



UNIVERSIDADE  
E D U A R D O  
MONDLANE

FACULDADE DE CIÊNCIAS  
Departamento de Matemática e Informática

Trabalho de Licenciatura em Matemática

Aplicação do método de *Benchmark* no resseguro  
óptimo e avaliação de investimento em uma  
seguradora

**Autor:** Cassimo Roberto Pires

Maputo, Junho de 2024



UNIVERSIDADE  
E D U A R D O  
M O N D L A N E

FACULDADE DE CIÊNCIAS  
Departamento de Matemática e Informática

---

Trabalho de Licenciatura em Matemática

Aplicação do método de *Benchmark* no resseguro  
óptimo e avaliação de investimento em uma  
seguradora

**Autor:** Cassimo Roberto Pires

**Supervisor:** Prof. Doutor Calisto Justino Guambe

Maputo, Junho de 2024

# Declaração Sob Compromisso De Honra

Eu, Cassimo Roberto Pires, declaro por minha honra que o presente trabalho acadêmico foi elaborado por mim e não se recorreu a outras fontes além das indicadas. O mesmo nunca foi apresentado para efeitos de avaliação a qualquer outra entidade ou instituição para obtenção de qualquer grau acadêmico e que este constitui o fruto de minha investigação, estando indicados no texto as referências bibliográficas que utilizei na elaboração do mesmo.

Assinatura

---

( Cassimo Roberto Pires )

Maputo, \_\_\_\_ Junho de 2024

# Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar, a Deus pela vida, saúde, amor e por iluminar os meus caminhos durante a minha trajetória.

Ao prof. Doutor Calisto Guambe, na qualidade de supervisor, pela persistência, por todo o tempo que dispôs, pelo conhecimento transmitido, pelo rigor, paciência e empenho empreque no desenvolvimento da presente monografia.

Uma palavra de gratidão à minha família, em especial aos meus pais, avós e meus irmãos. Agradecimentos extensivos aos meus irmãos, Vasco Chone, Fernando Chone e Dulce Chone, Alfredo Manotwane, Helder junior, Mariamo Pires, Chamussidine Pires, Yunice Pires, Fabio Mangutsane e os demais, sou muito grato a todos vos por serem meus irmãos, pelo apoio que sempre estão aptos a dar e em todas as situações. Agradecimento especial á Michelle Bila, pelo suporte a todo momento, força nos momentos mais difíceis, dedicação e ajuda académica e espiritual. Agradeço imensamente aos meus Avós, Rosita, Macumbuia, Celeste (em memória), pela pessoa que hoje sou, pela educação que me permitiram ter, pelos puxões de orelha que sempre deram, pela insistência académica ainda desde pequeno e sobretudo pelo amor e carinho que sempre estão aptos a dar em todas as situações, o meu muito obrigado. Aos meus amigos, em especial ao Moisés, Célio, Cardoso, Amad, Temóteo, Ilidio pelo companheirismo, confiança e apoio.

Aos meus colegas em especial a Ednércio, Melany, Mauricias, Amanda, Filomena, e a todos colegas da turma de Licenciatura em Matemática geração 2017, pela amizade e convívio. Agradeço também aos meus irmãos em cristo que a todo momento estiveram aptos para me ajudar em orações e me dando força e motivação durante toda a jornada académica.

# Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus Pais, avós e irmãos.

# Resumo

As seguradoras são importantes à sociedade, uma vez que garantem proteção financeira aos indivíduos contra perdas patrimoniais, além de fomentarem o mercado de capitais por meio da alocação de activos garantidos. Assim sendo, é fundamental avaliar os instrumentos que garantam sua solvência financeira de longo prazo, como por exemplo tratados de resseguro. O resseguro é a ferramenta frequentemente utilizada por companhias seguradoras para reduzir o nível e volatilidade de ônus do sinistro agregado sob a sua responsabilidade. Este trabalho tem como objectivo geral minimizar o valor robusto envolvendo o tempo esperado para atingir um determinado capital pré estabelecido em um nível antes da ruína e penalização do modelo ambiguidade. Considerando que a seguradora não possua informações perfeitas em termos de ser sem rumo do activo com risco e risco de seguro o estudo solucionou o problema óptimo de investimento e resseguro robusto para a seguradora sob um modelo excedente considerando que a seguradora não possua informações perfeitas em termos da deriva do activo arriscado e risco de seguro. A seguradora visa minimizar um valor robusto envolvendo a probabilidade de atingir um objectivo alto antes da ruína e uma penalização da ambiguidade do modelo. Para tal alcançar este objectivo caracterizou-se a função de valor robusto como a única solução clássica para a equação de Hamilton–Jacobi–Bellman (HJB). Derivou-se a função de valor de forma explícita resolvendo a equação HJB e teve-se como resultado uma estratégia óptima de investimento-resseguro e distorções de deriva da medida óptima em formulários de benchmark. Observou-se que a estratégia óptima sob o cenário de penalização por ambiguidade coincide com a estratégia óptima sob minimizar da probabilidade de alcance do objectivo no caso benchmark sem ambiguidade. Demonstrou-se ainda o impacto da aversão à ambiguidade na avaliação da seguradora e na seleção de distorções óptimas de derivação. Após a aplicação da metodologia e resultados obtidos, foi possível concluir que pode-se usar um resseguro proporcional e em algumas circunstâncias o poderá ser barato ou não barato de modo com que a seguro possa ser investido de forma lógica.

Palavras Chave: Ambiguidade, Equação HJB, Resseguro.

# Abstract

Insurance companies are important to society, as they guarantee financial protection to individuals against property losses, in addition to promoting the capital market through the allocation of guaranteeing assets. Therefore, it is essential to evaluate the instruments that guarantee its long-term financial solvency, such as reinsurance treaties. Reinsurance is the tool often used by insurance companies to reduce the level and volatility of aggregate claim burden under their responsibility. This work has the general objective of minimizing the robust value involving the expected time to reach a certain pre-established capital at a level before the ruin and penalty of the ambiguity model. Considering that the insurer does not have perfect information in terms of the risky asset drift and insurance risk, the study solved the optimal investment problem and robust reinsurance for the insurer under a surplus model considering that the insurer does not have perfect information in terms of the derivative of the risky asset and insurance risk. The insurer aims to minimize a robust value involving the probability of reaching a high target before ruin and a penalty for model ambiguity. To achieve this goal, the robust value function was characterized as the only classical solution to the Hamilton–Jacobi–Bellman (HJB) equation. The value function was explicitly derived by solving the HJB equation and resulted in an optimal investment-reinsurance strategy and drift distortions of the optimal measure in benchmark forms. It was observed that the optimal strategy under the ambiguity penalty scenario coincides with the optimal strategy under minimizing the probability of reaching the objective in the unambiguous benchmark case. The impact of ambiguity aversion on insurer valuation and selection of optimal derivation distortions was also demonstrated. After applying the methodology and results obtained, it was possible to conclude that proportional reinsurance can be used and in some circumstances it may be cheap or not cheap so that insurance can be invested logically.

Keywords: Ambiguity, HJB Equation, Reinsurance.

# Simbologia

A seguir, ilustraremos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- $\exp(\cdot)$  - exponencial de  $(\cdot)$ ;
- $M^1[0, T]$  - Classe de processos estocásticos mensuráveis  $\mu(t)$  satisfazendo

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^t |\mu(s)| ds \right] < \infty;$$

- $M^2[0, T]$  - Classe de processos estocásticos mensuráveis  $\sigma(t)$  satisfazendo

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^t |\sigma(s)|^2 ds \right] < \infty;$$

- EDP - Equações diferenciais parciais;
- EDE - Equação diferencial estocástica;
- EHJB - Equação de Hamilton - Jacob - Bellman;
- EDO - Equação diferencial ordinária;
- MPD - Método de programação dinâmica;
- MBG - Movimento Browniano Geométrico;
- MBA - Movimento Browniano Aritmético;
- Fig. - Figura;
- $\mathcal{R}$  - Sub-classe do espaço de Lebesgue  $X$
- $\mathbb{N}$  - Conjunto de números naturais;
- $\mathbb{Q}$  - Conjunto de números racionais;
- $\mathbb{R}$  - Conjunto de números reais;
- $\mathbb{E}$  - Esperança Matemática;



- $\mathbb{P}$  - Operador massa de probabilidade;
- $H_x$  - Primeira derivada da função  $H$  em ordem a  $x$ ;
- $H_{xx}$  - Segunda derivada da função  $H$  em ordem a  $x$ .

# Glossário

- **Activo** - chama-se activo a qualquer investimento financeiro que pode ser comprado ou vendido, por exemplo, imóveis jóias, juros de empréstimo.
- **Acções** - são títulos nominativos de renda variável, emitidos por sociedades anónimas que representam um parcela de capital social. Ao adquiri-las, o investidor torna-se sócio da empresa.
- **Investimento** - é todo gasto ocorrido na aquisição de bens que serão estocados pela empresa até o momento da sua utilização, isto é, do seu consumo.
- **Dividendo** - é a distribuição em dinheiro de parte ou todo o lucro auferido pela empresa em um exercício social, ou saldos de lucros acumulados aos seus acionistas.
- **Risco** - é a chance da perda financeira.
- **Volatilidade** - é a medida de incerteza quanto aos retornos proporcionados por um activo.
- **Ambiguidade** - é uma transformação bilinear usada na análise de sinais cujo espectro de frequência varia com o tempo (espectros chamados não-estacionários ou dinâmicos).
- **Superávit** ou superavit consiste no resultado positivo a partir da diferença entre aquilo que se ganha (receita) e aquilo que se gasta (despesa).
- **Resseguro** é um contrato em que o ressegurador assume o compromisso de indenizar a companhia seguradora (cedente) pelos danos.
- **Entropia** - Seja  $X$  uma variável aleatória com vector de probabilidade  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ . Definimos a entropia da variável aleatória  $X$  como

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i. \quad (1)$$

- **Entropia Relativa** - Sejam  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias com distribuições  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  e  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ , respectivamente. Definimos a entropia relativa de  $X$  com relação a  $Y$  como

$$H(X||Y) = \sum_{i=1}^n p_i \ln \left( \frac{p_i}{q_i} \right) \quad (2)$$

A entropia relativa nos permitirá quantificar, num certo sentido, o quão distintas estão as duas distribuições de probabilidade  $(p_i)_{i=1}^n$  e  $(q_i)_{i=1}^n$ .

# Conteúdo

<b>Conteúdo</b>	<b>2</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>4</b>
0.1 Introdução . . . . .	5
0.2 Objectivos . . . . .	6
0.2.1 Objectivo geral . . . . .	6
0.2.2 Objectivos específicos . . . . .	6
0.3 Estrutura do trabalho . . . . .	7
0.4 Motivação . . . . .	8
<b>1 Noções Preliminares</b>	<b>9</b>
1.1 Teoria de medida e probabilidade . . . . .	10
1.2 Processos estocásticos . . . . .	11
1.3 Processo de Wiener ou Movimento Browniano . . . . .	13
1.3.1 Martingales . . . . .	14
1.3.2 Integral Estocástico . . . . .	14
1.3.3 Equações diferenciais estocásticas . . . . .	15
1.4 Fórmula de Itô . . . . .	16
1.5 Movimento Browniano Geométrico . . . . .	18
1.5.1 Existência e unicidade de soluções . . . . .	19
<b>2 Dinâmica de Portfólio</b>	<b>20</b>
2.1 Portfólio . . . . .	20
2.2 Portfólio autofinanciado . . . . .	21
2.3 Cálculo do valor de portfólio . . . . .	22

<b>3</b>	<b>Resseguro e investimento</b>	<b>25</b>
3.1	Formulação do problema . . . . .	25
3.2	Resultados Óptimos . . . . .	29
3.2.1	O caso de resseguro barato . . . . .	30
3.2.2	Caso de resseguro não barrato . . . . .	35
3.2.3	Caso do controle de investimento . . . . .	39
3.3	Análise econômico e Benchmark . . . . .	41
3.3.1	Resultados dentro do Benchmark . . . . .	41
3.4	Simulação numérica . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Conclusão e Recomendações</b>	<b>47</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>48</b>

# Lista de Figuras

1.1	Trajectórias do Movimento de Wiener. . . . .	13
3.1	Simulação . . . . .	44
3.2	Simulação . . . . .	44
3.3	Simulação . . . . .	45

## 0.1 Introdução

Nos últimos anos, tem havido um crescente interesse nas aplicações da teoria de controle estocástico para investigar problemas de resseguro óptimo e investimento para companhias de seguros. Isso ocorre devido à capacidade das companhias de seguros de reduzirem sua exposição ao risco através da compra de resseguro e aumentarem seus lucros investindo seu excedente em activos de risco e activos isentos de risco. O resseguro, uma prática que remonta a séculos atrás, tem sido uma peça fundamental no mundo dos seguros desde seus primórdios.

O resseguro teve origem no século XIV, nas feiras marítimas de Génova e Veneza, onde os comerciantes se reuniam para compartilhar os riscos de seus empreendimentos marítimos. Com o passar do tempo, a prática evoluiu para incluir outras formas de seguro, como o seguro de vida e o seguro de propriedade. No século XIX, o resseguro começou a ser formalmente organizado em empresas especializadas, conhecidas como resseguradoras, que ofereciam cobertura para seguradoras primárias em troca de prémios[1].

Hoje, o resseguro é uma indústria global multibilionária que desempenha um papel crucial na gestão de riscos para seguradoras em todo o mundo. As resseguradoras fornecem capacidade adicional de subscrição e estabilidade financeira às seguradoras primárias, permitindo-lhes assumir riscos maiores e mais diversificados. Isso é especialmente importante em cenários de catástrofes naturais ou eventos de grande escala, onde as perdas podem ser significativas[6].

A técnica de controle estocástico e a correspondente Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) são amplamente utilizadas para lidar com problemas relacionados ao resseguro e investimento. Os problemas de optimização, sujeitos ao controle de resseguro com ou sem investimento, sob várias funções objectivas, tornaram-se um tópico popular na literatura actuarial. Luo & Wang [10] procuram maximizar a probabilidade de penalização ambígua, refletindo o crescente interesse nesta área. As variações na pesquisa têm sido incríveis, como pode ser observado em estudos como os de Li et al. [8], onde é analisado o resseguro e os investimentos que cada seguradora pode realizar, tendo em conta o risco ou a ausência dele no capital a ser investido.

O foco deste trabalho é a minimização do valor robusto envolvendo o tempo esperado para atingir um determinado capital. Utilizaremos técnicas do cálculo exponencial e a metodologia exponencial descrita em estudos como os de Li et al. [8] e Luo & Wang [10], além de trabalhar com o método de HJB. Embora os problemas óptimos de resseguro e investimento sob esse objectivo tenham sido amplamente investigados, muitas questões merecem uma exploração mais aprofundada. Neste trabalho, exploraremos algumas dessas questões.

## 0.2 Objectivos

### 0.2.1 Objectivo geral

- O objectivo principal deste trabalho é investigar o impacto da penalização da ambiguidade no valor robusto e no tempo esperado para atingir um determinado nível de capital antes da ruína.

