

UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE

MT-3

P/SCANNER

FACULDADE DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA

TRABALHO DE LICENCIATURA

ENTRE ABORDAGENS AS SÉRIES DE FOURIER E SUAS APLICAÇÕES

ESTUDANTE: Castro José Lidala Cardoso

ORIENTADOR: Castro José Lidala Cardoso

MAPUTO, JUNHO DE 2001

MT-3

UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE
FACULDADE DE CIÊNCIAS
Departamento de Matemática e Informática

Trabalho de Licenciatura

**BREVE ABORDAGEM ÀS SÉRIES DE FOURIER E
SUAS APLICAÇÕES**

Autor: Castro José Lidaia Cardoso

Supervisor: Prof. Doutor Manuel Joaquim Alves, Ph.D.

Maputo, 2001

DECLARAÇÃO SOB PALAVRA DE HONRA

Este trabalho foi efectuado sómente com base nos recursos que ao longo do mesmo se faz referência.

Castro José Lidaia Cardoso
Castro José Lidaia Cardoso

Conteúdo

Agradecimentos	5
Dedicatória	6
Resumo	7
Simbologia	8
1 Séries de Fourier	9
1.1 Espaço euclidiano	9
1.2 O espaço $L^2_{[a,b]}$	11
1.3 Série de Fourier segundo um sistema ortonormado	12
1.4 Série de Fourier segundo um sistema trigonométrico	14
1.5 Somas de Cesàro	22
1.6 Sistemas ortogonais para o caso de duas variáveis	26
1.7 Sistema trigonométrico fundamental. Série dupla de Fourier	27
2 Funções de Bessel	29
2.1 Γ -função	29
2.2 Equação de Euler-Bessel	30
2.3 Funções de Bessel de primeira espécie com índice positivo	30
2.4 Funções de Bessel de primeira espécie com índice negativo	32
2.5 Núcleo de Vallée Poussin	33
2.6 Soma de Vallée Poussin	34
2.7 Avaliação do integral $\int_{-\pi}^{\pi} V_{n,k}(x) dx$	35
3 Método de funções próprias e suas aplicações	40
3.1 A essência do método	40
3.2 O problema de Sturm-Liouville	44
3.3 Séries de Fourier segundo suas funções próprias	48
3.4 Oscilações livres numa corda	50
3.5 Oscilações radiais numa membrana circular	52
3.6 Oscilação numa membrana rectangular	55
3.7 Transmissão de calor num condutor	59

Conclusão	62
Bibliografia	63
Índice remissivo	65
Anexo	67

AGRADECIMENTOS

O meu obrigado à minha família, que tanto me apoiou e me incentivou nos momentos mais árduos!

Aos meus colegas, que directa ou indirectamente sempre estiveram comigo e me ajudaram, muito obrigado!

Ao Prof. Doutor Manuel Joaquim Alves, meu professor e supervisor, vai a minha especial gratidão pelo apoio e incentivo prestados na concepção e prosecução deste trabalho.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha família e, em especial, ao meu filho.

Resumo

Com este trabalho pretende-se fazer uma abordagem, de forma simples, à teoria das séries de Fourier e sua aplicação na resolução de vários problemas da física-matemática. No primeiro capítulo faz-se uma digressão às séries de Fourier. Formulam-se e demonstram-se alguns teoremas, tais como, o teorema sobre a desigualdade de Cauchy-Bunikowskiï, teorema de Dini sobre convergência pontual das somas parciais das séries de Fourier e o teorema sobre a convergência uniforme duma série de Fourier. Introduce-se a noção de sistema ortogonal e sistema linearmente independente. Devido a sua relevância faz-se uma rápida revisão sobre o espaço euclidiano L^2 . Faz-se um estudo exaustivo sobre as somas de Cesàro e o núcleo de Fejér. Demonstra-se que se $f(x)$ é uma função 2π -periódica e contínua, então a soma de Cesàro, gerada por $f(x)$, converge uniformemente para $f(x)$. Estudam-se alguns sistemas ortogonais para o caso de duas variáveis e a decomposição de funções em séries duplas de Fourier. No segundo capítulo faz-se uma breve abordagem às funções de Euler de primeira espécie, investiga-se o núcleo e soma de Vallée Poussin. Faz-se um estudo do integral do núcleo de Vallée Poussin e obtem-se uma avaliação do tipo $\frac{4}{\pi^2} \ln \left(1 + \frac{n}{k}\right) + 1.7$. Finalmente, no último, capítulo estuda-se o método de funções próprias. Demonstra-se que o operador de Sturm-Liouville é simétrico e positivo.

Ao tratar-se, nas aplicações do método de funções próprias, só de problemas de oscilação e transmissão de calor, partiu-se do pressuposto de que a aplicação da teoria deve incidir, nos primeiros momentos, em fenómenos de simples compreensão.

