $\lim\limits_{s\to 0+} \psi(s) = 0$ e tal que*

$$|\alpha(t_1)x(t_1) - \alpha(t_2)x(t_2)| \le \psi(|t_1 - t_2|) \qquad (t_1, t_2 \in [a;b],\ x \in M),$$

então o conjunto M é relativamente compacto em $C_\alpha[a,b]$.

Corolário 4.4.9. *Se um conjunto $M \subset C_\alpha[a,b]$ é limitado num ponto e satisfaz a condição*

$$|\alpha(t_1)x(t_1) - \alpha(t_2)x(t_2)| \le L|t_1 - t_2| \qquad (t_1, t_2 \in [a;b],\ x \in M),$$

onde a constante $L < +\infty$ não depende de t_1, t_2 e de x, então o conjunto M é relativamente compacto em $C_\alpha[a,b]$.

Corolário 4.4.10. *Se um conjunto $M \subset C_\alpha[a,b]$ é limitado num ponto e existe uma constante finta R tal que*

$$|(\alpha x)'(t)| \le R \qquad (t \in [a;b]\ x \in M), \tag{4.15}$$

então o conjunto M é relativamente compacto em $C_\alpha[a,b]$.

Estudaremos, agora, a compacidade relativa de um conjunto em $C_\alpha[a,b]$, em alguns casos especiais do peso α.

Teorema 4.4.11. *Sejam $\alpha, \alpha^{-1} \in C[a,b]$ e $M \subset C[a,b]$. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) *M é relativamente compacto em $C[a,b]$;*

(b) *M é relativamente compacto em $C_\alpha[a,b]$;*

(c) *M é equicontínuo e equilimitado;*

(d) *M é α-equicontínuo e α-equilimitado;*

(e) *M é equicontínuo e limitado num ponto;*

(f) *M é α-equicontínuo e limitado num ponto.*

Demonstração. Pelo corolário 4.3.18, $C[a,b] = C_\alpha[a,b]$ (como espaços lineares) e a aplicação $i : C[a,b] \to C_\alpha[a,b]$ definida por $i(x) = x$ é um isomorfismo de espaços de Banach. Daqui e do teorema 3.2.35 segue (a)$\Leftrightarrow$(b). Os teoremas 4.2.11, 4.2.17 e 4.4.4 implicam, respectivamente, as proposições (a)$\Leftrightarrow$(c), (a)$\Leftrightarrow$(e) e (b)$\Leftrightarrow$(d). Finalmente, de $\alpha, \alpha^{-1} \in C[a,b]$ segue que as funções α e α^{-1} são limitados, então M é equicontínuo, se e somente se é α-equicontínuo. Isto implica (e)$\Leftrightarrow$(f). $\square$

Teorema 4.4.12. *Seja $\alpha \in C[a,b]$. Então, são válidas as seguintes proposições:*

1. *$C[a,b] \hookrightarrow C_\alpha[a,b]$;*

2. *Se um conjunto $M \subset C[a,b]$ é relativamente compacto em $C[a,b]$, então M é relativamente compacto em $C_\alpha[a,b]$;*

3. *Um conjunto $M \subset C_\alpha[a,b]$ é relativamente compacto em $C_\alpha[a,b]$, se e somente se, é α-equicontínuo e limitado num ponto.*

Demonstração. A primeira proposição segue do corolário 4.3.16 e a segunda do teorema 3.2.34.

A necessidade das condições de α-equicontinuidade e de limitação num ponto para a compacidade relativa de um conjunto $M \subset C_\alpha[a,b]$ em $C_\alpha[a,b]$, decorre do teorema 4.4.5.