### 0.2.2 Objectivos específicos

Para alcançar este objectivo, foram traçados os seguintes objectivos específicos:

- Formular a dinâmica do valor de portfólio para os activos (livre de risco e com risco) sem consumo e achar a sua solução;
- Modelar a dinâmica da seguradora dado por 2 activo (livre de risco e com risco) ;
- Deduzir o teorema de verificação;
- Resolver um problema de resseguro óptimo e investimento



## 0.3 Estrutura do trabalho

O trabalho está dividido da seguinte maneira, no capítulo 1 encontraremos os capítulos preliminares, Neste capítulo, apresentaremos as definições básicas necessárias para uma melhor compreensão do tema do trabalho. São conceitos fundamentais que auxiliarão na formulação do modelo matemático do problema a ser estudado. Em seguida no capítulo 2, Neste capítulo, abordaremos a dinâmica do portfólio, uma parte crucial para o desenvolvimento do trabalho. Será através da dinâmica apresentada neste capítulo que obteremos as ferramentas necessárias para modelar e resolver o problema em questão. . No 3 capítulo, Este é o cerne do trabalho, onde resolveremos o problema em questão. Utilizando o teorema de verificação e a Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), conforme proposto por [8], iremos modelar a seguradora e encontrar a fórmula explícita. Em alguns casos, ao resolver o problema, nos depararemos com Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) não lineares, para as quais recorreremos a literatura pertinente para melhor resolução e explicação. Além disso, utilizaremos o método exponencial para resolver alguns casos específicos. Ainda neste capítulo encontramos a otimização do resseguro e investimento, usando a estratégia de benchmark, conhecida na área financeira, como sendo uma estratégia que busca otimizar o desempenho de uma empresa a partir da análise das melhores práticas do mercado em que ela está inserida.

## 0.4 Motivação

Inspirado por diversas obras já referenciadas, este trabalho aborda a incerteza do modelo em uma seguradora com excedente controlado. Nosso objectivo é resolver um problema robusto de resseguro e investimento óptimo, focado em minimizar o tempo esperado para alcançar um capital pré-estabelecido antes da ruína.

A motivação para este estudo surge da necessidade de ferramentas que garantam a solvência financeira das seguradoras a longo prazo. As seguradoras desempenham um papel crucial na sociedade, proporcionando proteção financeira contra perdas patrimoniais e fomentando o mercado de capitais através da alocação de activos garantidos. No entanto, a incerteza sobre os modelos de risco pode comprometer a eficácia das estratégias de resseguro e investimento adotadas.

Dessa forma, a análise proposta visa fornecer uma abordagem robusta para lidar com essa incerteza, utilizando técnicas avançadas de controle estocástico e teoria da medida para desenvolver estratégias que assegurem a estabilidade financeira da seguradora. O trabalho também busca fornecer insights práticos para a gestão de risco, permitindo às seguradoras ajustar suas estratégias de acordo com as condições de mercado e suas próprias necessidades financeiras.

# Capítulo 1

## Noções Preliminares

Neste capítulo vamos apresentar um os conceitos que vão compor o trabalho, inspirado nos conceitos de Milanes [12] e por Nepomnyashehikh [14] vamos definir os principais conceitos que vão guiar o trabalho até a sua finalização.

**Definição 1.0.1.** (Teoria de probabilidade)

Utiliza-se da teoria da probabilidade para modelar a aleatoriedade e a incerteza associada aos fenómenos naturais, económicos, sociais, e outros.

**Definição 1.0.2.** (Estudo Experimental)

Em um estudo experimental investigamos os efeitos de certas condições sobre indivíduos ou objectos na amostra.

**Definição 1.0.3.** (Amostra)

Uma amostra é um subconjunto da população inteira, uma pequena seleção de indivíduos ou objectos extraídos da coleção inteira.

**Definição 1.0.4.** (Experimento aleatório)

Os experimentos aleatórios constituem situações onde os acontecimentos possuem variabilidade de ocorrência, isto é, o mesmo experimento pode ter vários resultados diferentes.

**Definição 1.0.5.** (Esperança Matemática )

A esperança matemática ou o valor esperado da variável aleatória  $X$ , é indicado como  $E(X)$  e é definido como a soma do produto entre a probabilidade de ocorrência de um evento aleatório e o valor do referido evento.

Em forma matemática, é expresso da seguinte forma:

$$\mu = E(X) = x \sum i \cdot (P_i) = (X_1) \cdot P(X_1) + X_2 \cdot P(X_2) + X_3 \cdot P(X_3) + \dots, \quad (1.1)$$

onde  $X_i$  é o valor do evento e  $P(X_i)$  sua probabilidade de ocorrência. A soma está espalhada por todos os valores que  $X$  admite. E se forem finitos, a soma indicada converge

para o valor  $E(X)$ , mas se a soma não convergir, a variável simplesmente não tem valor esperado.

Quando se trata de uma variável contínua  $X$ , a variável pode ter valores infinitos e integrais substituem somatórios: Aqui  $f(x)$  representa a função de densidade de probabilidade.

**Teorema 1.0.1.** *Propriedades da esperança matemática* se  $X$  é positivo, então  $E(X)$  também será positivo.

1.  $E(k) = k$ ;
2.  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ ;
3.  $E(kX) = kE(X)$ ;
4.  $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$  (Se forem independentes);
5. Em geral, se  $Y = g(X)$  então  $E(Y) = E[g(X)] = \sum g(x_i) \cdot P[g(x_i)]$  (Se forem discretas);
6. Se  $X \leq Y$ , então  $E(X) \leq E(Y)$

Sendo  $k$  uma constante qualquer.

## 1.1 Teoria de medida e probabilidade

**Definição:** Um conjunto  $\mathcal{A}$  de subconjuntos de um conjunto  $X$  é chamado de *anel* se satisfaz as seguintes propriedades:

1.  $\mathcal{A}$  é fechado sob união e interseção finitas. Ou seja, se  $A, B \in \mathcal{A}$ , então  $A \cup B \in \mathcal{A}$  e  $A \cap B \in \mathcal{A}$ .
2.  $\mathcal{A}$  é fechado sob a diferença de conjuntos. Ou seja, se  $A, B \in \mathcal{A}$ , então  $A \setminus B \in \mathcal{A}$ .

**Definição:** Um conjunto  $\mathcal{S}$  de subconjuntos de um conjunto  $X$  é chamado de *semi-anel* se satisfaz as seguintes propriedades:

1.  $\mathcal{S}$  é fechado sob a interseção de conjuntos. Ou seja, se  $A, B \in \mathcal{S}$ , então  $A \cap B \in \mathcal{S}$ .
2. Para quaisquer  $A, B \in \mathcal{S}$ , existe uma sequência finita de conjuntos  $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathcal{S}$  tal que  $A \setminus B = \bigcup_{i=1}^n C_i$ , onde os conjuntos  $C_i$  são disjuntos dois a dois.

**Definição 1.1.1.** Diz-se que  $\beta$  é  $\sigma$ -álgebra com unidade  $X$  se e somente se  $\emptyset \in \beta$  e  $\beta$  é fechado em relação as operações de união enumerável e complemento, isto é,

1.  $\emptyset \in \beta$ .
2.  $A_i \in \beta, i \in \mathbb{N} \implies \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \beta$ .
3.  $A \in \beta \implies X \setminus A \in \beta$ .

**Definição 1.1.2.** Sejam  $S$  conjunto não vazio e  $\Sigma$   $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $S$  com unidade  $S$ . Um par  $(S, \Sigma)$  chama-se espaço mensurável.

Um conjunto  $A \subseteq S$  do espaço mensurável chama-se conjunto mensurável no caso  $A \in \Sigma$

**Definição 1.1.3** ( $\sigma$ -álgebra de Borel). Seja  $X$  espaço topológico com a topologia (família de conjuntos abertos)  $\tau$ . A  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B}(X) = \sigma(\tau)$  chama-se  $\sigma$ -álgebra de Borel ou álgebra Boreliana em  $X$ .

Um conjunto que pertence á  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B}(X)$  chama-se conjunto mensurável a Borel ou conjunto boreliano.

**Definição 1.1.4.** (Função de mensurável)

Sejam  $(S_i, \Sigma_i)(i = 1, 2)$  espaços mensuráveis e o conjunto  $R \subseteq S_1$ . Uma função  $f : R \rightarrow S_2$  diz-se  $\langle \Sigma_1, \Sigma_2 \rangle$ - mensurável se  $f^{-1}(\Sigma_2) \subseteq \Sigma_1$ .

## 1.2 Processos estocásticos

**Definição 1.2.1.** (Processos estocásticos)

Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  um espaço de probabilidade. Um processo estocástico é uma função mensurável  $X : [0, T] \times \omega \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\mathbb{R}$  tem topologia usual tal que:

1. Para cada  $t, X(t, \cdot)$  é uma variável aleatória;
2. Para cada  $\omega, X(\cdot, \omega)$  é uma função mensurável.

Por conveniência, a variável aleatória  $X(t, \cdot)$  a escrevemos como  $X(t)$  ou  $X_t$ . Assim um processo estocástico  $X(t, \omega)$  pode ser expressado como  $X(t)(\omega)$  ou simplesmente como  $X(t)$  ou  $X_t$ .

Sejam  $X = (X_t)_{t \leq 0}, Y = (Y_t)_{t \leq 0}$  processos estocásticos definidos no mesmo espaço de probabilidade  $(\gamma, F, P)$  e com valores em  $(E, E)$ . Nos podemos dizer que

1.  $X$  é uma modificação ou versão de  $Y$ , ou que;
2.  $X$  e  $Y$  são equivalentes, se para todo  $t \leq 0$  temos que  $P(X_t = Y_t) = 1$ ,

Claramente a segunda propriedade implica a primeira. No entanto, dois processos podem ser equivalentes, mas têm trajetórias completamente diferentes.

**Definição 1.2.2.** <sup>1</sup>(Processo Adaptado à Filtração)

Um processo estocástico  $X_t$  é dito adaptado à filtração  $(\mathcal{F}_t) : t \in [0, T]$  se para cada  $t \in [0, T]$  a variável  $X(t)$  é mensurável em relação a  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_t$ .

**Definição 1.2.3.** (Esperança condicional)

Seja  $X$  uma variável aleatória integrável em  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  e seja  $Y$  uma sub  $\sigma$ -álgebra de  $(\mathcal{F}_t)$ . A esperança condicional  $\mathbb{E}[X|Y]$  é uma variável aleatória  $Y$  mensurável tal que

$$\int_A X d\mathbb{E} = \int_A \mathbb{E}[X|Y] d\mathbb{P}, \quad (1.2)$$

para todo o conjunto  $A \in Y$ .

**Teorema 1.2.1.** (Propriedades da esperança condicional)

Sejam  $X$  e  $G$  variáveis aleatórias integráveis em  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , e  $Y$  uma sub  $\sigma$ -álgebra de  $\mathcal{F}$ . Então

1. Se  $a$  e  $b$  são constantes então  $\mathbb{E}[aX + bG|Y] = a\mathbb{E}[X|Y] + b\mathbb{E}[G|Y]$  (linearidade);
2. Se  $X$  é  $Y$ -mensurável então  $\mathbb{E}[X|Y] = X$  (propriedade de projeção);
3.  $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}[X]$  (invariância da média);
4. Se  $X_n \geq 0$  e  $X_n \rightarrow X$  com  $\mathbb{E}[X] < \infty$ , então  $\mathbb{E}[X_n G|Y] = G\mathbb{E}[X_n|Y]$  ( $Y$ -mensuráveis comportam-se como constantes);
5. Se  $X$  é independente de  $Y$ , então  $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$  (independência de  $Y$ );
6. Se  $X \leq Y$  q.c, então  $\mathbb{E}[X|Y] \leq \mathbb{E}[Y|Y]$  (monotocidade);
7. Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$  com probabilidade um,  $|X_n| \leq G$ , e  $G$  é integrável, então  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n|Y] = \mathbb{E}[X|Y]$  (convergência dominada);
8. Se  $Y_1 \subseteq Y_2$  então  $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y_1]|Y_2] = \mathbb{E}[X|Y_1]$  (filtração).

---

<sup>1</sup>(Filtração)

Uma filtração em  $\Omega$  é uma família crescente  $\mathcal{F}_t : t \in [0, t]$  de  $\sigma$ -álgebras.

## 1.3 Processo de Wiener ou Movimento Browniano

Em 1828 o botânico Robert Brown descreveu o movimento de uma partícula de pólen suspensa em um fluido como sendo um movimento irregular e aleatório. Mais tarde, em 1905, Albert Einstein argumentou que este movimento era oriundo do bombardeamento de outras partículas do fluido, e interpretou o movimento numa abordagem estatística, obtendo uma equação da difusão para a função de densidade de probabilidade que descreve a dinâmica da partícula que evolui com o passar do tempo. Posteriormente, aproximadamente em 1931, Norbert Wiener<sup>2</sup> apresentou uma fundamentação matemática que pudesse interpretar o movimento browniano como um processo estocástico, e ainda formalizou matematicamente a teoria. Por essa razão, o movimento browniano também é chamado em vários livros de Processo de Wiener.

**Definição 1.3.1.** (Movimento Browniano)

Formalmente, um processo estocástico  $W_t: \Omega \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , é um movimento browniano se

1. Possui trajetórias contínuas e inicializadas na origem:  $W_0(\gamma) = 0$ , para quase todo  $\gamma \in \Omega$ ;
2. Os incrementos  $W_t - W_s$  tem distribuição normal com média zero e variância  $t - s$  para  $0 \leq s \leq t$ , que denotamos por  $N(0, t - s)$ ;
3. Os incrementos  $W_v - W_u$  e  $W_t - W_s$  são independentes em intervalos de tempo disjuntos  $0 \leq s \leq t \leq v \leq u$ ;
4. Para  $\omega$  fixo,  $W_t$  tem trajectória contínua.

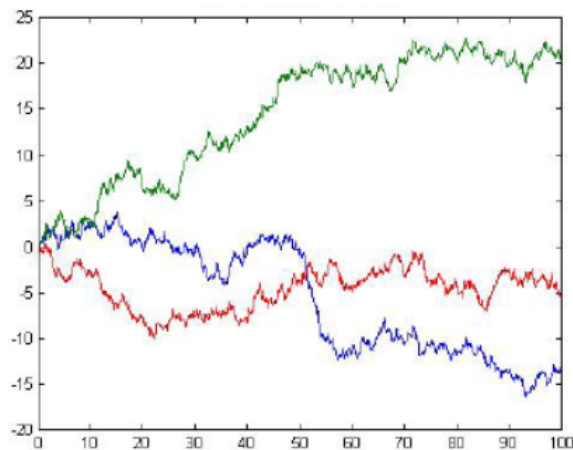


Figura 1.1: Trajectórias do Movimento de Wiener.

---

<sup>2</sup>Robert Brown, que em 1827 observou partículas presas em cavidades dentro de grãos de pólen na água. BROWN (1828)

As Condições que definem  $(W_t)_{t \geq 0}$  são suficientes para determinar todas as probabilidades associadas ao processo. Como consequência da definição, teremos a seguinte propriedade.