Usando o pacote Maple[©] constroem-se séries de Fourier geradas por certas funções e fazem-se as ilustrações gráficas onde se comparam as funções exactas e suas aproximações.

Maputo, Julho 2001

Simbologia

\mathbb{R}^n é o espaço de vectores n -dimensionais, com a norma $|\cdot|$

\mathbb{N} é o conjunto de números naturais

$\|\cdot\|_X$ denota a norma no espaço X ; se estiver claro sobre o espaço X a que se refere, então escreve-se simplesmente $\|\cdot\|$

$\|\mathcal{A}\|_{X \rightarrow Y}$ denota a norma do operador linear limitado $\mathcal{A} : X \mapsto Y$

$R(\mathcal{A})$ é o contradomínio do operador \mathcal{A}

$D(\mathcal{A})$ é o domínio do operador \mathcal{A}

\equiv significa “identicamente igual”

$\stackrel{\text{def}}{=}$ significa “igual por definição”

$C_{[a,b]} \equiv C$ é o espaço de funções contínuas $x : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^1$, cuja norma é

$$\|x\|_C \stackrel{\text{def}}{=} \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$$

$L^1_{[a,b]} \equiv L^1$ é o espaço de classes equivalentes de funções $x : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^1$ somáveis, cuja norma é

$$\|x\|_{L^1} \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b |x(t)| dt$$

$f(t)$ é negativa (positiva) em $[a, b]$ se $f(t) < 0$ ($f(t) > 0$); $f(t)$ é não negativa (não positiva) em $[a, b]$ se $f(t) \geq 0$ ($f(t) \leq 0$)

■ denota o fim da demonstração

Capítulo 1

Séries de Fourier

1.1 Espaço euclidiano

Seja X um espaço real linear. Chama-se **produto escalar** [7] de dois elementos $x, y \in X$ à função real (x, y) que satisfaz as seguintes condições:

- 1) $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0 \iff x \equiv 0$, $\forall x \in X$;
- 2) $(x, y) = (y, x)$, $\forall x, y \in X$;
- 3) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$, $\forall x, y, z \in X$;
- 4) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$, $\forall x, y \in X$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^1$.

O espaço linear X , onde está definido o produto escalar, chama-se **espaço euclidiano** [8], [9]. A norma em X define-se do seguinte modo:

$$\|x\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(x, x)}, \quad x \in X.$$

Teorema 1. (*Desigualdade de Cauchy¹-Bunikovski²*)

Seja X um espaço euclidiano. Então, é justa a desigualdade

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|, \quad \forall x, y \in X. \quad (1.1)$$

¹Augustin Louis Cauchy (1789-1857) — matemático francês

²Viktor Iakovlevitsh Bunikovskiĭ (1804-1889) — matemático russo

Demonstração. Defina-se a função auxiliar $\phi(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} (x + \lambda y, x + \lambda y)$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$ que, segundo a propriedade 1) do produto escalar, é não negativa. Reescrevendo $\phi(\lambda)$ tem-se

$$\phi(\lambda) = \|y\|^2 \lambda^2 + 2(x, y)\lambda + \|x\|^2 \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}^1.$$

Introduzindo as notações $A \stackrel{\text{def}}{=} \|y\|^2$, $B \stackrel{\text{def}}{=} 2(x, y)$, $C \stackrel{\text{def}}{=} \|x\|^2$, então a função $\phi(\lambda)$ tem a forma $\phi(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} A\lambda^2 + B\lambda + C \geq 0$. Sendo $A > 0$, este trinómio quadrático é não negativo se o seu discriminante é não positivo, isto é,

$$B^2 - 4AC \leq 0 \iff |B| \leq 2\sqrt{A}\sqrt{C}.$$

Em conclusão colocam-se as expressões para B , A e C nesta última desigualdade e obtém-se (1.1). ■

Sejam $x, y \in X$. Diz-se que x e y são **ortogonais** [4], [7], [13] se o seu produto escalar é igual à zero, isto é, $(x, y) = 0$. Seja $\{\psi_k\}_{k=1}^n$ um sistema de elementos de X . Diz-se que este sistema é **linearmente independente** se a sua combinação linear é igual à zero só, e sómente só, quando todos os coeficientes são simultâneamente iguais à zero, isto é,

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \psi_k = 0 \implies \alpha_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1.2)$$

Suponha-se que o sistema $\{\psi_k\}_{k=1}^n$ é ortogonal, isto é, $(\psi_k, \psi_j) = 0$, $k \neq j$. Então ele é linearmente independente. Na verdade, pegando em (1.2) e multiplicando por ψ_i tem-se

$$\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \psi_k, \psi_i \right) = \sum_{k=1}^n (\alpha_k \psi_k, \psi_i) = \alpha_i (\psi_i, \psi_i) = 0. \quad (1.3)$$