Seja, agora, um conjunto $M \subset C_\alpha[a,b]$ é α-equicontínuo e limitado num ponto $t \in [a;b]$. Pelo teorema 4.3.24 o operador $J : C_\alpha[a,b] \to C[a,b]$ definido por $J(x) = \alpha x$, é uma isometria linear dos espaços de Banach. É evidente que o conjunto $J(M) \subset C[a,b]$ é equicontínuo. Também, o conjunto $\{\alpha(t)x(t) \colon x \in M\}$ é limitado em $\mathbb{R}$. Isto é evidente se $t \in]a;b[$, mas caso

$t \in \{a, b\}$ segue de $\alpha \in C[a, b]$ (a função de peso $\alpha :]a; b[\to \mathbb{R}$ é prolongada continuamente em $[a; b]$). Então, o conjunto $J(M)$ é equicontínuo e equilimitado, logo, pelo teorema 4.2.17, é relativamente compacto em $C[a, b]$. Pelo teorema 3.2.35, aplicada para a isometria linear $J^{-1} : C[a, b] \to C_\alpha[a, b]$, o conjunto $M = J^{-1}[J(M)]$ é relativamente compacto em $C_\alpha[a, b]$. $\square$

Observação 4.4.13. A segunda proposição do teorema 4.4.12 diz que caso $\alpha \in C[a, b]$ para a verificação que um conjunto $M \subset C[a, b]$ é relativamente compacto em $C_\alpha[a, b]$, de pode ser utilizado o teorema 4.2.17 ou um dos corolários 4.2.18–4.2.20. Mas todos (incluindo as condições de equicontinuidade e de limitação num ponto do critério do teorema 4.2.17) neste caso são suficientes para a compacidade relativa de M em $C_\alpha[a, b]$, mas não são necessárias. De facto, caso $\alpha \in C[a, b]$ existem conjuntos $M \subset C[a, b]$ que são relativamente compactos em $C_\alpha[a, b]$ e ao mesmo tempo não são relativamente compactos em $C[a, b]$, o que confirmamos por o seguinte contra-exemplo.

Exemplo 4.4.14. Seja $\alpha(t) = t$ ($t \in [0; 1]$) tal que $\alpha \in C[0, 1]$. Consideremos o conjunto $M = \{x_n : n = 2, 3, \ldots\}$ onde

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad t \in \left[0; \frac{1}{n}\right] \\ \frac{1}{nt}, & \text{se} \quad t \in \left]\frac{1}{n}; 1\right] \end{cases} . \tag{4.16}$$

É claro que $M \subset C[0, 1]$ mas M não é equicontínuo. De facto, tomando $t_n = \frac{1}{n}$, $s_n = \frac{2}{n}$ ($n = 2, 3, \ldots$) temos que $|t_n - s_n| = \frac{1}{n} \to 0$ quando $n \to \infty$. No entanto, $|x_n(t_n) - x_n(s_n)| = \left|1 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ ($n = 2, 3, \ldots$). Pelo teorema 4.2.17 o conjunto M não é relativamente compacto em $C[0, 1]$.

De outro lado, como é evidente, M é limitado no ponto $t = 0$ (mais ainda, é equilimitado e α-equilimitado). Mostremos que M é α-equicontínuo. Sejam $\varepsilon > 0$, $t, s \in [0; 1]$ tais que $|t - s| < \varepsilon$ e $n \in \{2, 3, \ldots$. Temos que

$$\begin{array}{lll} s, t \in \left[0; \frac{1}{n}\right] & \Rightarrow & |\alpha(t)x_n(t) - \alpha(s)x_n(s)| = |t - s| < \varepsilon, \\ s \in \left[0; \frac{1}{n}\right],\ t \in \left]\frac{1}{n}; 1\right] & \Rightarrow & |\alpha(t)x_n(t) - \alpha(s)x_n(s)| = \frac{1}{n} - s \le t - s < \varepsilon, \\ s, t \in \left]\frac{1}{n}; 1\right] & \Rightarrow & |\alpha(t)x_n(t) - \alpha(s)x_n(s)| = |\frac{1}{n} - \frac{1}{n}| < \varepsilon. \end{array}$$

Pela terceira proposição do teorema 4.4.12 o conjunto M é relativamente compacto em $C_\alpha[a, b]$.