**Proposição 1.3.1.** *Se  $(W_t)_{t \geq 0}$  é um Movimento Browniano, então para quaisquer tempo  $s$  e  $t$  temos  $\mathbb{E}[W_t W_s] = \min(s, t)$ .*

*Demonstração.* Demonstração em [13]. □

### 1.3.1 Martingales

**Definição 1.3.2.** As martingales surgiram como modelos de jogos justos, na sua formulação mais simples e em tempo discreto, uma sucessão de variáveis aleatórias  $(X_n)_{n \geq 0}$  com esperança finita é uma martingale se  $\mathbb{E}_p(X_{n+1}|X_0, X_1, \dots, X_n) = X_n$ . Se pensarmos que  $X_n$  representa a fortuna de um jogador ao fim de  $n$  jogadas, então  $\mathbb{E}_p(X_{n+1}|X_0, X_1, \dots, X_n) = X_n$  significa que a fortuna do jogador ao fim da próxima jogada é, em média, igual à sua fortuna actual.

**Definição 1.3.3.** *Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  um espaço de probabilidade e  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  uma filtração dada, isto é, uma família crescente de  $\sigma$ -álgebras:  $t > s \rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ . Um processo estocástico  $M = (M_t)_{t \geq 0}$  chama-se uma  $\mathcal{F}$ -martingale se verifica as condições:*

1.  $M$  é  $\mathcal{A}$ -adaptado, isto é,  $M_t$  é  $\mathcal{F}_t$ -mensurável para qualquer  $t > 0$ .
2.  $E_p|M_t| < \infty$  para qualquer  $t \geq 0$ .
3.  $E(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s$  para qualquer  $s \leq t$ .
4. O processo estocástico  $M$  chama-se uma  $\mathcal{A}$ -supermartingale se verifica 1 e 2 da definição  
e

(Sup):  $E(M_t|\mathcal{A}_s) \leq M_s$  para qualquer  $s \leq t$  e (Sup)  $E(M_t|\mathcal{A}_s) \geq M_t$  Para qualquer  $s \leq t$ .

### 1.3.2 Integral Estocástico

Considerando a Filtração natural do movimento browniano  $\mathcal{F}_t$ , a integral estocástica de Itô de um processo elementar  $\mathcal{H}$  em relação a um movimento browniano  $W_t$  é dado por

$$\int_0^t \mathcal{H}_s dW_s = \sum_{i=0}^n (\mathcal{H}_t)_{i-1} ((W_t)_i - (W_t)_{i-1}) \quad (1.3)$$

Variando  $t \geq 0$ , denotamos por  $Y_t$  o processo dado pela integral estocástica

$$Y_t = \int_0^t \mathcal{H}_s dW_s \quad (1.4)$$



**Proposição 1.3.2.** (*Isometria de Itô*). Dada uma integral de Itô  $Y_t = \int_0^t \mathcal{H}_s dW_s$  as variáveis aleatórias  $Y_t \in \mathcal{H} \in L^2(\Omega)$  e  $\mathcal{H}_s \in L^2(\Omega \times [0, t])$  tem as mesmas normas nos respectivos espaços, isto é

$$\mathbb{E} \left( \int_0^t h_t(w) dW \right)^2 = \mathbb{E} \left( \int_0^t h_s^2(w) ds \right).$$

*Demonstração.* Demonstração em [17] □

**Definição 1.3.4.** Dizemos que um processo estocástico adaptado  $\mathcal{H}_t$ <sup>3</sup> é Itô integrável no intervalo  $[0, t]$  se  $\mathbb{E} \left( \int_0^t \mathcal{H}_t(w) dW \right) = L^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \mathcal{H}_t^n dW$

Sejam dadas as constantes  $a$  e  $b \in \mathbb{R}$  e os processos  $G$  e  $H \in L^2[0, T]$ .

1. Linearidade

$$\int_0^T (aG + bH) dW(s) = \int_0^T aG dW(s) + \int_0^T bH dW(s),$$

2. (Gerador de martingales) O processo

$$\mathbb{E} \left( \int_0^T G dW(s) \right) = 0,$$

3.

$$\mathbb{E} \left( \int_0^T G dW(s) \right)^2 = \mathbb{E} \left( \int_0^T G^2 \right) ds.$$

Para as demonstrações destas propriedades veja [17].

### 1.3.3 Equações diferenciais estocásticas

O resultado principal desta secção é um teorema de existência e unicidade de solução de equações diferenciais estocásticas (EDE) em  $\mathbb{R}^n$

**Definição 1.3.5.** *Equação Diferencial Estocástica*

Uma equação diferencial estocástica é uma equação com condição inicial do tipo:

$$dS(t) = \mu(t, S(t))dt + \sigma(t, S(t))dW(t). \quad (1.5)$$

$$S(0) = s_0. \quad (1.6)$$

Onde :

---

<sup>3</sup>Um processo estocástica  $(X_t)_{t \geq 0}$  é dito adaptado a uma filtração  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , se para cada tempo  $t \geq 0$ , a variável aleatória  $X_t$  é mensurável em relação á  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_t$ . Todo o processo é adaptado á sua filtração natural  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$ , também chamado de história do processo até ao tempo  $t$ .

- $S(t)$  é uma incógnita na equação;
- Os coeficiente  $\mu$  e  $\sigma$  são funções;
- $W(t)$  é um processo de Wiener.

**Proposição 1.3.3.** A solução de ((1.17)) é um processo  $S(t)$  satisfazendo

$$S(t) = s_0 + \int_0^t \mu(s, S(s))ds + \int_0^t \sigma(s, S(s))dW(s), \quad (1.7)$$

para todo  $t \in [0, T]$ .

## 1.4 Fórmula de Itô

Nesta secção introduzimos a fórmula de Itô para o cálculo estocástico. Esta fórmula é usada para achar o diferencial de funções de duas variáveis.

**Teorema 1.4.1.** *Suponhamos que  $S(t)$  segue um processo estocástico da forma:*

$$dS(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t), \quad (1.8)$$

onde  $\mu(t) \in M^1(0, T)$  e  $\sigma(t) \in M^2(0, T)$ . Seja  $h : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua tal que  $\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}$  existem e são contínuas.

Definamos o processo estocástico  $(Y(t))_{t \in [0, T]}$   $Y(t) = f(t, S(t))$ .

Então o diferencial estocástico  $Y(t) = f(t, S(t))$  existe e é dado por:

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial t}(t, S(t))dt + \frac{\partial Y}{\partial S(t)}dS(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial S^2(t)}(t, S(t))(dS(t))^2.$$

**Observação 1.4.1.**  $(dS(t))^2$  é formalmente calculado através da tabela de multiplicação abaixo.

Tabela 1.1: Tabela de multiplicação de Itô

$\times$	$dt$	$dW(t)$
$dt$	$0$	$0$
$dW(t)$	$0$	$dt$

*Demonstração.* Consideremos a fórmula de Taylor (expansão polinomial )

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!}. \quad (1.9)$$

Reescrevendo a fórmula (1.9), do seguinte modo:

$$f(x) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!}.$$

$$f(x) - f(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!}.$$

Trocando  $x$  por  $x + \Delta x$  e  $a$  por  $x$ , obtemos:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^n(x)(\Delta x)^n}{n!}. \quad (1.10)$$

Reescrevendo a fórmula (1.10), obtemos:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x) \Delta x + \frac{1}{2} f''(x) (\Delta x)^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{f^n(x)(\Delta x)^n}{n!}.$$

Tomando limite para  $\Delta x \rightarrow 0$  e desprezando os termos superiores a 2, obtemos:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (dx)^2. \quad (1.11)$$

Agora na equação (1.8), considerando  $f = f(t, S_t)$  e utilizando a série de Taylor desenvolvida em (1.11), obtemos:

$$df = \frac{\partial f}{\partial S(t)} dS(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S(t)^2} (dS(t))^2. \quad (1.12)$$

De (1.8) temos que:

$$(dS(t))^2 = (\mu(t)dt + \sigma dW(t))^2 = [\mu(t)^2 dt^2 + 2\mu\sigma(t) dt dW(t) + \sigma(t)^2 (dW(t))^2].$$

Considerando que  $(dt)^2 \rightarrow 0$ ,  $dt dW(t) \rightarrow 0$  e que  $(dW(t))^2 \rightarrow dt$ , então:

$$(dS(t))^2 = \sigma^2(t) dt.$$

Dai que a equação (1.12) fica:

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial t}(t, S(t)) + \mu \frac{\partial f}{\partial S(t)}(t, S(t)) + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2(t)}(t, S(t)) \right) dt + \sigma \frac{\partial f}{\partial S(t)}(t, S(t)) dW(t).$$

□

A fórmula de Itô multidimensional para dimensão  $n$  pode ser representada como

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \mu_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \text{tr}[\sigma^* H \sigma] dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_i dW(t),$$

onde  $H$  denota a matriz Hessiana

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

O traço é definido pelo somatório dos elementos da diagonal principal, isto é

$$\text{tr} A = \sum_i A_{ii}.$$

## 1.5 Movimento Browniano Geométrico

Consideremos a equação diferencial estocástica

$$\begin{cases} dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \\ S(t_0) = s_0. \end{cases} \quad (1.13)$$

Esta equação é chamada Movimento Browniano Geométrico (MBG) e será uma ferramenta fundamental para modelar o preço de activos. Neste contexto  $\mu$  é chamada de drift e o coeficiente  $\sigma$  é chamado de volatilidade do activo.

**Proposição 1.5.1.** A solução da equação (1.13) é um processo satisfazendo a equação

$$S(t) = s_0 \exp \left\{ \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (t - t_0) + \sigma(W(t) - W(t_0)) \right\}. \quad (1.14)$$

*Demonstração.* Seja  $Y(t, S(t)) = \ln S(t)$ , aplicando a fórmula de Itô, temos

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial t}(t, S(t))dt + \frac{\partial Y}{\partial S(t)}dS(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial S^2(t)}(t, S(t))(dS(t))^2.$$

Onde as derivadas parciais são dadas por

$$\frac{\partial Y}{\partial t}(t, S(t)) = 0; \quad \frac{\partial Y}{\partial S(t)}(t, S(t)) = \frac{1}{S(t)} \quad e \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial S^2(t)}(t, S(t)) = -\frac{1}{S^2(t)}. \quad (1.15)$$

Então

$$\begin{aligned} (dY(t, S(t))) &= d \ln S(t) = \left\{ 0 + \cancel{\mu S(t)} \frac{1}{S(t)} - \frac{1}{2} \cancel{\sigma^2 S(t)^2} \frac{1}{S(t)^2} \right\} dt \\ &\quad + \cancel{\sigma S(t)} \frac{1}{S(t)} dW(t) \\ d \ln S(t) &= \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dW(t). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Integrando no intervalo de  $t_0$  a  $t$ , temos

$$\begin{aligned} \int_0^t d \ln(t) &= \int_{t_0}^t \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) ds + \int_{t_0}^t \sigma(s, S(s))dW(s) \\ \ln S(t) - \ln S(0) &= \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (t - t_0) + \sigma(W(t) - W(t_0)) \\ S(t) &= s_0 \exp \left\{ \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) (t - t_0) + \sigma(W(t) - W(t_0)) \right\}. \end{aligned}$$

□

### 1.5.1 Existência e unicidade de soluções

Sejam  $f : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $g : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  funções mensuráveis satisfazendo às seguintes condições:

- (a) Condição de Lipschitz: existe uma constante  $K > 0$  tal que  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$  e  $\forall t \in [0, T]$

$$|f(x, t) - \mu(y, t)| + |g(x, t) - g(y, t)| \leq K |x - y|.$$

- (b) Restrição de crescimento: existe uma constante  $C > 0$  tal que  $\forall t \in [0, T]$  e  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$|f(x, t)|^2 + |g(x, t)|^2 \leq C^2(1 + |x|^2).$$

Onde  $|\cdot|$  denota a correspondente norma euclidiana em cada espaço considerado e  $K$  é uma constante. Seja  $Y$  uma variável aleatória  $n$ -dimensional independente do movimento browniano  $m$ -dimensional  $(B_t)_{t \in [0, T]}$  dado tal que  $E(|Y|^2) < \infty$

Então a equação diferencial estocástica

$$dS(t) = \mu(t, S(t))dt + \sigma(t, S(t))dW(t). \quad (1.17)$$

$$S(0) = s_0. \quad (1.18)$$

Admite uma única solução.

# Capítulo 2

## Dinâmica de Portfólio

O estudo de Finanças Clássicas começa em 1952, quando da publicação do trabalho seminal de Harry Markowitz (1952), intitulado “Portfolio Selection”, ou Teoria de Seleção de Portfólios, na qual o autor formula basicamente dois estágios para seleção de carteiras de investimentos. O primeiro estágio corresponde à seleção dos activos que irão compor o portfólio, através da observação e da análise do desempenho futuro esperado dos títulos. Já o segundo estágio tem como foco otimizar o desempenho do portfólio através da ponderação do peso de cada título na carteira. Vale salientar que Markowitz (1952) tem como foco do seu trabalho o segundo estágio, desenvolvendo uma metodologia para otimizar o portfólio para o que se espera de um investimento racional: o maior retorno para determinado nível de risco ou o menor risco para determinado nível de retorno. Neste capítulo vamos trazer a derivação da dinâmica de um portfólio. Salientar que para a derivação deste capítulo vamos usar a obra [4], com algumas alterações nas variáveis baseada em [19].

### 2.1 Portfólio

Vamos considerar um mercado financeiro que consiste de vários activos com diferentes preços. Suponhamos que o tempo está dividido em períodos de tempo iguais  $\Delta t$  e que as vendas só acontecem em pontos discretos  $n\Delta t$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  vamos proceder assim com o estudo tomando um período fixo  $[t, t + \Delta t]$ , para algum  $t = n\Delta t$ . Este intervalo é chamado de período  $t$ . Partindo de modelação para pontos discretos, vamos fazer o  $\Delta t$  tender a zero para ter o modelo.

- $N$  é o número de activos;
- $h_i$  é o número de ações do tipo  $i$ ;
- $c(t)$  representa a taxa de consumo durante o período  $t$ ;
- $S_i$  é o preço da ação  $i$ ;

- $V(t)$  é o valor do portfólio no período  $t$ .

## 2.2 Portfólio autofinanciado

**Definição 2.2.1.** (Portfólio autofinanciado)

Um portfólio  $h$  com o valor  $V$  diz se autofinanciado se satisfaz a condição

$$dV(t) = \sum_{i=0}^N h_i(t) dS_i(t) - c(t)dt, \quad (2.1)$$

**Definição 2.2.2.** (Portfólio relativo)

Para um determinado portfólio  $h$ , o portfólio relativo é dado por:

$$\pi_i(t) = \frac{h_i(t)S_i(t)}{V(t)}, \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=0}^N \pi_i(t) = 1$$

**Definição 2.2.3.** Definimos activo sem risco e activo com risco.

Temos que o preço de um activo sem risco será dado por

$$\begin{aligned} dS_0(t) &= r_0 S_0(t) dt \\ S_0(0) &= 1. \end{aligned}$$

E um activo com risco será descrito pelo modelo geométrico browniano

$$\begin{aligned} dS(t) &= S(t)(\mu dt + \sigma dW(t)) \\ S_0(0) &= s_0 \end{aligned}$$

onde temos que

- $r$  representa a taxa de juros;
- $\mu$  representa o investimento;
- $\sigma$  representa a volatilidade;
- $dt$  representa a primeira derivada em função do tempo; e
- $dW(t)$  representa o movimento Browniano.