Dividindo (1.3) por (ψ_i, ψ_i) , que é diferente de zero (caso contrário ter-se-ia $\psi_i \equiv 0$ o que iria contradizer a suposição de que o sistema é linearmente independente), obtém-se $\alpha_i \equiv 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Diz-se que a sucessão $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, $x_n \in X$ **converge** para o elemento $x \in X$ **em média** [6], [8], [9] se $\|x_n - x\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Diz-se que a sucessão $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, $x_n \in X$ **converge** para o elemento $x \in X$ **fracamente** se $(x_n, y) \rightarrow (x, y)$, $\forall y \in X$, $n \rightarrow \infty$.

Seja $s_n(x)$ uma sucessão funcional, $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^1$. Diz-se que a sucessão $s_n(x)$ **converge uniformemente** [6], [8] em $[a, b]$ para a função $s(x)$, se para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um natural N tal, que para todo $n \geq N$ e para todo $x \in [a, b]$ cumpre-se a desigualdade

$$|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon.$$

1.2 O espaço $L^2_{[a,b]}$

Seja X um espaço linear composto por classes de funções equivalentes $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^1$ somáveis em quadrado, isto é,

$$\int_a^b f^2(x) dx < \infty.$$

Define-se no espaço X o produto escalar do modo seguinte:

$$(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(x)g(x) dx, \quad f, g \in X.$$

A norma em X é dada pela fórmula

$$\|f\| \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

Tal espaço X denota-se $L^2_{[a,b]}$.

Reescrevendo a desigualdade de Cauchy-Bunikovskiï (1.1), vista no parágrafo anterior, tem-se

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)^{1/2}. \quad (1.4)$$

Para o caso particular, quando $g \equiv 1$, a desigualdade (1.4) tem a forma

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \sqrt{b-a} \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

1.3 Série de Fourier segundo um sistema ortonormado

Seja $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ um sistema ortogonal do espaço euclidiano X , isto é,

$$(\psi_k, \psi_i) = 0, \quad k \neq i.$$

Pode-se normar este sistema, isto é, transformá-lo num sistema cuja a norma de cada elemento seja igual à unidade, bastando para tal multiplicar ψ_k , $k = 1, 2, \dots$ pelo factor $\frac{1}{\|\psi_k\|}$. O sistema obtido deste modo $\{\Psi_k\}_{k=1}^{\infty}$, onde $\Psi_k = \frac{\psi_k}{\|\psi_k\|}$, torna-se **ortonormado**, isto é,

$$(\Psi_i, \Psi_j) = \delta_i^j \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Chama-se **série de Fourier**³ [3], [4], [7], [12] gerada pela função $f \in X$, segundo o sistema ortonormado $\{\Psi_k\}_{k=1}^{\infty}$, à expressão

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \Psi_k, \quad (1.5)$$

onde f_k é o coeficiente de Fourier definido pela fórmula

$$f_k \stackrel{\text{def}}{=} (f, \Psi_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

A expressão

$$S_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n f_k \Psi_k$$

chama-se **n -ésima soma parcial** da série de Fourier (1.5).

Veja-se uma combinação linear qualquer dos primeiros n elementos do sistema ortonormado $\{\Psi_k\}_{k=1}^{\infty}$, isto é,

$$\sum_{k=1}^n c_k \Psi_k.$$

A expressão

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k \Psi_k - f \right\| \quad (1.6)$$

³Jean Baptist Joseph Fourier (1768-1830) — matemático francês

atinge o seu mínimo quando $c_k = f_k \stackrel{\text{def}}{=} (f, \Psi_k)$. Com efeito:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^n c_k \Psi_k - f \right\|^2 &= \left(\sum_{k=1}^n c_k \Psi_k - f, \sum_{i=1}^n c_i \Psi_i - f \right) = \\ &= \left(\sum_{k=1}^n c_k \Psi_k, \sum_{i=1}^n c_i \Psi_i \right) - \left(\sum_{k=1}^n c_k \Psi_k, f \right) - \left(f, \sum_{i=1}^n c_i \Psi_i \right) + (f, f) = \\ &= \sum_{k=1}^n c_k^2 - 2 \sum_{k=1}^n c_k (f, \Psi_k) + \|f\|^2 = \sum_{k=1}^n c_k^2 - 2 \sum_{k=1}^n c_k f_k + \|f\|^2 = \\ &= \sum_{k=1}^n (c_k^2 - 2c_k f_k) + \|f\|^2 = \sum_{k=1}^n (c_k - f_k)^2 - \sum_{k=1}^n f_k^2 + \|f\|^2. \end{aligned}$$