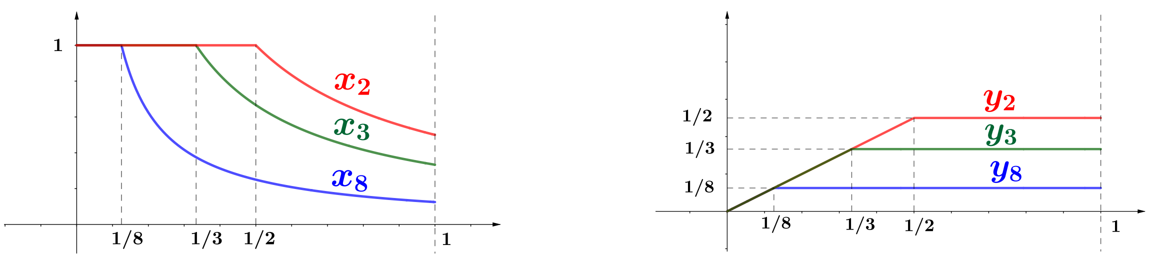

Figura 4.8: As funções x_n definidas por (4.16) e as funções $y_n = \alpha x_n$

Observação 4.4.15. Seja $\alpha \in C[a, b]$. O exemplo 4.4.14 mostra que existem conjuntos em $C[a, b]$ que são α-equicontínuos, equilimitados e α-equilimitados e que ao mesmo temo não são equicontínuos. De outro lado, os teoremas 4.4.12 e 4.2.17 implicam que se um conjunto

$M \subset C[a,b]$ é equicontínuo e limitado num ponto, então é α-equicontínuo. Em contraste, existem conjuntos em $C[a,b]$ que são equicontínuos (e não limitados em nenhum ponto) que não são α-equicontínuos. Apresentemos um contra-exemplo correspondente.

Exemplo 4.4.16. Seja $\alpha(t) = t$ ($t \in [0;1]$) tal que $\alpha \in C[0,1]$. Consideremos o conjunto $M = \{x_n \colon n = 1,2,\ldots\}$ onde $x_n(t) \equiv n$. É claro que $M \subset C[a,b]$ e M é equicontínuo. No entanto, M não é α-equicontínuo. De facto, se $t_n = \frac{1}{n}$, $s_n = 0$ ($n = 1,2,\ldots$), então $|t_n - s_n| \to 0$ quando $n \to \infty$, mas $|\alpha(t_n)x_n(t_n) - \alpha(s_n)x_n(s_n)| = |nt_n| = 1 > 0$ ($n = 1,2,\ldots$).

Teorema 4.4.17. *Seja $\alpha^{-1} \in C[a,b]$. Então, são válidas as seguintes proposições:*

1. *$C_\alpha[a,b] \hookrightarrow C[a,b]$;*

2. *Se um conjunto $M \subset C_\alpha[a,b]$ é relativamente compacto em $C_\alpha[a,b]$, então M é relativamente compacto em $C[a,b]$;*

3. *Um conjunto $M \subset C_\alpha[a,b]$ é relativamente compacto em $C_\alpha[a,b]$, se e somente se, M é α-equicontínuo e o conjunto $\{\alpha x \colon x \in M\}$ é limitado num ponto.*

Demonstração. A primeira proposição segue do corolário 4.3.17 e a segunda do teorema 3.2.34.

Se mm conjunto $M \subset C_\alpha[a,b]$ é relativamente compacto em $C_\alpha[a,b]$, então pelo teorema 4.4.5 o conjunto M é α-equicontínuo e limitado num ponto $t \in]a;b[$. Daqui segue que o conjunto o conjunto $\{\alpha x \colon x \in M\}$ é limitado no mesmo ponto t, logo, é limitado num ponto.