A informação e decisões no modelo estão estruturadas da seguinte maneira:

- No início do período  $t$ , tomamos o portfólio de período antigo,  $h_{t-\Delta t} = h_{t-\Delta t}^i, i = 1, 2, 3, \dots, N$ ;
- No tempo  $t$  observa-se o vector de preços dos activos neste tempo:  $S_t = (S_t^1, S_t^2, S_t^3, \dots, S_t^N)$ ;
- No tempo  $t$  depois vamos observar o vector  $S_t$ , escolhe-se um novo portfólio  $h_t$  para ser vendido durante o período  $t$ .

**Observação 2.2.1.** *O Portfólio que está a ser estudado nesse trabalho, é sem o pagamento de dividendos de activos.*

## 2.3 Cálculo do valor de portfólio

No início do período  $[t, t + \Delta_t]$ , o nosso valor  $V_t$  é igual ao valor correspondente ao portfólio do período passado  $h_{t-\Delta t}$ . Então podemos escrever da seguinte maneira:

$$V_t = \sum_{i=1}^N h_{t-\Delta t}^i S_t^i = h_{t-\Delta t} S_t \quad (2.3)$$

A equação (2.3) nos mostra o valor no início do período  $t$  é igual ao valor correspondente a venda do portfólio antigo aos preços de hoje (período  $t$ ). Este Valor  $V_t$  pode ser usado para a compra de novo portfólio para ser vendido durante o período  $t$  e para a taxa de consumo do período  $t$ . O custo do novo portfólio  $h_t$  que deve ser comprado aos preços de hoje é dado por

$$\sum_{i=1}^N h_t^i S_t^i = h_t S_t.$$

O custo do consumo  $C_t$  para todo o período é dado  $C_t \Delta_t$ . No valor do Portfólio antigo retiramos uma parte para a compra do novo portfólio e o resto consideramos para o consumo. Com estas informações podemos escrever a equação do orçamento para o período  $t$ :

$$h_{t\Delta t} S_t - h_t S_t = C_t \Delta_t \iff h_{t\Delta t} S_t = h_t S_t + C_t \Delta_t. \quad (2.4)$$

Vamos introduzir a notação  $\Delta X_t = X_t - X_{t-\Delta t}$  para algum processo arbitrário  $X_t$ . A equação de orçamento (2.4) vamos escrever como

$$S_t \Delta h_t + C_t \Delta t = 0. \quad (2.5)$$

Objectivo é encontrar o modelo na forma contínua, então faremos  $\Delta t \rightarrow 0$  na equação (2.5) obtendo,

$$S_t dh_t + C_t dt = 0. \quad (2.6)$$

O procedimento feito para encontrar a equação (2.6) é correcto, porém nos queremos encontrar o modelo no tempo contínuo, fazendo  $\Delta t \rightarrow 0$  na equação (2.6) e obtemos

$$S_t dh_t + C_t dt = 0. \quad (2.7)$$



O procedimento feito para encontrar a equação (2.3) é correcto, porém no nosso caso, é considerado incorrecto porque todas as equações diferenciais devem ser interpretadas sobre o ponto de vista de Itô. A correcção é feita pela adição e subtração de  $S_{t-\Delta t}\Delta h_1$  no primeiro membro da equação (2.6):

$$\begin{aligned} S_{t-\Delta t}\Delta h_t - S_{t-\Delta t}\Delta h_t + S_t\Delta h_t + C_t\Delta &= 0 \\ S_{t-\Delta t}\Delta h_t - (S_t - S_{t-\Delta t})\Delta h_t + C_t\Delta &= 0 \\ S_{t-\Delta t}\Delta h_t + \Delta S_t\Delta h_t + C_t\Delta &= 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Agora fazendo  $\Delta t \rightarrow 0$  na equação (2.8) temos que:

$$S_t dh_t + dh_t dS_t + C_t dt = 0. \tag{2.9}$$

Fazendo  $\Delta t \rightarrow 0$  na equação (2.3) temos que:

$$V_t = h_t S_t \tag{2.10}$$

e aplicando o diferencial de Itô, obtemos:

$$dV_t = h_t dS_t + S_t dh_t + dS_t dh_t. \tag{2.11}$$

A equação (2.11) é a equação geral para a dinâmica de um portfólio arbitrário e a equação (2.9) é a equação de orçamento válida para qualquer portfólio auto-financiado:

$$dV_t = h_t dS_t - C_t dt. \tag{2.12}$$

Em particular se não houver algum consumo ( $C_t = 0$ ), teremos que

$$dV_t = h_t dS_t$$

**Definição 2.3.1.** *Seja dado o processo de preços  $N$ -dimensional ( $S_t : t \geq 0$ ).*

1. *Uma estratégia de portfólio, frequentemente chamada de portfólio, é qualquer processo ( $S_t : t \geq 0$ ) adaptado a  $\mathcal{F}_t$ . Isto quer dizer que  $h_t$  é mensurável em relação á filtração  $\mathcal{F}_t$  gerada pelo processo de preço  $S_t$ .*
2. *O portfólio  $h$  é dito Markoviano se for da forma*

$$h_t = h(t, S_t)$$

*para alguma função  $h : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \leftarrow \mathbb{R}^N$ .*

3. *O valor  $V_t^h$  corresponde ao valor do portfólio  $h$  no tempo  $t$  é dado por*

$$V_t^h = \sum_{i=1}^N h_t^i S_t^i$$

4. O processo consumo é unidimensional ( $C_t : t \geq 0$ ) adaptado a  $\mathcal{F}_t$ .
5. O par portfólio - consumo é dito auto-financiado se o valor do processo  $V^h$  satisfaça a condição:

$$\begin{aligned} dV_t^h &= \sum_{i=1}^N h_t^i dS_t^i - C_t dt \\ &= h_t dS_t - C_t dt. \end{aligned} \tag{2.13}$$

**Observação 2.3.1.** Geralmente se admite que o portfólio  $h_t$  dependa também dos preços da trajetória passada ( $S_u : u \leq t$ ). Nesse trabalho consideramos apenas portfólios Markovianos, aqueles que dependem apenas dos preços do tempo  $t$  em que estivermos. Por vezes é necessário exprimir o valor do portfólio em função dos pesos de cada elemento do vector  $h_t$ . Isto significa que ao invés de usar o número absoluto de activos de um certo tipo  $i$  que estão no portfólio, podemos usar a percentagem (proporção relativa ou retorno relativo) que este número total de activos vale no total do portfólio.

# Capítulo 3

## Resseguro e investimento

Neste capítulo vamos abordar da acerca otimização de resseguro e investimento, onde traremos a formulação de um problema de resseguro ótimo e controle do investimento usando como apoio as estratégias admissíveis e o princípio da programação dinâmica, e para uma melhor compreensão, vamos separar o resseguro do investimento em 3 casos específicos e os cálculos junto da análise do modelo serão sustentados pelas seguintes obras [19] e [8]. Frisar que no final dos três casos, traremos as análises dentro do Benchmark.

### 3.1 Formulação do problema

Iniciamos a formulação, definindo um espaço de probabilidade completo e filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_{t \in [0, T]}, P)$  que satisfaz a condição usual.

$\mathcal{F}_{t \in [0, T]}$  é uma filtração com  $\mathcal{F}_T$  onde  $T$  é um horizonte de tempo fixo e finito.

Nessas condições, modelamos o processo de risco  $\mathbf{C}(t)$  de acordo com o modelo de difusão

$$d\mathbf{C}(t) = a dt - b dW(t), \quad (3.1)$$

onde temos que  $a$  e  $b$  são constantes positivas,  $W(t)$  o movimento browniano definido em  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_{t \in [0, T]}, P)$ . Supondo que o prêmio será pago de forma contínua e a constante de seguro  $\mathbf{c} = (1 + \theta)\lambda$  com seguro reforçado sempre que  $\theta \rightarrow 0$ . De acordo com a equação (3.1), a equação de resseguro será dada segundo o processo em [8]:

$$dR(t) = c dt - d\mathbf{C}(t) = a\theta dt + b dW(t), \quad (3.2)$$

como forma de reduzir a exposição ao risco, a seguradora compra um resseguro e  $p(t)$  representa a proporção de cada sinistro pago pelo resseguro.

Aplicando o resseguro proporcional entre a seguradora e a resseguradora, obtemos o seguinte:

$$dR(t) = (\theta - np(t))a dt + b(1 - p(t))dW(t),$$

onde  $n > 0$  representa a segurança da resseguradora.

Daqui, temos que o lucro da seguradora será  $(1 + \theta)\lambda - (1 + n)p(t)\lambda - (1 - p(t))\lambda$ .

Para uma melhor compreensão dos cálculos e resolução, vamos deixar claro que a variável  $R$  representa o resseguro, enquanto que  $X$  representa o portfólio.

Usando a definição de activo com risco e activo sem risco dado na dinâmica do portfólio e pela eq. (2.4), obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned} dX &= \pi_0 dS_0(t) + \pi dS(t) + dR(t) \\ &= \pi_0 r S_0(t) dt + \pi S(t) (\mu dt + \sigma dW) + (\theta a - (1 - p(t))\lambda) dt + bp(t) dW(t). \end{aligned}$$

Por cálculos matemáticos teremos o modelo que segue,

$$dX = [rX(t) + \pi(t)(\mu - r) + a(\theta - np(t))\lambda] dt + [\pi\sigma + b(1 - p(t))] dW(t) \quad (3.3)$$

**Observação 3.1.1.** A estratégia óptima de resseguro dinâmico pode orientar a seguradora a tomar decisões de longo prazo em relação ao resseguro e ao investimento. Por outro lado, a análise de sensibilidade do modelo paramétrico também pode ajudar a seguradora a avaliar a estratégia actual e ajustá-la no próximo período.

Daremos, assim, alguns meios que vão ajudar na análise:

Para o excedente inicial, teremos que, para  $X \in (0, U)$ , vamos definir os seguintes tempos de paragem.

$$\begin{cases} \tau_0^P = \inf\{t | t \geq 0 \text{ e } X \leq 0\}, \\ \tau_U^P = \inf\{t | t \geq 0 \text{ e } X \geq U\}, \end{cases} \quad (3.4)$$

para  $\tau_0^P = \infty$  e  $\tau_U^P = \infty$ , teremos que o processo excedente nunca pode atingir 0 e  $U$ , respectivamente. Indica assim, o primeiro tempo antes que o valor excedente atinja ruína, podemos ver os casos concretos que seguem.

$$\tau^P = \begin{cases} \tau_U^P, & \text{se } \tau_0^P > \tau_U^P \\ \infty & \text{se } \tau_0^P < \tau_U^P. \end{cases} \quad (3.5)$$

Em muitas literaturas, o objectivo tradicional é minimizar o tempo esperado para alcançar o objectivo maior antes da ruína, seleccionando o nível de retenção de risco ideal, ou seja,

$$\inf_p \mathbb{E}_x^{\mathbb{P}}(\tau^P | X_0 = x), \quad (3.6)$$

onde  $\mathbb{E}_x^{\mathbb{P}}(\cdot)$  é a esperança condicional definida sobre  $\mathbb{P}$  com a excedente inicial  $X$ . A estrutura mencionada acima é o resseguro óptimo tradicional, o problema de minimização do tempo esperado. No entanto, os modelos paramétricos usados, teoricamente contêm importantes incertezas dentre estimativas de parâmetros, como os termos de difusão do processo de seguro. Isso significa que a seguradora geralmente tem que ser responsável por

um nível de erro significativo com estimativas de parâmetros do drift. Em outras palavras, além da medida de probabilidade de referência  $\mathbb{P}$ , existem outras medidas de probabilidade possíveis para a dinâmica do processo estocástico. Mais precisamente, as seguradoras suspeitam que o drift do processo de seguro pode ser especificado incorretamente. Então, ao invés de otimizar sob a medida de referência  $\mathbb{P}$ , elas consideram definir  $\mathbf{Q}$  das medidas candidatas que são localmente equivalente a  $\mathbb{P}$ , e a incerteza do modelo é caracterizada por uma transformação de Girsanov de acordo com [15]. Uma medida de probabilidade  $\mathbf{Q}$  está no definir  $\sigma$  se for

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^s \theta_t^2 dt + \int_0^s \theta_t dW_t \right\}, \quad (3.7)$$

para algum  $\mathcal{F}$ -progressivamente mensurável. Assume-se que o processo  $(\theta_t)_{t \geq 0}$ , para qualquer  $t > 0$ , sempre existe alguma constante  $K_{\mathbf{Q}}$  tal que  $|\theta_t| < K_{\mathbf{Q}}$ , e o processo  $\theta_t$  satisfaz  $\mathbb{E}_x^{\mathbf{Q}} \left( \int_0^{\tau^p} \theta_t^2 dt \right) < \infty$  para alguma estratégia de resseguro  $p$ . Denotamos por  $\Theta$  todo o espaço do processo  $\{\theta_t, t \geq 0\}$ .

Além disso, ficou claro que  $\mathbb{P} \in \sigma$  com  $\theta_t \equiv 0$ .

Com isso, construímos uma família de probabilidades mensuráveis em  $\sigma$  parametrizada por  $\theta \in \Theta$  de acordo com o Teorema de Girsanov. Sob a medida alternativa  $\mathbf{Q}$ , o processo  $B_t^{\mathbf{Q}}$  é dado por:

$$dB_t^{\mathbf{Q}} = dB_t - \theta_t dt \quad (3.8)$$

é um movimento browniano padrão adaptado à informação filtrada  $\mathcal{F}_t$ . É uma probabilidade completa no espaço  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{Q})$ . Note que as alternativas para o modelo da classe  $\sigma$  diferem apenas no investimento, porque nós usamos o teorema de Girsanov para defini-lo. Portanto, o processo de excedente (3.3) evolui de acordo com a seguinte dinâmica:

$$dX = [rX(t) + \pi(t)(\mu - r) + a(\theta - np(t))\lambda + b(1 - p(t))]dt + [\pi\sigma + b(1 - p(t))]dB^{\mathbf{Q}}(t) \quad (3.9)$$

sobre a medida  $\mathbf{Q}$ .

**Definição 3.1.1.** *Estratégias admissíveis - A estratégia de resseguro  $p_t, t \geq 0$  é admissível se:*

1.  $p_t$  é  $\mathcal{F}_t$  progressivamente Mensurável;
2.  $0 \leq p_t \leq 1$  ;
3.  $\mathbb{E}_X^{\mathbf{Q}}(\tau^p) < \infty$  sob a medida  $\mathbf{Q}$ .