Portanto, a expressão (1.6) atinge o seu mínimo quando $c_k = f_k$. Como consequência, para qualquer elemento $f \in X$ e para qualquer sistema ortonormado $\{\Psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ de X , cumpre-se a desigualdade

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^n f_k^2 \leq \left\| \sum_{k=1}^n c_k \Psi_k - f \right\|^2. \quad (1.7)$$

A desigualdade (1.7) transita para igualdade quando $c_k = f_k$. Assim,

$$0 \leq \left\| \sum_{k=1}^n f_k \Psi_k - f \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n f_k^2 \implies \sum_{k=1}^n f_k^2 \leq \|f\|^2. \quad (1.8)$$

A desigualdade (1.8) chama-se **desigualdade de Bessel**⁴ [11], [13]. Diz-se que o sistema ortonormado $\{\Psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ é **completo** em X se para qualquer $f \in X$ tem lugar a **igualdade de Parseval**⁵:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2.$$

Teorema 2. *Seja $\{\Psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ um sistema completo do espaço euclidiano X .*

Então, $\forall f, F \in X$ é justa a igualdade

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k F_k = (f, F),$$

⁴Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846) — matemático alemão

⁵M. Parseval (1836) — matemático francês

onde $f_k \stackrel{\text{def}}{=} (f, \Psi_k)$ e $F_k \stackrel{\text{def}}{=} (F, \Psi_k)$.

Demonstração. Tem-se que X é um espaço linear, então as funções $f \pm F$ pertencem também à X e, como o sistema é completo, tem lugar a igualdade de Parseval para estas duas funções, isto é,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f_k + F_k)^2 = \|f + F\|^2, \quad (1.9)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f_k - F_k)^2 = \|f - F\|^2. \quad (1.10)$$

Subtraindo (1.10) de (1.9) obtém-se

$$\sum_{k=1}^{\infty} [(f_k + F_k)^2 - (f_k - F_k)^2] = \|f + F\|^2 - \|f - F\|^2 \iff \sum_{k=1}^{\infty} f_k F_k = (f, F). \quad \blacksquare$$

Se o sistema $\{\Psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ for ortonormado (ou pelo menos ortogonal) e completo, então não existe nenhuma função de X , diferente de zero, tal que $(f, \Psi_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Realmente, se $\{\Psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ é completo, então cumpre-se a igualdade de Parseval. Supondo que $(f, \Psi_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$ resulta que os coeficientes de Fourier são todos iguais à zero, daí que

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2 \implies f \equiv 0.$$

1.4 Série de Fourier segundo um sistema trigonométrico

Seja $f : E \mapsto \mathbb{R}^1$, $E \subset \mathbb{R}^1$. Diz-se que a função $f(x)$ é T -periódica [1], [10] se existe um número real T tal, que: $x + T \in E$, $f(x + T) = f(x)$.

Lema 1. *Seja $f(x)$ uma função T -periódica, a é um número real qualquer. Então é justa a igualdade:*

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx. \quad (1.11)$$

Demonstração. Aplicando a propriedade de aditividade do integral temos:

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx.$$

Para demonstrar a igualdade (1.11) basta mostrar que

$$\int_T^{a+T} f(x) dx = - \int_a^0 f(x) dx.$$

Na verdade, pela substituição $x = \zeta + T$ temos:

$$\int_T^{a+T} f(x) dx = \int_0^a f(\zeta + T) d\zeta = \int_0^a f(\zeta) d\zeta = - \int_a^0 f(\zeta) d\zeta. \quad \blacksquare$$

O sistema

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots \quad x \in [-\pi, \pi], \quad (1.12)$$

é ortogonal no espaço $L^2_{[-\pi, \pi]}$. Multiplicando o primeiro elemento de (1.12) por $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ e os restantes elementos por $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ resulta que o sistema assim obtido

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

é ortonormado.

Pega-se um elemento $f \in L^2_{[-\pi, \pi]}$ e decompõe-se segundo o sistema (1.12):

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \cos kx + s_k \sin kx), \quad x \in [-\pi, \pi]. \quad (1.13)$$

Suponha-se que a série (1.13) converge uniformemente em $[-\pi, \pi]$. Integrando (1.13) no segmento $[-\pi, \pi]$ tem-se

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} c_0 dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + s_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx \right) = c_0 2\pi.$$

Daqui conclui-se que

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \quad (1.14)$$

Multiplicando (1.13) por $\cos mx$ e integrando no segmento $[-\pi, \pi]$ obtém-se

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} c_0 \cos mx dx + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} s_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos mx \, dx = c_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \, dx = \pi c_m.$$

É óbvio que

$$c_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx. \quad (1.15)$$

Para se determinar o coeficiente s_m basta multiplicar (1.13) por $\sin mx$ e integrar no segmento $[-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} c_0 \sin mx \, dx + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin mx \, dx + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} s_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mx \, dx = s_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx \, dx = \pi s_m. \end{aligned}$$

Deste modo tem-se

$$s_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx. \quad (1.16)$$

Se $f(x)$ fôr uma função par então a sua decomposição, segundo o sistema (1.12), terá a forma

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos kx, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

pois $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \equiv 0$, porque o integral duma função ímpar num intervalo simétrico é igual à zero [2]. De modo análogo, se $f(x)$ fôr ímpar tem-se

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k \sin kx, \quad x \in [-\pi, \pi],$$

pois $c_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \equiv 0$.