Seja, agora, um conjunto $M \subset C_\alpha[a,b]$ é α-equicontínuo e o conjunto $\{\alpha x \colon x \in M\}$ é limitado num ponto $t \in [a;b]$. Pelo teorema 4.3.24 o operador $J : C_\alpha[a,b] \to C[a,b]$ definido por $J_\alpha(x) = \alpha x$, é uma isometria linear dos espaços de Banach. É evidente que o conjunto $J(M) \subset C[a,b]$ é equicontínuo e equilimitado, logo, pelo teorema 4.2.17, é relativamente compacto em $C[a,b]$. Pelo teorema 3.2.35, aplicada para a isometria linear $J^{-1} : C[a,b] \to C_\alpha[a,b]$, o conjunto $M = J^{-1}[J(M)]$ é relativamente compacto em $C_\alpha[a,b]$. □

Observação 4.4.18. Na terceira proposição do teorema 4.4.17 a condição de limitação do conjunto $\{\alpha x \colon x \in M\}$ pode ser substituído, segundo teorema 4.4.5, pela condição de limitação do conjunto M num ponto $t \in]a;b[$, mas não pode ser substituído pela condição de limitação de M num ponto. De facto, para o peso α e o conjunto M do exemplo 4.4.7 temos que $\alpha^{-1} \in C[0,\pi]$, M é limitado nos pontos 0 e π, mas não é relativamente compacto em $C_\alpha[0,\pi]$.

Observação 4.4.19. A proposição recíproca da segunda proposição do teorema 4.4.17 não tem lugar. Caso $\alpha^{-1} \in C[a,b]$ existem subconjuntos de $C_\alpha[a,b]$ que são relativamente compactos em $C[a,b]$ e ao mesmo tempo não são relativamente compactos em $C_\alpha[a,b]$. Apresentemos um contra-exemplo correspondente.

Exemplo 4.4.20. Seja $\beta(t) = \frac{1}{t}$ ($t \in]0;1[$) tal que $\beta^{-1} \in C[0,1]$. Consideremos o conjunto $N = \{y_n \colon n = 2,3,\ldots\}$ onde

$$y_n(t) = \begin{cases} t, & \text{se} \quad t \in \left[0; \frac{1}{n}\right] \\ \frac{1}{n}, & \text{se} \quad t \in \left]\frac{1}{n}; 1\right] \end{cases}.$$

É claro que $N \subset C_\beta[0,1] \subset C[0,1]$. Notemos que $\beta y_n = x_n$ ($n = 2,3,\ldots$) onde x_n são definidas por (4.16) (os gráficos das funções x_n e y_n são apresentadas na figura 4.8). Usando a notação J_β da isometria linear $J_\beta : C_\beta[0,1] \to C[0,1]$ definida por $J_\beta(x) = \beta x$ vimos que $J_\beta(N) = M$ onde M é definido no exemplo 4.4.17.

A β-equicontinuidade de N é equivalente a equicontinuidade de M, mas no exemplo 4.4.17 foi mostrado que M não é equicontínuo. Então, N não é β-equicontínuo, e pelo teorema 4.4.17, N não é relativamente compacto em $C_\beta[0,1]$.

Analogamente, a equicontinuidade de N é equivalente a α-equicontinuidade de M, onde $\alpha = \beta^{-1}$, mas no exemplo 4.4.17 foi mostrado que M é α-equicontínuo. Então, N é equicontínuo, e, como é evidente, é limitado num ponto (realmente, é equilimitado). Pelo teorema 4.2.17, o conjunto N é relativamente compacto em $C[0,1]$.