*Denotamos o conjunto de todas as estratégias admissíveis para  $\mathcal{A}$*

Para qualquer  $\mathbf{Q} \in \sigma, p \in \mathcal{A}$  e  $\epsilon > 0$ , podemos formular um problema robusto de controle para modificar o problema (3.6) e definir um funcional da seguinte forma

$$\tau^{p, \mathbf{Q}}(x) = \mathbb{E}_x^{\mathbf{Q}}(\tau^p) - \frac{1}{\epsilon} h(\mathbf{Q}_{rp} | \mathbb{P}_{\tau p}), \quad (3.10)$$

para qualquer  $\mathcal{P} \in \mathbb{A}, s > 0$ . De (3.6), temos que a função valor é dado por

$$V(x) = \inf_{p \in \mathcal{A}} \left\{ \sup_{\mathbf{Q} \in \sigma} \left[ \mathbb{E}_x^{\mathbf{Q}}(\tau^p) - \frac{1}{\epsilon} h(\mathbf{Q}_{rp} | \mathbb{P}_{\tau p}) \right] \right\}. \quad (3.11)$$

Com a entropia relativa de  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbb{P}$  no tempo  $t$  dado por

$$h(\mathbf{Q}_t | \mathbb{P}_t) = \mathbb{E}_x^{\mathbf{Q}} \left( \ln \left( \frac{d\mathbf{Q}_t}{d\mathbb{P}_t} \right) \right), \quad (3.12)$$

onde  $\mathbf{Q}_t$  ( $\mathbb{P}_t$ ) é a probabilidade medida por  $\mathbf{Q}$  ( $\mathbb{P}$ ) restrito para  $\mathcal{F}_t$  podemos ver que os pontos a partir do modelo de referência dado são penalizados através do segundo termo na esperança matemática. De (3.7) e (3.12) teremos que

$$\begin{aligned} h(\mathbf{Q}_t | \mathbb{P}_t) &= \mathbb{E}_x^{\mathbf{Q}} \left( \ln \left( \frac{d\mathbf{Q}_t}{d\mathbb{P}_t} \right) \right) \\ &= \mathbb{E}_x^{\mathbf{Q}} \left[ -\frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds + \int_0^t \theta_s dB_s \right] \\ &= \mathbb{E}_x^{\mathbf{Q}} \left[ \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds + \int_0^t \theta_s dB_s \right] \\ &= \mathbb{E}_x^{\mathbf{Q}} \left[ \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds \right]. \end{aligned}$$

A partir de (3.11), mostramos que a entropia relativa é escalada por  $\epsilon$ . A constante positiva  $\epsilon$  reflete o nível de aversão à ambiguidade, com isso, significa que com um  $\epsilon$  maior, a seguradora tem menos fé dentro da referência do modelo e escolhe a alternativa mais conservadora a medida desviante a partir de Benchmark.

**Observação 3.1.2.** Aqui temos dois casos especiais, primeiro quando  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , a seguradora é extremamente convencida que o modelo de Benchmark em  $\mathbb{P}$  é exatamente o modelo verdadeiro e qualquer desvio do modelo Benchmark será penalizado infinitamente por

$$h(\mathbf{Q}_t | \mathbb{P}_t) \epsilon \rightarrow +\infty$$

se  $\theta_s \neq 0$ . Para obter o supremo,  $\theta_s^* = 0$  deve ser satisfeito, indicando que a pior medida  $\mathbf{Q}^*$  deve ser a medida de referência  $\mathbb{P}$ , garantindo assim que o termo de penalização seja zero. A pior medida  $\mathbf{Q}^*$  é definida por:

$$\mathbf{Q}^* = \arg \sup_{\mathbf{Q} \in \sigma} \left\{ \mathbb{E}_x^{\mathbf{Q}}(\tau^p) - \frac{1}{\epsilon} h(\mathbf{Q}_{\tau p} | \mathbb{P}_{\tau p}) \right\}.$$

Daqui, o problema (3.11) reverte o problema tradicional (3.6), onde a seguradora é ambiguidade-neutra. O outro caso de  $\epsilon \rightarrow +\infty$  indica que a prazo para a penalização vai desaparecer e todas as alternativas do modelo são sobre igual fundamento.

## 3.2 Resultados Óptimos

Nesta secção, para o modelo de risco (3.3), nosso objectivo é encontrar a estratégia de resseguro óptima para minimizar o tempo esperado para atingir um determinado objectivo superior antes da ruína. Apresentamos um teorema de verificação na secção a seguir, que usamos para encontrar o valor  $V$  na região  $(0, U)$ . Então, nas secções seguintes, a estratégia de resseguro óptimo robusto e a função de valor associado são derivados explicitamente, não só para o caso do resseguro barato mas também para o caso de resseguro não barato.

**Definição 3.2.1.** Para qualquer função  $D(x) \in \mathbf{C}^2(0, U)$ , definimos o infinitésimo gerador  $\mathcal{L}^{\pi, p}$  por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\pi, p} D(x) = & [rX(t) + \pi(t)(\mu - r) + a(\theta - np(t))\lambda - (1 - p(t))\lambda + \pi\sigma + b(1 - p(t))]D_{xx} + \\ & + \frac{1}{2}[\pi\sigma + b(1 - p(t))]^2 D_{xxx} + 1 - \frac{\theta^2}{2\epsilon} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Neste caso,  $D_x$  e  $D_{xx}$  representam, respectivamente, a primeira e segunda derivada. Além disso, observamos que há uma correspondência biunívoca entre o processo  $\theta$  e a medida  $Q$ . Portanto, para determinar o investimento óptimo da derivada de distorção  $\theta^*$ , que representa a pior medida  $Q$  na equação de HJB, consideramos a função valor  $V(x)$ . Supomos que  $V(x)$  é uma função de classe  $C^2(0, U)$  e satisfaz a seguinte equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB):

$$\inf_{p \in \mathcal{A}} \left\{ \sup_{\theta \in \Phi} [\mathcal{L}^{\theta, p} V(x)] \right\} = 0,$$

com a seguinte condição de fronteira

$$V(U) = 0. \quad (3.14)$$

A seguir, daremos o seguinte teorema de verificação que mostra que uma solução clássica da equação HJB, sujeita as condições de fronteira (3.14), é a função valor.

**Teorema 3.2.1.** *Teorema de verificação*

Suponhamos que  $D(x) \in \mathbf{C}^2(0, U)$  satisfaz as seguintes condições:

1.  $D(x)$  é uma função estritamente decrescente e contínua em  $(0, U)$ ;
2. Para algum  $p \in \mathcal{A}$ ,  $\mathcal{L}^{\theta^*, p} D(x) \geq 0$ ;

3. Para algum  $\theta \in \Phi$ ,  $\mathcal{L}^{\theta, p^*} D(x) \leq 0$ ;
4.  $\mathcal{L}^{\theta^*, p^*} D(x) = 0$ ;
5.  $D(U) = 0$ ;
6. Para algumas constantes  $a_1$  e  $a_2$ ,  $D(x) \leq a_1 + a_2 \ln\left(\frac{U}{x}\right)$ .

Então, a função valor  $V(x)$  definido em (3.11) coincide com  $D(x)$  em  $(0, U)$ , com isso, podemos prosseguir com  $V(x)$ , pode ser visto em [19].

### 3.2.1 O caso de resseguro barato

Nessa subsecção, suponhamos que a resseguradora cobra os prêmios de acordo com resseguro barato, ou seja,  $\theta_1 = \lambda$ . Então, prosseguimos para encontrar uma solução clássica para a equação que segue, se  $\theta_1 = \lambda$ , a eq. (3.13) fica,

$$\inf_{p \in \mathcal{A}} \left[ \sup_{\theta \in \Phi} [(rX + \pi(\mu - r\sigma) + a\theta - \theta_1 + p(t)(\theta_1 + b) + \pi\sigma)]V_x + \frac{1}{2}[\pi\sigma + bp(t)]^2 V_{xx} \right] = 0. \quad (3.15)$$

Com a condição de fronteira dada em (3.14). Devido a condição (1) do Teorema (3.2.1), temos que  $V_x < 0$ . Na condição de optimalidade no primeiro caso, maximizamos em  $\tilde{\theta}_1$ .

$$\inf_{p \in \mathcal{A}} \left\{ (rX(t) + \pi(t)(\mu - r) + a(\sigma - np(t))\lambda - (1 - p(t))\lambda + \pi\theta + b(1 - p(t)))V_x + \frac{1}{2}[\pi\theta + b(1 - p(t))]^2 (V_{xx} + V_x^2) + 1 \right\} = 0. \quad (3.16)$$

Assumimos que  $V_{xx} + \epsilon V_x^2 > 0$  por diferenciação, então a minimização global em (3.16) é dada por

$$\hat{p}(x) = -\frac{a\theta}{(\pi\sigma + b)^2} \cdot \frac{V_x}{V_{xx} + \epsilon V_x^2}. \quad (3.17)$$

Se  $\tilde{p}(x) \in [0, 1]$ , assumimos que  $p^*(x) = \tilde{p}(x)$ . Usando  $\tilde{p}(x)$  em (3.16) teremos

$$rXV_x - \frac{1}{2} \frac{a^2\theta_1^2}{(\pi\sigma + b)^2} \cdot \frac{V_x^2}{V_{xx}^2 + \epsilon V_x^2} + 1 = 0. \quad (3.18)$$



Note que é bastante difícil encontrar a solução dessa equação diferencial não linear directamente. Com isso, vamos usar o método da transformação exponencial.

$$\Phi(x) = e^{\epsilon V(x)}.$$

Daqui, temos:

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{\ln \Phi(x)}{\epsilon}, \\ V_x(x) &= \frac{\Phi_x(x)}{\epsilon \Phi(x)}, \\ V_{xx}(x) &= \frac{\Phi_{xx}(x) - \Phi_x^2(x)}{\epsilon \Phi^2(x)}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Substituindo essas igualdades em (3.18), obtemos:

$$rx\theta_x - \frac{1}{2} \cdot \frac{\theta}{(\pi\delta + b)^2} \times \frac{\Phi_x}{\Phi_{xx}} + \epsilon\Phi = 0 \quad (3.20)$$

com as condições de fronteira  $\theta(u) = 1$ . Note que a equação diferencial (3.20) tem a solução geral

$$\theta(x) = \left(\frac{x}{U}\right)^q, \quad (3.21)$$

onde  $q$  definido da seguinte maneira

$$q = \frac{r + \frac{1}{2} \cdot \frac{\theta}{(\pi\delta + b)^2}}{2r} + \epsilon - \sqrt{\left(r + \frac{1}{2} \frac{\theta}{(\pi\delta + b)^2}\right)^2 + 4r\epsilon} \quad (3.22)$$

Pela expressão (3.20) e (3.21) temos que  $V(x) = \frac{q}{\epsilon} \ln\left(\frac{x}{U}\right)$ , e daqui, temos

$$\hat{p} = -\frac{a\theta}{(\pi\sigma + b)^2} \cdot \frac{V_x}{V_{xx} + \epsilon V_x^2 - \frac{a\theta}{(\pi\sigma + b)^2} \frac{x}{q-1}} \quad (3.23)$$

que é sempre positivo no intervalo de  $(0, U)$ , percebemos que  $0 < \hat{p} < 1$  implica que  $x < x_1^*$  definido por

$$x_1^* = \frac{(\pi\sigma + b)^2(q-1)}{a\theta} > 0. \quad (3.24)$$

Para qualquer  $x \in (0, x_1^*) \cap (0, U)$ , a equação é  $p^*(x) = \hat{p}(x)$  e temos que  $0 < p^* < 1$ . Isso implica que, a região  $x \in (0, x_1^*) \cap (0, U)$  é definida como região de resseguro e o estado de  $x_1^*$  é chamado de ponto limite de resseguro. Nesse contexto, podemos ver os resultados óptimos em dois contextos específicos:  $U \leq x_1^*$  e  $x_1^* < U$ .

*Caso 1* : Se  $U \leq x_1^*$ , este é intervalo inteiro  $(0, U)$  na região de resseguro. Por isso, podemos ter o seguinte teorema.

**Teorema 3.2.2.** Se  $U \leq x_1^*$ , a função valor é definida por

$$V(x) = \frac{q}{\epsilon} \ln\left(\frac{x}{U}\right). \quad (3.25)$$

A estratégia óptima de resseguro robusto é definida por

$$p^*(x) = \hat{p}(x) = \frac{a\theta}{(\pi\sigma + b)^2} \cdot \frac{x}{p-1} \quad (3.26)$$

e o investimento óptimo

$$\theta_1^*(x) = \epsilon b p^* V_x = \frac{a\theta q}{b(1-q)}. \quad (3.27)$$

*Demonstração.* Podemos facilmente perceber que  $V(x)$  é uma função decrescente de classe  $C^2$  em  $(0, U)$ , que resolve a equação de HJB dada em (3.15). Com o teorema de verificação, podemos concluir que  $V$  é a função valor e o valor é obtido através da estratégia de resseguro óptima  $p^*$  medida com investimento  $\theta_1^*$ .

O resultado do Teorema (3.2.2) é dado sob a condição  $0 < \epsilon$ . Em casos extremos, isto é,  $\epsilon = \infty$ , não existem informações sobre o modelo verdadeiro e a incerteza, assumindo a estratégia completa de resseguro, faz a incerteza aumentar ao avaliar em  $r$ . A proposição a seguir mostra essa conclusão e indica que a expectativa robusta, que indica o tempo esperado para alcançar a meta, é igual a 1 quando a seguradora escolhe o activo sem riscos.  $\square$

**Proposição 3.2.1.** Se  $p_\epsilon^*(x) = p^*(x)$ ,  $V_\epsilon(x) = V(x)$  e  $\theta_\epsilon^*(x) = (\theta_1^*)_\epsilon(x)$ , então a função valor  $V_\epsilon(x)$  é uma função crescente,  $\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} p_\epsilon^*(x) = 0$  e  $\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} V_\epsilon(x) = \frac{1}{r} \ln\left(\frac{U}{x}\right)$ .