Seja

$$S_n(x) = c_0 + \sum_{k=1}^n (c_k \cos kx + s_k \sin kx), \quad x \in [-\pi, \pi]$$

a n -ésima soma parcial da série (1.13), onde $f(x)$ é uma função cujo período é igual à 2π . Substituindo c_0, c_k, s_k pelas suas representações (1.14), (1.15) e (1.16) tem-se

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \cos kx dt + \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \sin kx dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-x) dt, \quad x \in [-\pi, \pi]. \end{aligned} \quad (1.17)$$

A expressão

$$D_n(x) \equiv \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

é o núcleo de Dirichlet⁶ [3], [4], [7]. O núcleo de Dirichlet usufrui as seguintes propriedades:

1) $D_n(t)$ é par, contínua e 2π -periódica.

Realmente, como o núcleo de Dirichlet é a soma de funções pares, contínuas e 2π -periódicas, então a propriedade cumpre-se;

2) $D_n(0) = \frac{1}{2} + n$;

3) $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 1$.

Esta propriedade advém do facto, que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right) dt = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dt + \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} \cos kt dt \right) = 1;$$

4) $D_n(t) = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{2 \sin \frac{t}{2}}$.

⁶Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) — matemático alemão

Multiplicando $D_n(t)$ por $2 \sin \frac{t}{2}$ ($\sin \frac{t}{2} \neq 0$):

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{t}{2} D_n(t) &= \sin \frac{t}{2} + 2 \cos t \sin \frac{t}{2} + \cdots + 2 \cos nt \sin \frac{t}{2} = \\ &= \sin \frac{t}{2} + \sin \frac{3t}{2} - \sin \frac{t}{2} + \cdots + \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) t - \sin \left(n - \frac{1}{2}\right) t = \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) t. \end{aligned}$$

Fazendo em (1.17) a substituição $t - x = \zeta$, resulta que a n -ésima soma parcial pode ser apresentada na forma do **integral de Dirichlet**:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta + x) D_n(\zeta) d\zeta.$$

Teorema 3. *Seja $\phi(x)$ uma função integrável em $[a, b]$. Então,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \phi(x) \sin nx \, dx = 0.$$

Demonstração. Suponha-se que $\phi \in C^1_{[a,b]}$. Então,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \phi(x) \sin nx \, dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n} \int_a^b \phi(x) d \cos nx \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{\phi(x) \cos nx}{n} \Big|_a^b + \frac{1}{n} \int_a^b \phi'(x) \cos nx \, dx \right). \end{aligned}$$

O limite da primeira parcela à direita é igual à zero, pois o limite do produto dum sucessão limitada por um infinitésimo é um infinitésimo [1]. Para o segundo integral basta mostrar que a expressão $\frac{\phi'(x) \cos nx}{n}$ converge uniformemente, o que permitirá fazer a transição do limite sob sinal do integral. Realmente,

$$\sup_{[a,b]} \left| \frac{\phi'(x) \cos nx}{n} \right| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

daí que existe convergência uniforme. Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{\phi'(x) \cos nx}{n} \, dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi'(x) \cos nx}{n} \, dx = 0. \quad (1.18)$$

Contudo, pelas condições do Teorema 3, a função $\phi \in L^1_{[a,b]}$. Sabe-se que o espaço $C^1_{[a,b]}$ é totalmente denso em $L^1_{[a,b]}$ daí que existe uma função [6], [8], [9], [10] $\phi_\varepsilon \in C^1_{[a,b]}$ tal, que:

$$\int_a^b |\phi(x) - \phi_\varepsilon(x)| dx < \varepsilon/2. \quad (1.19)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \phi(x) \sin mx dx \right| &= \left| \int_a^b [\phi(x) - \phi_\varepsilon(x) + \phi_\varepsilon(x)] \sin nx dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |\phi(x) - \phi_\varepsilon(x)| dx + \left| \int_a^b \phi_\varepsilon(x) \sin nx dx \right|. \end{aligned}$$

A primeira parcela à direita, devido à (1.19), é menor que $\varepsilon/2$; a segunda parcela, devido à (1.18), tende para zero. O teorema está demonstrado. ■

Viu-se antes, que

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta + x) D_n(\zeta) d\zeta,$$

onde $D_n(x)$ é o núcleo de Dirichlet. Então

$$\begin{aligned} S_n(x) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta + x) D_n(\zeta) d\zeta - f(x) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(\zeta) d\zeta = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(\zeta + x) - f(x)] D_n(\zeta) d\zeta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\zeta) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \zeta d\zeta \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Aqui,

$$\phi(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(\zeta + x) - f(x)}{\zeta} \cdot \frac{\zeta}{\sin \frac{\zeta}{2}}.$$

Teorema 4. (Condição de Dini⁷ para convergência pontual).