Observação 4.4.21. Seja $\alpha^{-1} \in C[a,b]$. O exemplo 4.4.20 mostra que existem conjuntos em $C_\alpha[a,b]$ que são equicontínuos, equilimitados e α-equilimitados e que ao mesmo temo não são α-equicontínuos. De outro lado, os teoremas 4.4.17, 4.2.17 e 4.4.5 implicam que se um conjunto $M \subset C_\alpha[a,b]$ é α-equicontínuo e limitado num ponto $t \in]a,b[$ (ou $\{\alpha x \colon x \in M\}$ é limitado mum ponto), então M é equicontínuo. Em contraste, existem conjuntos em $C_\alpha[a,b]$ que são α-equicontínuos (e não limitados em nenhum ponto $t \in]a;b[$) que não são equicontínuos. Apresentemos um contra-exemplo correspondente.

Exemplo 4.4.22. Seja $\alpha(t) = \frac{1}{t}$ ($t \in]0;1]$) tal que $\alpha^{-1} \in C[0,1]$. Consideremos o conjunto $M = \{x_n \colon n = 1,2,\ldots\}$ onde $x_n(t) = nt$ ($t \in [0;1]$). Temos que $M \subset C_\alpha[a,b]$ e M é α-equicontínuo, pois $(\alpha x_n)(t) \equiv n$. No entanto, M não é equicontínuo. De facto, se $t_n = \frac{1}{n}$, $s_n = 0$ ($n = 1,2,\ldots$), então $|t_n - s_n| \to 0$ quando $n \to \infty$, mas $|\alpha(t_n)x_n(t_n) - \alpha(s_n)x_n(s_n)| = |nt_n| = 1 > 0$ ($n = 1,2,\ldots$).

Observação 4.4.23. Seja o peso $\alpha \in C_+(a,b)$ satisfaz as condições $\alpha \notin C[a,b]$ e $\alpha^{-1} \notin C[a,b]$. Neste caso, pelos corolários 4.3.16 e 4.3.17 $C[a,b] \not\subset C_\alpha[a,b]$ e $C_\alpha[a,b] \not\subset C[a,b]$. Neste caso são aplicáveis os teoremas gerais 4.4.4 e 4.4.5 com corolários 4.4.8–4.4.10, mas não são aplicáveis os teoremas específicos 4.4.11–4.4.17. Para o peso α com a propriedade descrito, se pode dizer que para um conjunto $M \subset C[a,b] \cap C_\alpha[a,b]$, a compacidade relativa de M em cada um dos espaços $C[a,b]$ e $C_\alpha[a,b]$ não implica a compacidade relativa de M em outro espaço. Apresentemos um contra-exemplo correspondente.

Exemplo 4.4.24. Seja $\alpha(t) = \frac{1-t}{t}$, $t \in]0;1[$ (ver a figura 4.7). Temos $\alpha, \alpha^{-1} \notin C[a,b]$.

1. Consideremos o conjunto $M = \{u_n \colon n = 2,3,\ldots\}$ onde

$$u_n(t) = \begin{cases} \frac{t}{n(1-t)}, & \text{se} \quad t \in \left[0; 1-\frac{1}{n}\right] \\ 1 - \frac{1}{n}, & \text{se} \quad t \in \left]1-\frac{1}{n}; 1\right] \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (\alpha u_n)(t) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{se} \quad t \in \left[0; 1-\frac{1}{n}\right] \\ \frac{(n-1)(1-t)}{nt}, & \text{se} \quad t \in \left]1-\frac{1}{n}; 1\right] \end{cases}.$$

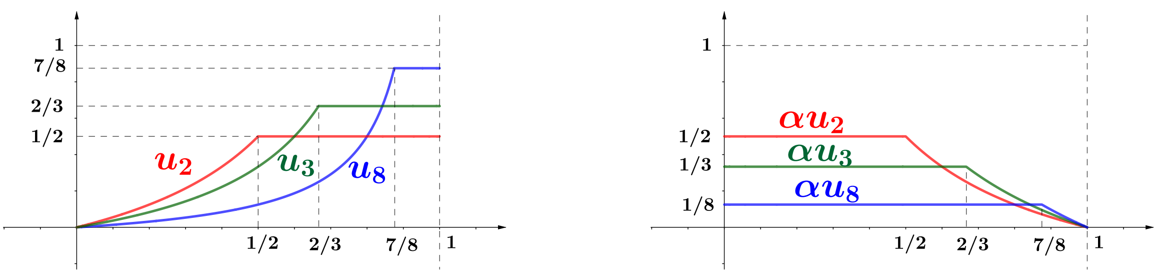

Figura 4.9: As funções u_n no conjunto M e as funções αu_n

É fácil verificar (como foi feito no exemplo 4.4.14) que o conjunto M satisfaz as seguintes propriedades:

a) $M \subset C[a,b] \cap C_\alpha[a,b]$, além disso, M é equilimitado e α-equilimitado;

b) M é α-equicontínuo, então, pelo teorema 4.4.4, é relativamente compacto em $C_\alpha[0,1]$;

c) M não é equicontínuo, então, pelo teorema 4.4.4, não é relativamente compacto em $C[0,1]$.

2. Consideremos o conjunto $N = \{v_n \colon n = 2, 3, \dots\}$ onde

$$v_n(t) = \begin{cases} t, & \text{se} \quad t \in \left[0; \frac{1}{n}\right] \\ \frac{1}{n}, & \text{se} \quad t \in \left]\frac{1}{n}; 1\right] \end{cases} \Rightarrow (\alpha v_n)(t) = \begin{cases} 1-t, & \text{se} \quad t \in \left[0; \frac{1}{n}\right] \\ \frac{1-t}{nt}, & \text{se} \quad t \in \left]\frac{1}{n}; 1\right] \end{cases}.$$

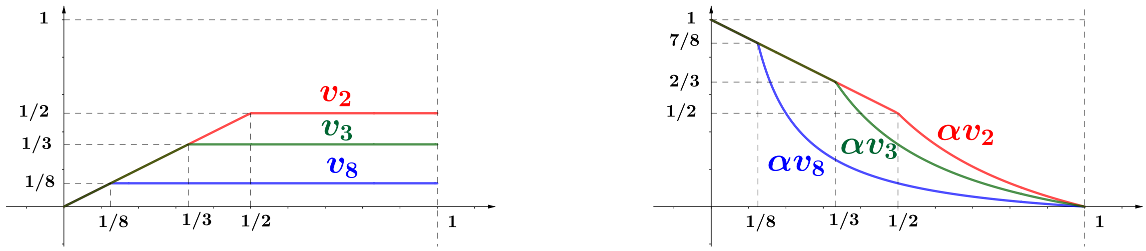

Figura 4.10: As funções v_n no conjunto N e as funções αv_n

É fácil verificar (como foi feito no exemplo 4.4.14) que o conjunto N satisfaz as seguintes propriedades:

a) $N \subset C[a,b] \cap C_\alpha[a,b]$, além disso, N é equilimitado e α-equilimitado;

b) N é equicontínuo, então, pelo teorema 4.4.4, é relativamente compacto em $C[0,1]$;

c) N não é α-equicontínuo, então, pelo teorema 4.4.4, não é relativamente compacto em $C_\alpha[0,1]$.

Conclusões e Recomendações

No trabalho foi feita uma revisão dos critérios de compacidade relativa de conjuntos no espaços das funções contínuas. Foi mostrado o teorema de Ascoli-Arzelà na forma abstracta, para espaço métrico $C(X,Y)$ das funções contínuas $f : X \to Y$ onde X e Y são espaços métricos compactos, dotado da sup-métrica (o teorema 4.1.3). Depois com base deste teorema foram mostrados dois critérios de compacidade relativa no espaço de Banach $C[a,b]$ (os teoremas 4.2.11 e 4.2.17), e várias consequências onde foram destacadas algumas condições suficientes de compacidade relativa (os corolários 4.2.18–4.2.20).