A derivação óptima de distorções é sempre negativa e diminui para um limite finito quando  $\epsilon \rightarrow \infty$ . Assim podemos ver em (3.27) que

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} (\theta_1^*)_\epsilon(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{a\theta q}{b(1-q)} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{a\theta}{b} \left( -1 + \frac{1}{1-q} \right) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{a\theta}{b} \left( -1 + \frac{2r}{r + \frac{1}{2} \frac{\theta}{(\pi\delta+b)^2} - \epsilon + \sqrt{\left(r + \frac{1}{2} \frac{\theta}{(\pi\delta+b)^2} + 4r\epsilon\right)}} \right) \\ &= -\frac{a\theta}{b}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

O que mostra que essa seguradora escolhe um distorção negativa na medida em que  $\epsilon \rightarrow \infty$

*Caso 2 :* Se  $x_1^* < U$  não é difícil encontrar a estratégia óptima de resseguro  $p^*(x) = \hat{p}(x)$  para  $0 < x < x_1^*$  (região de resseguro). Desta forma, de acordo com análise dentro do Caso 1, podemos deduzir que

$$V(x) = \ln \left[ C \left( \frac{x}{U} \right)^q \right]$$

Para  $0 < x < x_1^*$ , onde  $C$  é constante positiva. Além disso, o minimizador da equação é obtido em  $p^*(x) = 0$  usando propriedades da função quadrática para  $x_1^* \leq x < U$  (região não resseguira), e portanto a correspondente Eq.(3.16) transforma-se em

$$(rx + \pi(\mu - r) + a\theta + \pi\theta + b)V_x + \frac{1}{2}(\pi\sigma + b)^2(V_{xx} + \epsilon V_x^2) + 1 = 0. \quad (3.29)$$

De acordo com a transformação exponencial em (3.2.1), a equação acima reduz-se para

$$\left(x + \frac{\pi(\mu - r)}{r} + \frac{\theta(a + \pi)}{r} + \frac{b}{r}\right)\Phi_x + \frac{1}{2}(\pi\sigma + b)^2\Phi_{xx} + \epsilon\theta = 0. \quad (3.30)$$

Para resolver esta equação, podemos aplicar o método da série de potências usados em [3]. Em primeiro lugar, podemos ver que a solução geral para a equação (3.29), tem a forma

$$\Phi(x) = CC_1\Phi_1(x) + CC_2\Phi_2(x), \quad (3.31)$$

Onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes e as funções  $\Phi_1(x)$  e  $\Phi_2(x)$  são dadas por

$$\Phi_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Pi_n^{k=1}(-\frac{\epsilon}{r} + 2 - 2k)}{(2n)!} \left(\frac{2r}{(\pi\sigma + b)^2}\right)^n \left(x + \frac{a\theta}{r}\right)^{2n},$$

$$\Phi_2(x) = \frac{a\theta}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Pi_n^{k=1}(-\frac{\epsilon}{r} + 1 - 2k)}{(2n + 1)!} \left(x + \frac{a\theta}{r}\right)^{2n+1}.$$

Podemos assumir que

$$\Phi(x) = \begin{cases} C\left(\frac{x}{U}\right)^q, & 0 \leq x \leq x_1^*, \\ CC_1\Phi_1(x) + CC_2\Phi_2(x), & x_1^* < x \leq U. \end{cases} \quad (3.32)$$

Aplicando as condições de  $x_1^*$  que são,

$$\Phi(x_1^+)=\Phi(x_1^-), \text{ e } \Phi_x(x_1^+)=\Phi_x(x_1^-),$$

temos que

$$C_1 = \frac{\Phi_2(x_1^*)q\left(\frac{x_1^*}{U}\right)^{q-1}\frac{1}{U} - \Phi_2'(x_1^*)\left(\frac{x_1^*}{U}\right)^q}{\theta_2(x_1^*)\Phi_1'(x_1^*) - \Phi_2'(x_1^*)\Phi_1(x_1^*)} \quad (3.33)$$

$$C_2 = \frac{\Phi_1(x_1^*)q\left(\frac{x_1^*}{U}\right)^{q-1}\frac{1}{U} - \Phi_1'(x_1^*)}{\left(\frac{x_1^*}{U}\right)^q\Phi_1(x_1^*)\Phi_2'(x_1^*) - \Phi_1'(x_1^*)\Phi_2(x_1^*)}.$$

Da condição de fronteira  $\Phi(U) = 1$ , temos que

$$C = \frac{1}{C_1\Phi_1(U) + C_2\Phi_2(U)}. \quad (3.34)$$

Podemos perceber que a função  $\Phi(x)$  é também duas vezes continuamente diferenciável no ponto  $x_1$ , portanto, a partir de (3.2.1) e (3.36), temos a solução da equação de HJB em (3.15) dada por

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} \ln \left[ C \left( \frac{x}{U} \right)^q \right], & 0 < x \leq x_1^* \\ \frac{1}{\epsilon} \ln [CC_1\Phi_1(x) + CC_2\Phi_2(x)], & x_1^* < x \leq U. \end{cases} \quad (3.35)$$

Nesse contexto, vamos verificar que a solução para a equação de HJB é exatamente a função valor. No entanto, não é fácil verificar a monotonicidade estrita de  $V(x)$  directamente. Pelo facto de existir uma ligação entre  $V(x)$  e  $\Phi$ , e podemos obter  $V(x)$  para se obter  $\Phi$  em  $C^2(0, U)$ , a função é decrescente.

**Lema 3.2.1.**  $\Phi(x)$ , dado em (3.36), é uma função estritamente decrescente em  $C^2(0, U)$ .

*Demonstração.* Seja  $\Phi(x)$  definido como:

$$\Phi(x) = e^{\epsilon\Phi(x)}, \quad (3.36)$$

onde  $\epsilon$  é uma constante positiva e  $x \in C^2(0, U)$ . Então,  $\Phi(x)$  é uma função estritamente decrescente em  $C^2(0, U)$ .

### Demonstração

Para provar que  $\Phi(x)$  é estritamente decrescente em  $C^2(0, U)$ , precisamos demonstrar que sua derivada é negativa em relação a  $x$ . Para isso, derivamos  $\Phi(x)$  em relação a  $x$ :

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = e^{\epsilon\Phi(x)} \cdot \frac{d(\epsilon\Phi(x))}{dx}. \quad (3.37)$$

Agora, considerando que  $\Phi(x) = e^{\epsilon\Phi(x)}$ , temos:

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = e^{\epsilon\Phi(x)} \cdot \epsilon \cdot \frac{d\Phi(x)}{dx}. \quad (3.38)$$

Isolando  $\frac{d\Phi(x)}{dx}$ , obtemos:

$$(1 - \epsilon \cdot e^{\epsilon\Phi(x)}) \cdot \frac{d\Phi(x)}{dx} = 0. \quad (3.39)$$

Dado que  $\epsilon > 0$  e  $e^{\epsilon\Phi(x)} > 0$ , então  $1 - \epsilon \cdot e^{\epsilon\Phi(x)} < 0$ . Portanto, a única solução para a derivada  $\frac{d\Phi(x)}{dx}$  é zero. Isso implica que  $\Phi(x)$  é uma função constante ou, em outras palavras,  $\Phi(x)$  é estritamente decrescente em  $C^2(0, U)$ .

*Teorema:* Com base no Lema dado, podemos concluir que a função  $\Phi(x) = e^{\epsilon\Phi(x)}$  é decrescente em  $C^2(0, U)$ , resolvendo a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) com as condições de contorno apropriadas. Pelo Teorema de Verificação, obtemos a seguinte afirmação:

Se  $\Phi(x)$  é uma solução da equação de HJB, então  $\Phi(x)$  é estritamente decrescente em  $C^2(0, U)$ .  $\square$

A partir do lema dado, podemos concluir que  $\Phi(x) = e^{\epsilon\Phi(x)}$  é uma função decrescente em  $C^2(0, U)$ , resolvendo a equação de HJB com as condições de fronteira. Pelo Teorema de verificação, obtemos o seguinte teorema:

**Teorema 3.2.3.** *Se  $x_1^*, C_1, C_2$  e  $C$  dado por (3.24), (3.33) e (3.34), respectivamente. Se  $U > x_1^*$  a função valor sera dado por*

$$v(x) = \frac{\ln \Phi(x)}{\epsilon} = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} \ln \left[ C \left( \frac{x}{U} \right)^q \right], & 0 < x < x_1^* \\ \frac{\ln [CC_1\Phi_1(x) + CC_2\Phi_2(x)]}{\epsilon}, & x_1^* \leq x \leq U. \end{cases}$$

A estratégia óptima de resseguro robusto é definida como,

$$\begin{cases} p^*(x) = -\frac{a\theta}{\pi\sigma+b} \times \frac{X}{p-1}, & 0 < X_1^*, \\ 1, & X_1^* \leq X \leq U, \end{cases} \quad (3.40)$$

e a difusão óptima de distorção será

$$\begin{cases} \theta_1^*(x) = \left( -\frac{\epsilon a \theta X}{(\pi\sigma+b)(p-1)} \right) V_x(x), & 0 < x < x_1^*, \\ \epsilon(\pi\sigma + b)V_x(x), & x_1^* \leq x \leq U, \end{cases} \quad (3.41)$$

*Demonstração.* É possível perceber, olhando para a função valor  $V(x)$  em (??) satisfaz todas as condições do Teorema (3.2.1). Além do mais, a estratégia ideal de resseguro é uma derivação óptimo de distorção, é provado por ser uma das estratégias admissíveis e pelo lema anterior.  $\square$

**Lema 3.2.2.** *Presumimos que  $p^*$  e  $\Phi$  são definidos dentro de (3.40) e (3.41), então  $\mathbb{E}_x^{\mathbb{Q}^*}(\tau^{p^*}) < \infty$*

### 3.2.2 Caso de resseguro não barrato

Por suposição, a resseguradora cobra o prêmio de acordo com um resseguro diferente do anterior, não barato, isto é,  $\theta < n_1$  em (3.8). Primeiro mostramos que existe um "Nível Seguro" tal que essa probabilidade de ruína, antes de alcançar o objectivo superior é sempre positivo quando o excedente inicial é abaixo do nível seguro. Assim, de acordo com a secção anterior, não é aplicável tomar uma decisão óptima sob o critério de minimizar o tempo esperado para atingir um objectivo. Em seguida, discutimos a optimização do problema quando o excedente inicial é maior do que o nível seguro. Na óptimalidade, os resultados são derivados explicitamente ao longo das mesmas linhas do caso anterior. Lembrando da definição do valor excedente para que não atinja a ruína através de

$$\begin{aligned} \hat{\tau}^p &= \tau_U^p, & se & \tau_0^p > \tau_U^p & e \\ \hat{\tau}^p &= \infty, & se & \tau_0^p < \tau_U^p \end{aligned}$$

$$\tilde{V}(x) = \inf_{p \in \tilde{\mathcal{A}}} \left\{ \sup_{\sigma_1 \in \theta_1} \left[ \mathbb{Q}_x(\tau_0^p < \tau_U^p) - \frac{1}{\epsilon} h(\mathbb{Q}_{\tilde{\tau}^p} | \mathbb{P}_{\tilde{\tau}^p}) \right] \right\}, \quad (3.42)$$

onde  $\mathbb{Q}_x$  representa a probabilidade da ruína, dado o valor inicial  $X$  e o conjunto de estratégias admissíveis  $\tilde{\mathcal{A}}$  é composto pelas estratégias que satisfazem as condições (i) e (ii) na definição de resseguro e pelo Teorema de verificação. Ao assumir que  $\tilde{V}(x) \in C^2(0, U)$ , a equação correspondente será

$$\inf_{p \in \tilde{\mathcal{A}}} \left[ \sup_{\sigma \in \theta} [rx + \pi(t)(\mu - r) + a(\theta - np(t))\lambda - (1 - p(t))\lambda + \pi\sigma + b(1 - p(t))]\tilde{V}_x + \frac{1}{2}[\pi\sigma + b(1 - p(t))]^2\tilde{V}_{xx} \right] = 0, \quad (3.43)$$

Com as condições de fronteira

$$\tilde{V}(0) = 1,$$

$$\tilde{V}(U) = 0.$$

Para o modelo de risco em (3.8), se o excedente é maior ou igual a

$$X_s = \frac{a(n - \theta)}{r},$$

então a seguradora pode comprar resseguro total através da renda, a partir de  $X$  sem risco no activo e excedente. Por essa razão, chamamos  $X_s$  de nível seguro. Nesse contexto, vamos primeiro presumir que  $U \leq X_s$ .

Pela primeira condição de optimalidade, o maximizador é obtido em  $\theta_1^* = \epsilon bq\tilde{V}_x$ . Assim, a equação pode ser simplificada para

$$\inf_{p \in \tilde{\mathcal{A}}} \left[ \sup_{\sigma \in \theta} [rx + \pi(t)(\mu - r) + a(\theta - np(t))\lambda - (1 - p(t))\lambda]\tilde{V}_x + \frac{1}{2} \cdot [\pi\sigma + b(1 - p(t))]^2\tilde{V}_{xx} \right] = 0. \quad (3.44)$$

Derivando (3.44) em relação a  $p$  resolvendo a equação correspondente, obtemos:

$$\tilde{p}(x) = -\frac{(-an\lambda + \lambda)\tilde{V}_x}{b^2(\tilde{V}_{xx} + \epsilon\tilde{V}_x^2)} + \frac{\pi\delta}{b} + 1. \quad (3.45)$$

Se  $\tilde{p}(x) \in [0, 1]$ , então teremos  $p^*(x) = \tilde{p}(x)$ . Substituindo (3.45) de volta na Eq.(3.44), obtemos o seguinte

$$\left[ rX + \pi(\mu - r + \theta - \delta) + \lambda \left( a\delta - an - \frac{\pi an\delta}{b} \right) \right] \tilde{V}_x + \frac{1}{2} \frac{(-an\lambda + \lambda)\tilde{V}_x^2}{b(\tilde{V}_{xx} + \epsilon\tilde{V}_x^2)} = 0. \quad (3.46)$$

De forma similar, usamos o método da transformação exponencial, definindo  $\tilde{\Phi}(x) = e^{\epsilon \tilde{V}(x)}$ , Daqui obtemos:

$$\left[ rX + \pi(\mu - r + \theta - \delta) + \lambda \left( a\delta - an - \frac{\pi an\delta}{b} \right) \right] \tilde{\Phi}_x + \frac{1}{2} \cdot \frac{(-an\lambda + \lambda)\tilde{\Phi}_x^2}{b\tilde{\Phi}_{xx}} = 0 \quad (3.47)$$

com as seguintes condições de fronteira

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(0) &= e^\epsilon, \\ \tilde{\Phi}(U) &= 1. \end{aligned}$$

Por (3.47) podemos obter que,

$$\frac{\tilde{\Phi}_{xx}}{\tilde{\Phi}_x} = k_2(x) = -\frac{-an\lambda + \lambda}{2b \left[ \pi(\mu - r + \theta - \delta) + \lambda \left( a\delta - an - \frac{\pi an\delta}{b} \right) - rX \right]}. \quad (3.48)$$

Combinando (3.45) e (3.48), obtemos o seguinte

$$\begin{aligned} \tilde{p}(x) &= -\frac{(-an\lambda + \lambda)\tilde{V}_x}{b^2(\tilde{V}_{xx} + \epsilon\tilde{V}_x^2)} + \frac{\pi\delta}{b} + 1 \\ &= -\frac{(-an\lambda + \lambda)\tilde{\Phi}_x}{b^2(\tilde{\Phi}_{xx})} + \frac{\pi\delta}{b} + 1 \\ &= \frac{2 \left[ \pi(\mu - r + \theta - \delta) + \lambda \left( a\delta - an - \frac{\pi an\delta}{b} \right) - rX \right]}{b} + \frac{\pi\delta}{b} + 1, \end{aligned} \quad (3.49)$$

onde será positivo para  $x \in (0, U)$  e  $\tilde{p} < 1$  implica  $x > x_2^*$  com

$$x_2^* = \frac{2 \left[ \pi(\mu - r + \theta - \delta) + \lambda \left( a\delta - an - \frac{\pi an\delta}{b} \right) \right] + \frac{\pi\delta}{b} + 1}{2r\lambda} < x_s.$$

Se  $x \in (x_2^*; +\infty) \cap (0; U)$ , podemos perceber que  $p^*(x) = \tilde{p}(x) \in (0, 1)$ . Nesse caso, podemos chamar a região  $(x_2^*; +\infty) \cap (0, U)$  de região de resseguro. Pelo que segue, podemos considerar o problema (3.42) no caso de  $U \leq x_2^*$  e  $x_2^* < U$  respectivamente.