Suponha-se que cumprem-se as seguintes condições:

1) $f(x)$ é uma função somável em $[-\pi, \pi]$;

⁷Ulisse Dini (1845-1918) — matemático francês

2) $\forall \delta > 0$ existe o integral $\int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(\zeta + x) - f(x)}{\zeta} \right| d\zeta$, x está fixo.

Então $S_n(x) \rightarrow f(x)$ pontualmente.

Demonstração. Segundo a condição 2) do Teorema 4, a função

$$\frac{f(\zeta + x) - f(x)}{\zeta}$$

é somável. Sendo assim,

$$\begin{aligned} S_n(x) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(\zeta + x) - f(x)] D_n(\zeta) d\zeta = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\zeta) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \zeta d\zeta \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Veja-se agora a questão concernente à convergência uniforme da série de Fourier segundo o sistema trigonométrico. Suponha-se que $f(x)$ é uma função contínua e seu período é igual à 2π . Decompondo esta função na série de Fourier tem-se

$$f(x) \sim c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \cos kx + s_k \sin kx), \quad x \in [-\pi, \pi]. \quad (1.20)$$

Fácilmente se pode notar que (1.20) é majorada pela série numérica

$$|c_0| + \sum_{k=1}^{\infty} (|c_k| + |s_k|); \quad (1.21)$$

pelo critério de Weierstrass⁸[6], [8] (sobre convergência uniforme numa série funcional) tem-se que a série (1.20) converge uniformemente, daí que pode-se diferenciá-la termo a termo:

$$f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kx + B_k \sin kx), \quad x \in [-\pi, \pi]. \quad (1.22)$$

Os coeficientes A_k e B_k da série (1.22) obtêm-se através dos coeficientes c_k e s_k da série (1.20).

Sabe-se, que

$$c_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) d \sin kx =$$

⁸Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) — matemático alemão

$$= \frac{1}{k\pi} \left(f(x) \sin kx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin kx dx \right) = -\frac{1}{k} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin kx dx \right) = -\frac{1}{k} B_k,$$

isto é,

$$c_k = -\frac{B_k}{k}. \quad (1.23)$$

De modo similar obtem-se

$$s_k = \frac{A_k}{k}. \quad (1.24)$$

Ao fazer-se a integração usou-se o facto que $f(x)$ é uma função 2π -periódica e, portanto, $f(\pi) = f(-\pi)$.

Escrevendo a desigualdade de Bessel para a série (1.22) tem-se

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|A_k|^2 + |B_k|^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'^2(x) dx < \infty, \quad f' \in L^2_{[-\pi, \pi]}. \quad (1.25)$$

Colocando (1.23) e (1.24) em (1.21) gera

$$|c_0| + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{|B_k|}{k} + \frac{|A_k|}{k} \right). \quad (1.26)$$

Antes de avaliar (1.26), veja-se a seguinte desigualdade:

$$0 \leq \left(A - \frac{1}{n} \right)^2 = A^2 - \frac{2A}{n} + \frac{1}{n^2} \implies \frac{1}{2} \left(A^2 + \frac{1}{n^2} \right) \geq \frac{A}{n}; \quad (1.27)$$

pegando a série numérica (1.26) e com base na desigualdade (1.27) tem-se

$$\begin{aligned} |c_0| + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{|B_k|}{k} + \frac{|A_k|}{k} \right) &\leq |c_0| + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(|B_k|^2 + \frac{1}{k^2} \right) + \left(|A_k|^2 + \frac{1}{k^2} \right) = \\ &= |c_0| + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (|B_k|^2 + |A_k|^2) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty, \end{aligned}$$

pois a série $\sum_{k=1}^{\infty} (|B_k|^2 + |A_k|^2)$ converge devido à (1.25); pelo critério integral [2], facilmente se

mostra que a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ também converge.

Viu-se, deste modo, que a série majorante converge. Então a série funcional (1.20) converge uniformemente. Fica deste modo demonstrado o seguinte teorema.

Teorema 5. (*Condição de convergência uniforme*)

Suponha-se que se cumprem as condições seguintes:

- 1) $f(x) \in C_{[-\pi, \pi]}$, 2π -periódica;
- 2) $f'(x)$ é seccionávelmente contínua em $[-\pi, \pi]$.