Os resultados principais do trabalho são os critérios de compacidade relativa de conjuntos nos espaços de funções contínuas com peso $C_\alpha[a,b]$ (os teoremas 4.4.4 e 4.4.5), algumas consequências (os corolários 4.4.8–4.4.10), e os teoremas específicas de comparação com critérios para espaço $C[a,b]$, por várias classes de pesos (os teoremas 4.4.11–4.4.17). Os resultados foram acompanhados com vários contra-exemplos (os exemplos 4.4.7, 4.4.14, 4.4.16, 4.4.20, 4.4.22 e 4.4.24) que ilustram a impossibilidade de melhorar algumas condições dos teoremas básicos 4.4.5, 4.4.12 e 4.4.17, ou a invalidade das recíprocas de algumas proposições desses teoremas.

Recomendações: direcções de desenvolvimento pelo tema de trabalho

1. Generalizar os resultados principais da secção 4.4 para os espaços com pesos $C_\alpha(\overline{\Omega})$ das funções contínuas definidos no fecho dum conjunto aberto, conexo e limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, e também para os espaços das funções vectoriais correspondentes (funções com valores em $\mathbb{R}^n$, ou mais geral, num espaço de Banach).

2. Generalizar os resultados principais da secção 4.4 para os espaços das funções contínuas e limitados definidos em $[0;\infty)$, ou $\mathbb{R}^n$, ou mais geral, num espaço métrico não compacto, e também, para os espaços correspondentes com pesos.

3. Revisar os critérios de compacidade relativa de conjuntos nos espaços de sucessões l_p, c, c_0 e nos espaços de funções integráveis $L_p[a,b]$, ou, mais geral $L_(S,\Sigma,\mu)$, e com base desses resultados estabelecer os critérios novos para os espaços correspondentes com pesos.

4. Elaborar o método geral de obtenção dos critérios de compacidade relativa de conjuntos num espaços com peso, seja T_α, com base de critérios conhecidos para espaço sem pesos correspondente T, usando o isomorfismo (em particular isometria linear) dos espaços T e T_α.

Bibliografia

[1] ALVES, J. F. (2002) *Analise Funcional.* Universidade Do Porto.

[2] ALVES, M. J. (2000) *Equações diferenciais funcionais singulares de segunda ordem.* Perm. State University Press.

[3] BIEZUNER, R. J. (2009) *Notas de Aula. Análise Funcional.* Universidade Federal de Minas Gerais, Barsil.

[4] DUNFORD, N., SHCWARTZ, J. T. (1957) *Linear operators. General theory.* Intercience Publ., Inc., New York.

[5] ENGELKING, R. (1989) *General Topology.* Heldermann Verlag, Sigma Series in Pure Mathematics, Volume 6.

[6] HUTSON, V., PYM, J. S. (1980) *Aplications of Funtional Analysis and Operator Theory.* University of Sheffield, Academic Press.

[7] KELLEY, J. L. (1955) *General Topology.* University of California at Berkeley, Uk.

[8] KOLMOGOROV, A. N., FOMIN, S. V. (1982) *Elementos da Teoria das Funções e de Análise Funcional.* Editora Mir, Moscou.

[9] LIMA, E. L. (1970) *Elementos de Topologia Geral.* Editora da Univerdade de S. Paulo, Rio de Janeiro.

[10] LJUSTERNIK, A., SOBOLEV, B. O. (1965) *Elementos de análise funcional.* Nauka, Moscovo.

[11] MARIME, G. E. (2022) *Compacidade nos espaços topológicos.* Trabalho de licenciatura em Matemática, DMI, UEM, Maputo.

[12] MATUSSE, A. J. (2010) *Operadores locais nos espaço de funções integráveis com peso.* Trabalho de licenciatura em Matemática, DMI, UEM, Maputo.

[13] MUNKRES, J. R. (2000) *Topology.* Second Edition, Massachusetts Institute of Technology.

[14] SANTOS, J. C. (2015) *Introdução à Topologia.* Universidade Do Porto.