Caso 1: Se  $U \leq x_2^*$ , o minimizador de  $\tilde{p}(x)$  em (3.44) resultar em 1, que indica que não ha compra de resseguro e a eq. (3.44) pode ser simplificada para

$$\inf_{p \in \tilde{\mathcal{A}}} \left\{ \sup_{\sigma \in \theta} [rx + \pi(t)(\mu - r) + a\theta\lambda - (1 - p(t))\lambda]\tilde{V}_x + \frac{1}{2}[\pi\sigma + b(1 - p(t))]^2\tilde{V}_{xx} \right\} = 0. \quad (3.50)$$

Novamente, pela transformação exponencial, obtemos

$$[rX + \pi(\mu - r + \theta - \delta) + \lambda a\delta]\tilde{\Phi}_x + \frac{1}{2} \frac{(-an\lambda + \lambda)\tilde{\Phi}_x^2}{b\tilde{\Phi}_{xx}} = 0, \quad (3.51)$$

com as seguintes condições de fronteira  $\tilde{\Phi}(0) = e^\epsilon$  e  $\tilde{U} = 1$ . De forma similar, é fácil obter

$$k_1(x) = \frac{\tilde{\Phi}_{xx}}{\tilde{\Phi}_x} = -\frac{(-an\lambda + \lambda)}{2b \left[ \pi(\mu - r + \theta - \delta) + \lambda(rX + a\delta - \frac{\pi}{b}) \right]}. \quad (3.52)$$

Assim, a solução de (3.51) leva a forma

$$\tilde{\theta}(x) = A + B \left( rX + a\delta - \frac{\pi}{b} \right)^{\frac{-rX + \pi(\mu - r + \theta - \delta) + \lambda a\delta}{2br} + 1}.$$

Pelas condições de fronteira dadas, segue que

$$\begin{aligned} A &= e^\epsilon - B(a\delta)^{\frac{-rX + a\delta}{2br} + 1}, \\ B &= \frac{e^\epsilon - 1}{(a\theta)^{\frac{-rX + \pi(\mu - r + \theta - \delta) + \lambda a\delta}{2br} + 1} - (rU + \pi(\mu - r + \theta - \delta) + \lambda a\delta)^{\frac{-rX + \pi(\mu - r + \theta - \delta) + \lambda a\delta}{2br} + 1}}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

De acordo com as análises acima, obtemos o seguinte teorema.

**Teorema 3.2.4.** *Sejam  $x_2^*$ ,  $A$  e  $B$  definidos em (3.49) e (3.2.2). Supondo que  $0 < U \leq x_2^*$ . A probabilidade mínima robusta de ruína  $\tilde{V}$  para o processo excedente (3.8) é dado por*

$$\tilde{V}(x) = \frac{1}{\epsilon} \ln \left[ A + B(rX + a\delta)^{\frac{-rX + \pi(\mu - r + \theta - \delta) + \lambda a\delta}{2br} + 1} \right]$$

A estratégia óptima robusta de resseguro é dada por  $p^*(x) = 1$ ,

$$\sigma^*(x) = \epsilon(b\sigma + \pi)p^*(x)\tilde{V}_x(x) = \epsilon(b\sigma + \pi)\tilde{V}_x.$$

Caso 2: Se  $x_2^* < U$ , podemos ver que o limite de resseguro  $x_2^*$  cai em  $(0, U)$ . Para se obter a fórmula fechada da expressão da probabilidade mínima robusta em  $(0, U)$ , definimos a função  $k(x)$  que segue

$$k(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2b \left[ \pi(\mu - r + \theta - \delta) + \lambda(rX + a\delta - \frac{\pi}{b}) \right]} & 0 \leq x \leq x_2^*, \\ -\frac{(-an\lambda + \lambda)}{2b \left[ \pi(\mu - r + \theta - \delta) + \lambda(rX + a\delta - \frac{\pi}{b}) \right]} & x_2^* \leq x \leq U, \end{cases} \quad (3.54)$$

Que é uma função contínua e decrescente na região  $(0, U)$ . De acordo com  $\frac{\tilde{\Phi}_{xx}}{\tilde{\Phi}_x} = k(x)$ , obtemos a função  $\tilde{\Phi}(x)$  no seguinte formato

$$\tilde{\Phi}(x) = L_1 - L_2 \int_0^x \exp \left[ \int_0^y k(z) dz \right] dy,$$



onde

$$L_1 = e^\epsilon \quad e \quad L_2 = \frac{e^{\epsilon-1}}{\int_0^U \exp \left[ \int_0^y k(z) dz \right] dy}.$$

Podemos facilmente verificar essa função  $\tilde{\theta}(x)$  resolvendo a equação (3.47) quando  $0 < x < x_2^*$  e a equação (3.51) quando  $x_2^* \leq x \leq U$ . Estes resultados resumem-se no seguinte teorema:

**Teorema 3.2.5.** *Sejam  $0 < x_2^* < U \leq x$ . E  $x_2^*$  e  $k(x)$  definidos em (3.49) e (3.54), respectivamente. Então a probabilidade mínima de robustez de ruína  $\tilde{V}$  para o processo excedente (3.8) é dado por*

$$\tilde{V}(x) = \frac{1}{\epsilon} \cdot \ln \left\{ e^{\epsilon-(e^{\epsilon-1})} \frac{\int_0^x \exp \left[ \int_0^y k(z) dz \right] dy}{\int_0^U \exp \left[ \int_0^y k(z) dz \right] dy} \right\},$$

e a estratégia robusta é definida como

$$p^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < x \leq x_2^*, \\ -\frac{(-an\lambda+\lambda)}{2b[\pi(\mu-r+\theta-\delta)+\lambda(rX+a\delta-\frac{\pi}{b})]}, & \text{se } x > x_2^*. \end{cases}$$

e

$$\theta^*(x) = \begin{cases} \epsilon b \tilde{V}_x(x), & \text{se } 0 < x \leq x_2^*, \\ \frac{2\epsilon b \tilde{V}_x(x) [\pi a n \delta b - r X]}{b}, & \text{se } x > x_2^*. \end{cases}$$

Podemos ver dos Teoremas (3.2.4) e (3.2.5) que a desigualdade  $\tilde{V}(x) > 0$  detém dentro do caso de resseguro não barato quando  $U \leq x_s$ . Isso significa que a probabilidade do processo do controle de excedente atingir 0 antes de  $U$  é sempre positiva. Isso implica que  $\mathbb{E}_x^{\mathbf{Q}}(\tau^p) = \infty$ . Portanto, temos uma estratégia não admissível para minimizar o tempo esperado para alcançar uma meta.

Isso é ainda mais fácil de alcançar 0 antes de  $U$  quando  $0 < x < x_s < U$ . Podemos chegar à mesma conclusão para este caso.

### 3.2.3 Caso do controle de investimento

Nesta secção, consideramos o investimento em activos com risco no modelo. A seguradora tem duas componentes no controle — resseguro e investimento. Como na secção anterior, assumimos que a função valor  $V$ , obtem-se resolvendo a equação de HJB,

$$\inf_{p \in \tilde{\mathcal{A}}} \left\{ \sup_{\varsigma \in \tilde{\Theta}} [rx + \pi(t)(\mu - r) + a(\theta - np(t))\lambda - (1 - p(t))\lambda] \tilde{V}_x + \frac{1}{2} [\pi\sigma + b(1 - p(t))]^2 \tilde{V}_{xx} \right\} = 0. \quad (3.55)$$

O controle de investimento óptimo é uma estratégia de benchmark associada à função de valor do investimento

$$q^* = \frac{(\mu_1 - r)(\delta - rx)}{\lambda\sigma^2}, \quad (3.56)$$

e as distorções óptimas de derivação são processos de benchmark associados a funções

$$\theta^*(x) = -\frac{\epsilon\mu V_x(\delta - rx)}{\lambda\theta} \quad (3.57)$$

e

$$n^*(x) = \frac{\epsilon(\mu_1 - r)V_x(\delta - rx)}{\lambda\theta_1}. \quad (3.58)$$

Se  $u \geq 1$  e  $V_{xx}(x) - \epsilon V_x^2 < 0$ , o minimizador de  $u$  em (3.43) será  $p^*(x) = 1$  Substituindo o  $p$  por 1 na equação (3.43), resolvendo, obtemos a seguinte equação

$$[rx + \pi(t)(\mu - r) + a(\varsigma - n)\lambda + \pi\theta]V_x + \frac{1}{2}[\pi\sigma]^2 V_{xx} + \epsilon V_x^2 \frac{(\mu_1 - r)^2 V_x^2(x)}{2\theta_1 [V_{xx} + \epsilon V_x^2]} = 0. \quad (3.59)$$

Aplicando a substituição

$$\theta(x) = e^{\epsilon V(x)},$$

temos que

$$\frac{1}{2}[\pi\sigma]^2 \left[ \frac{\Phi_{xx}(x)}{\Phi_x(x)} \right]^2 + [rx + \pi(t)(\mu - r) + a(\theta_1 - n)\lambda + \pi\theta] \frac{\Phi_{xx}(x)}{\Phi_x(x)} - \frac{(\mu_1 - r)^2}{2\theta_1} = 0. \quad (3.60)$$

De forma similar, podemos assumir a relação

$$\beta(x) = \frac{\Phi_{xx}(x)}{\Phi_x(x)}, \quad (3.61)$$

onde

$$\beta(x) = -\frac{1}{\pi\sigma^2} \left[ (rx + \pi(t)(\mu - r) + a(\theta - n)\lambda + \pi\theta) + \sqrt{(rx + \pi(t)(\mu - r) + a(\varsigma - n)\lambda + \pi\theta)^2 + \frac{(\mu_1 - r)^2[\pi\sigma]^2}{2\theta_1}} \right]. \quad (3.62)$$

que é uma função negativa e decrescente. Então vemos que  $\Phi_{xx}(x) < 0$  e então  $V_{xx} + \epsilon V_x^2 = -\frac{\Phi_{xx}(x)}{\Phi_x(x)} < 0$ . Observamos o mesmo que na secção anterior. o controle de investimento óptimo é uma estratégia de benchmark associada à função de valor do investimento

$$q^* = -\frac{(\mu_1 - r)}{\theta^2 \beta(x)},$$

e as distorções de derivação óptimas são processos de benchmark associados a funções

$$\theta^*(x) = -\epsilon\theta V_x(x), \quad (3.63)$$

e

$$n^*(x) = -\frac{\epsilon(\mu_1 - r)V_x(x)}{\theta_1\beta(x)}. \quad (3.64)$$

Por outro lado, se  $L < \tilde{x} < U$ , das discussões acima, notamos que  $\Phi$  resolve a eq. (3.48) se  $x > \tilde{x}$  e (3.61) se  $x \leq \tilde{x}$ . Seja a função

$$k(x) = \begin{cases} \beta(x) & L \leq x \leq \tilde{x} \\ -\frac{\lambda}{\delta - rx} & \tilde{x} \leq x \leq U, \end{cases} \quad (3.65)$$

que é uma função contínua e decrescente em  $[L, U]$  onde  $\beta$  é dado por (3.62). Então  $\Phi$  resolve

$$\frac{\Phi_{xx}(x)}{\Phi_x(x)} = k(x), \quad (3.66)$$

em  $[L, U]$ .

**Observação 3.2.1.** *Se  $q_1 > r$ , a função de valor do investimento  $p^*(x)$  é positiva, implicando que a seguradora compra o activo de risco (para ganhar  $q_1$ ), enquanto se  $q_1 < r$ , a função é negativa e a seguradora vende o activo de risco a descoberto para ganhar a taxa livre de risco  $r$ . A função óptima de exposição ao risco  $q^*(x)$  e a função óptima de investimento  $|p^*(x)|$  são ambas funções decrescentes de  $x$  no intervalo  $[L, U]$ .*

*Isso mostra que, à medida que o superávit aumenta, a seguradora adopta uma estratégia menos arriscada (ou mais conservadora) comprando mais resseguro (com menor exposição ao risco do seguro) e investindo menos no activo arriscado.*

### 3.3 Análise econômico e Benchmark

Nesta secção, vamos trazer a análise do resultado Óptimo dentro do Benchmark, caso em que a seguradora é neutra em termos de ambiguidade. Também a implicação econômica de vários parâmetros importantes do modelo são mais explorados.

#### 3.3.1 Resultados dentro do Benchmark

Apresentamos primeiro a estratégia óptima de resseguro e a função de valor associada dentro do Benchmark. Se  $\epsilon \rightarrow 0^+$  em  $x_1^*$ , podemos obter o limite do resseguro no ponto do benchmark, dado por

$$x_0^* = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} x_1^* = \frac{b^2}{a\phi_1}. \quad (3.67)$$

Nesse caso, aplicamos a mesma técnica, o resultado óptimo em benchmark para  $x_0^* > U$ , pode ser derivada directamente. Pode ser dado o resultado óptimo na proposição que segue.