Então, a série de Fourier, para $f(x)$, converge uniformemente no intervalo $[-\pi, \pi]$. ■

1.5 Somas de Cesàro

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ uma série funcional e $\sum_{k=1}^n u_k(x)$ a sua n -ésima soma parcial. A expressão do tipo

$$\Theta_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{S_1(x) + \cdots + S_n(x)}{n}$$

chama-se soma de Cesàro⁹ [11]. Suponha-se que

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \cos kx + s_k \sin kx)$$

é a série de Fourier gerada pela função $f(x)$ e

$$S_n(x) = c_0 + \sum_{k=1}^n (c_k \cos kx + s_k \sin kx)$$

a sua n -ésima soma parcial. Tendo em consideração a representação

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta + x) D_n(\zeta) d\zeta,$$

compõe-se a soma de Cesàro:

$$\begin{aligned} \Theta_{n+1}(x) &= \frac{S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_n(x)}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(x) = \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta + x) D_k(\zeta) d\zeta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta + x) \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(\zeta) d\zeta = \end{aligned}$$

⁹Ernesto Cesàro — matemático italiano

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta + x) \Phi_n(\zeta) d\zeta, \quad (1.28)$$

onde

$$\Phi_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x)$$

é o núcleo de Fejér¹⁰ [8]. Reescrevendo o núcleo de Fejér tem-se

$$\begin{aligned} \Phi_n(\zeta) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(\zeta) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{\sin(k + \frac{1}{2})\zeta}{2 \sin \frac{\zeta}{2}} = \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{\cos k\zeta - \cos(k+1)\zeta}{4(\sin \frac{\zeta}{2})^2} = \frac{1 - \cos(n+1)\zeta}{4(n+1)(\sin \frac{\zeta}{2})^2} = \frac{\sin^2(n+1)\frac{\zeta}{2}}{2(n+1)\sin^2 \frac{\zeta}{2}}. \end{aligned}$$

O núcleo de Fejér pode-se apresentar na forma compacta

$$\Phi_n(\zeta) = \frac{\sin^2(n+1)\frac{\zeta}{2}}{2(n+1)\sin^2 \frac{\zeta}{2}}. \quad (1.29)$$

Ao fazerem-se estas transformações, de modo a obter o núcleo de Fejér na forma (1.29), teve-se em conta o facto que

$$\frac{\sin(k + \frac{1}{2})\zeta}{2 \sin \frac{\zeta}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\zeta}{2} \sin(2k+1)\frac{\zeta}{2}}{4 \sin^2 \frac{\zeta}{2}} = \frac{\cos k\zeta - \cos(k+1)\zeta}{4 \sin^2 \frac{\zeta}{2}}.$$

O núcleo de Fejér usufrui as seguintes propriedades:

1) $\Phi_n(\zeta) \geq 0$;

2) $\Phi_n(0) = \frac{n+1}{2}$;

3) $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(\zeta) d\zeta = 1$;

4) $\int_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(\zeta) d\zeta = \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(\zeta) d\zeta \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \delta > 0.$

¹⁰Leopold Fejér (1880-1959) — matemático francês

As três primeiras propriedades são evidentes. Veja-se a última. É claro que

$$\int_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(\zeta) d\zeta = \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(\zeta) d\zeta,$$

para tal basta fazer a mudança $\zeta = -\theta$ e ter em consideração o facto, que $\Phi_n(-\zeta) = \Phi_n(\zeta)$. Mostremos que essa integral tende para zero, quando $n \rightarrow \infty$. Tem-se $0 < \delta < \zeta < \pi$, então

$$\begin{aligned} \sin \frac{\zeta}{2} &\geq \frac{2\delta}{\pi} \implies \frac{1}{\sin \frac{\zeta}{2}} \leq \frac{\pi}{2\delta} \implies \\ \implies \frac{1}{\sin^2 \frac{\zeta}{2}} &\leq \frac{\pi^2}{4\delta^2} \implies \frac{1}{2(n+1) \sin^2 \frac{\zeta}{2}} \leq \frac{\pi^2}{8(n+1)\delta^2} \implies \\ \implies \frac{\sin^2(n+1)\frac{\zeta}{2}}{2(n+1) \sin^2 \frac{\zeta}{2}} &\leq \frac{\pi^2}{8(n+1)\delta^2}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Assim, integrando (1.30) no intervalo $[\delta, \pi]$ gera

$$\int_{\delta}^{\pi} \frac{\sin^2(n+1)\frac{\zeta}{2}}{2(n+1) \sin^2 \frac{\zeta}{2}} d\zeta \leq \frac{\pi^2(\pi - \delta)}{8(n+1)\delta^2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad \blacksquare$$

Teorema 6. (Sobre a convergência das somas de Cesàro)

Suponha-se que $f(x)$ é uma função contínua e 2π -periódica. Então, $\Theta_n(x)$ converge uniformemente em $[-\pi, \pi]$ para a função $f(x)$.