**Proposição 3.3.1.** *No caso de resseguro barato, se  $U < x_0^*$ , para qualquer  $x \in (0, U)$ , a função valor  $V_0(x)$  no caso em benchmark será*

$$V_0(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} V(x) = \frac{2b^2}{a^2\phi_1^2 + 2b^2r} \ln\left(\frac{U}{x}\right),$$

e a estratégia óptima de resseguro é dado por  $p_0^*(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} p^*(x) = \frac{a\phi_1}{b^2}x$ . O controle de investimento óptimo é uma estratégia de benchmark associada à função valor do investimento

$$q^*(x) = q_v(x) = \frac{(u-r)(p-rx)}{\lambda\phi_1}$$

**Proposição 3.3.2.** *No caso de resseguro barato, se  $x_0^* < U$ , função que define o tempo mínimo esperado tempo para alcançar uma meta em benchmark será dado por*

$$V_0(x) = \frac{2b^2}{a^2\phi_1^2 + 2b^2r} \ln\left(\frac{x_0^*}{x}\right) - \int_{x_0^*}^U h(v)dv, \quad 0 < x < x_0^*,$$

$$- \int_{x^*}^U h(v)dv, \quad x_0^* \leq x \leq U,$$

e a estratégia óptima de resseguro será dado por

$$p_0^*(x) = \begin{cases} \frac{a\phi_1}{b^2}x, & 0 < X < x_0^* \\ 1, & X_0^* \leq x \leq U, \end{cases}$$

onde

$$h(x) = \exp\left\{-\frac{r}{b^2x^2 - \frac{2a\phi_1}{b^2}}x\right\} \left( -\frac{2a\theta}{a^2n_1^2 + 2b^2r} \exp\left\{\frac{b^2}{a^2\phi_1^2}r + 2\right\} - \int_{x_0^*}^x \frac{2}{b^2} \exp\left\{\frac{r}{b^2}u^2 + \frac{2a\phi_1}{b^2}udu\right\} \right).$$

Definindo

$$\frac{V_{xx}(x)}{V_x(x)} = \beta(x)$$

então teremos que, o controle de investimento óptimo é uma estratégia de benchmark associada à função de valor do investimento

$$q^*(x) = q_v(x) = \frac{(u-r)}{\phi_1^2\beta(x)}.$$

Derivamos também os resultados óptimos em benchmark para o caso de resseguro não barrato e a demonstração é a mesma da ideia apresentada na proposição anterior. Por conveniência, definimos

$$x_4^* = \frac{b^2}{a\phi_1} + \frac{a(n_1 - \phi_1)}{r} = x_0^* + x_s.$$

**Proposição 3.3.3.** No caso de resseguro não barato, se  $U \leq x_4^*$ , então para algum  $x \in (x_s, U)$ , a função valor  $V_0(x)$  em benchmark será

$$V_0(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} V(x) = \frac{2b^2}{a^2 n_1^2 + 2b^2 r} \ln \left( \frac{rU - a(n_1 - \phi_1)}{rx - a(n_1 - \phi_1)} \right),$$

e a estratégia óptima será dado por

$$p_0^*(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} p^*(x) = -\frac{an_1}{b^2} \frac{rx - a(n_1 - \phi_1)}{r}.$$

O controle de investimento óptimo é uma estratégia de benchmark associada à função valor do investimento

$$q^*(x) = q_v(x) = \begin{cases} -\frac{(u-r)}{\phi_1^2 \beta(x)}, & x_s \leq x \leq x_4^* \\ \frac{(u-r)(p-rx)}{\lambda \phi_1^2}, & x_s < x \leq U, \end{cases}$$

Se  $x_4^* < U$  e  $x_s < x < U$ , então a função que define o tempo mínimo esperado para alcançar uma meta tem o seguinte formato

$$V_0(x) = \begin{cases} \frac{2b^2}{a^2 n_1^2 + 2b^2 r} \ln \left( \frac{x_4^*}{x} \right) - \int_{x_4^*}^U \bar{h}(v) dv, & x_s < x < x_4^* \\ - \int_x^U \bar{h}(v) dv, & x_4^* \leq x \leq U, \end{cases}$$

onde  $\bar{h}(x)$  pode ser obtido, por substituir  $n_1$  por  $\phi_1$  em (3.3.2). A estratégia óptima de resseguro é

$$p_0^*(x) = \begin{cases} -\frac{an_1}{b^2} \frac{rx - a(n_1 - \phi_1)}{r}, & x_s < x < x_4^* \\ 1, & x_4^* \leq x \leq U. \end{cases}$$

### 3.4 Simulação numérica

Em seguida, simulamos a minimização da probabilidade de atingir uma meta sob aversão à ambiguidade, tanto com controle de resseguro quanto com controle de investimento. Os parâmetros são definidos da seguinte forma:  $\mu = 0,06$ ,  $p = 0,2$ ,  $r = 0,02$ ,  $q = 0,07$ ,  $\phi = 0,1$ ,  $\Phi = 0,3$ ,  $U = 1,5$ ,  $L = 0,4$ .

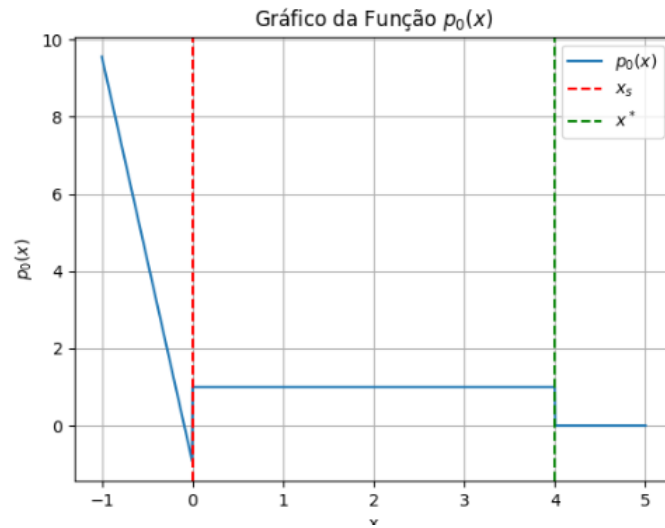


Figura 3.1: Simulação

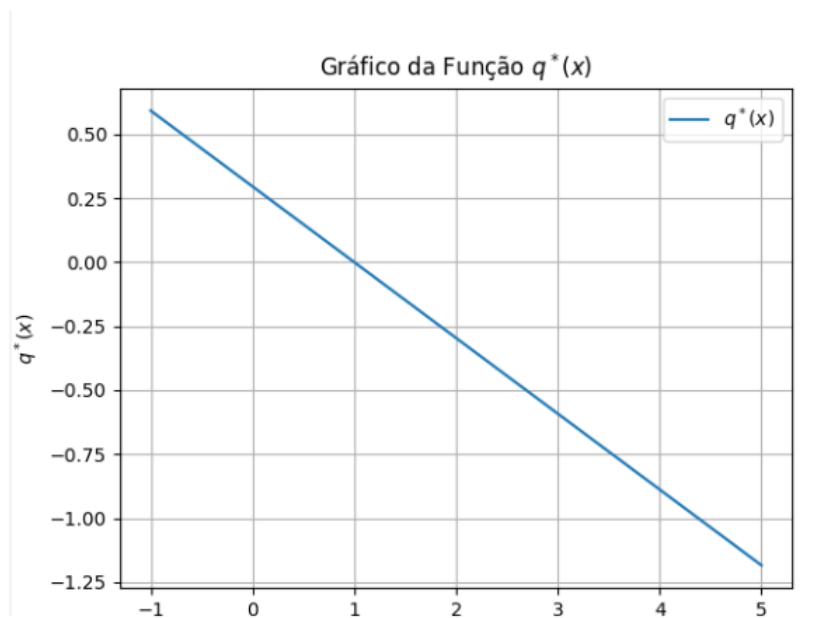


Figura 3.2: Simulação

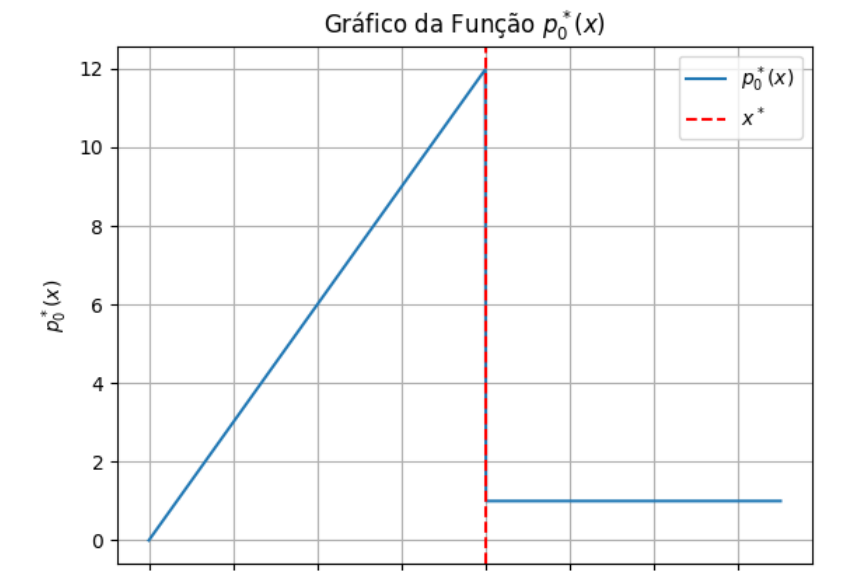


Figura 3.3: Simulação

**Análise dos Gráficos das Três Simulações: Gráfico da Avaliação da Seguradora em Função de  $p$**  (Simulação 1): Este gráfico ilustra como a avaliação da seguradora é afectada pela intensidade da penalização da ambiguidade, representada pelo parâmetro  $p$ . Observa-se que, à medida que  $p$  aumenta de 1 para 2, a avaliação da seguradora, que se torna mais avessa à ambiguidade, diminui. Essa diminuição é significativa e pode ser superior a 10% em determinados níveis de superávit.

**Gráfico do Valor Robusto em Função de  $p$**  (Simulação 2): Neste gráfico, é mostrado como o valor robusto varia conforme o parâmetro de penalização  $p$ . Observa-se que um aumento em  $p$  resulta em uma queda significativa no valor robusto, especialmente quando  $p$  passa de 1 para 2. Essa queda indica que a seguradora, ao se tornar mais avessa à ambiguidade, adopta uma medida de probabilidade mais conservadora, o que resulta em uma menor probabilidade de atingir o objectivo desejado.

**Gráfico dos Drifts Óptimos em Função de  $p$**  (Simulação 3): Este gráfico mostra como os drifts óptimos para o investimento e o processo de resseguro são influenciados pela variação do parâmetro  $p$ . Observa-se que, à medida que  $p$  aumenta de 1 para 2, os drifts óptimos permanecem negativos e se tornam mais negativamente valorizados. Isso indica que a seguradora atribui menor peso ao desvio da medida ambígua da medida de probabilidade de referência, refletindo um maior nível de aversão à ambiguidade.

**Em suma podemos observar que:** Usamos esta simulação para ilustrar como a intensidade da penalização na ambiguidade, medida pelo parâmetro de penalização  $p$ , afecta a escolha da medida de probabilidade da seguradora e a avaliação do valor robusto. Conforme mostrado nos dois painéis superiores, quando  $p$  aumenta de 1 para 2, a seguradora que se torna mais avessa à ambiguidade tem uma avaliação mais baixa. Este resultado é mostrado na Observação feita no Teorema anterior. Vemos nesta simulação que a mudança de penalização (de  $p = 1$  para 2) pode resultar em uma queda

significativa no valor robusto (mais de 10% em certos níveis de superávit). Além disso, a comparação entre a simulação 3 da Figura e a simulação 2 da Figura mostra que à medida que  $p$  aumenta de 1 para 2, os drifts ótimos para investimento e processo de resseguro permanecem negativos e tornam-se mais negativamente valorizados. Observe que o aumento de  $p$  indica que a seguradora atribui menor peso ao desvio da medida ambígua da medida de probabilidade de referência, refletindo o nível mais alto de aversão à ambiguidade da seguradora. O resultado numérico demonstra que a seguradora com maior aversão à ambiguidade (maior  $p$ ) adota uma medida de probabilidade mais conservadora (ou uma medida mais pessimista com distorções mais negativas), resultando em uma menor probabilidade de atingir o objetivo que pode compensar a maior entropia de desvio para atingir um valor robusto mais baixo.



# Capítulo 4

## Conclusão e Recomendações

Neste trabalho, estudamos um problema de resseguro óptimo robusto para um seguradora cujo processo excedente é aproximado por um modelo de difusão. A seguradora pode adquirir resseguro proporcional e investir em um activo livre de risco para transferir o risco e aumentar lucro, mas pode não ter plena confiança nas estimativas dos parâmetros. Aplicando a teoria de controle estocástico e o método da equação HJB, o problema de controle óptimo robusto é resolvido. Derivamos explicitamente a estratégia óptima de investimento-resseguro, as distorções óptimas de derivação e a função valor robusto. Observe que a incerteza vem do termo de derivação do risco seguro, nos propor uma análise sistemática e completa do problema de controle óptimo. Pela análise, encontramos algumas conclusões importantes, a aversão à ambiguidade afecta a estratégia óptima de resseguro e a função valor; É mostrado que à medida que a penalização sobre a ambiguidade aumenta, a probabilidade robusta de atingir o objetivo diminui e a seguradora escolhe uma medida com termos de desvio mais distorcidos negativamente (mais pessimistas) para atingir o valor robusto. Para as próximas pesquisas, pode se adoptar outras formas de ambiguidade em que as seguradoras podem estar associadas e a penalização a ser estudada em cenários completamente diferentes, caso de maximização da utilidade, optimização de dividendos, resseguro usando a teoria de Heston e outros. Esses recursos de modelagem podem levar a uma caracterização mais complexa dos valores robustos correspondentes e podem resultar em resultados mais significativos, efeitos da ambiguidade do modelo no controle e na tomada de decisão por parte das seguradoras.

# Bibliografia

- [1] Adams, M., & Buckle, M. (2003). *The determinants of corporate financial performance in the Bermuda insurance market*. Applied Financial Economics, 13(2), 133-143. doi:10.1080/09603100210161942.
- [2] Adkins, W. A., & Davidson, M. G. (2012). *Ordinary differential equations*. Springer Science & Business Media.
- [3] Bayraktar, E., & Zhang, Y. (2015). Minimizing the probability of lifetime ruin under ambiguity aversion. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 53(1), 58–90.
- [4] Bjork, T. (2019). *Arbitrage Theory in Continuous Time* (3rd ed.). Oxford University Press.
- [5] Fernandez, R. D. (1975). *Introdução aos Processos Estocásticos*. IMPA. Rio de Janeiro, Brazil.
- [6] Garcia, F. C. (2016). *O papel das seguradoras no desenvolvimento econômico*. Revista Brasileira de Risco e Seguro, 12(1), 45-58
- [7] Li, D., Rong, X., & Zhao, H. (2016). Optimal reinsurance and investment problem for an insurer and a reinsurer with jump-diffusion risk process under the Heston model. *Computational & Applied Mathematics*, 35(2), 533–557.
- [8] Li, D., Rong, X., & Zhao, H. (2015). Stochastic differential game formulation on the reinsurance and investment problem. Tianjin, China.
- [9] Lima, B. N., Cioletti, L. M., Cunha, M. T., & Braga, G. A. (2004). Entropia: introdução à teoria matemática da (des)informação. II Bienal da SBM (SBM, Salvador, 2004). Disponível em [www.bienasbm.ufba.br](http://www.bienasbm.ufba.br).
- [10] Luo, S., Wang, M., & Zhu, W. (2019). Maximizing a robust goal-reaching probability with penalization on ambiguity. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 348, 261–281.
- [11] Marques de Sá, J. P. (2003). *Introdução à teoria da medida*. Portugal.
- [12] Milanes, A. (2004). *Uma introdução ao cálculo estocástico e às equações diferenciais estocásticas*. Minas Gerais.

- [13] Misturini, R. (2010). *Movimento Browniano, integral de Itô e introdução às equações diferenciais estocásticas*. Rio Grande do Sul.
- [14] Nepomnyashchikh, Y. (2016). *Teoria de medida e de integral de Lebesgue*. Maputo.
- [15] Oliveira, A. (2004). *Uma introdução ao cálculo estocástico e às equações diferenciais estocásticas*. Rio de Janeiro, Brazil.
- [16] De Oliveira, P. M. (1994). Uma Versão discreta do Teorema de Girsanov. *II Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística*, Luso, pp. 211-217.
- [17] Ruffino, P. R. C. (2012). *Uma iniciação aos sistemas dinâmicos estocásticos*. Rio de Janeiro.
- [18] Steele, J. M. (2001). *Stochastic calculus and financial applications* (Vol. 1). New York: Springer.
- [19] Yuan, Y., Liang, Z., & Han, X. (2023). Robust optimal reinsurance in minimizing the penalized expected time to reach a goal. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 420(114816), 114816.