Demonstração. Deve-se mostrar, que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n > N(\varepsilon), \forall x \in [-\pi, \pi] \implies |\Theta_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Tendo em conta que $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(\zeta) d\zeta = 1$, então

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \Phi_n(\zeta) d\zeta, \quad x \in [-\pi, \pi]. \quad (1.31)$$

Deste modo, e devido às representações (1.28) e (1.31), tem-se

$$\Theta_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta + x) \Phi_n(\zeta) d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \Phi_n(\zeta) d\zeta =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(\zeta + x) - f(x)] \Phi_n(\zeta) d\zeta.$$

Denote-se

$$F_n(\zeta, x) \stackrel{\text{def}}{=} [f(\zeta + x) - f(x)] \Phi_n(\zeta);$$

então,

$$\begin{aligned} \Theta_n(x) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(\zeta, x) d\zeta = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} F_n(\zeta, x) d\zeta + \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} F_n(\zeta, x) d\zeta + \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} F_n(\zeta, x) d\zeta. \end{aligned}$$

Avalie-se cada um dos três integrais. Veja-se o primeiro integral

$$I_1 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\pi}^{-\delta} F_n(\zeta, x) d\zeta.$$

Sabe-se que $f(x)$ é contínua num intervalo fechado, portanto ela é limitada, isto é, existe $M \in \mathbb{R}^1$ tal, que $|f(x)| \leq M$ para qualquer $x \in [-\pi, \pi]$. Assim, para qualquer $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\pi} > 0$,

$$|I_1| \leq 2M \int_{-\pi}^{-\delta} \Phi_n(\zeta) d\zeta < \frac{\varepsilon'\pi}{4}.$$

Aqui usou-se a propriedade 4) sobre o núcleo de Fejér. De modo análogo, para o último integral

$$I_3 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\delta}^{\pi} F_n(\zeta, x) d\zeta \text{ tem-se}$$

$$|I_3| \leq 2M \int_{\delta}^{\pi} \Phi_n(\zeta) d\zeta < \frac{\varepsilon'\pi}{4}.$$

Avalie-se o segundo integral $I_2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\delta}^{\delta} F_n(\zeta, x) d\zeta$. A função $f(x)$ é contínua num intervalo fechado, então ela é uniformemente contínua segundo o teorema de Cantor¹¹[2], isto é,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in [-\pi, \pi] : |x' - x''| < \delta \implies |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

¹¹Moritz Benedict Cantor (1829-1920) — matemático alemão

Assim

$$|I_2| < \frac{\varepsilon'}{2} \int_{-\delta}^{\delta} \Phi_n(\zeta) d\zeta < \frac{\varepsilon'\pi}{2}.$$

Então,

$$|\Theta_n(x) - f(x)| = |I_1 + I_2 + I_3| \leq |I_1| + |I_2| + |I_3| < \left(\frac{\varepsilon'}{4} + \frac{\varepsilon'}{2} + \frac{\varepsilon'}{4}\right)\pi = \varepsilon' \pi = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

1.6 Sistemas ortogonais para o caso de duas variáveis

Suponha-se que no plano é dado o rectângulo

$$\mathcal{R} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\}$$

e nele está definido o sistema de funções contínuas

$$\{\psi_n(x, y)\}_{n=0}^{\infty}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (1.32)$$

diferentes de zero. Diz-se que o sistema (1.32) é **ortogonal** em \mathcal{R} se

$$\int_a^b \int_c^d \psi_n(x, y) \psi_m(x, y) dx dy = 0, \quad m \neq n.$$

A norma da função $\psi_n(x, y)$ é definida pela fórmula

$$\|\psi_n\| = \sqrt{\int_a^b \int_c^d \psi_n^2(x, y) dx dy}.$$

O sistema (1.32) diz-se **normado** se $\|\psi_n\| = 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Qualquer função $f(x, y)$ integrável em \mathcal{R} decompõe-se na série de Fourier

$$f(x, y) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x, y),$$

onde

$$c_n = \frac{\int_a^b \int_c^d f(x, y) \psi_n(x, y) dx dy}{\int_a^b \int_c^d \psi_n^2(x, y) dx dy}.$$

1.7 Sistema trigonométrico fundamental. Série dupla de Fourier

As funções

$$\begin{aligned} &1, \cos mx, \sin mx, \cos ny, \sin ny, \dots, \\ &\cos mx \cos ny, \sin mx \cos ny, \cos mx \sin ny, \sin mx \sin ny, \dots, \end{aligned} \quad (1.33)$$

$m, n = 1, 2, \dots$ formam o **sistema trigonométrico fundamental** para o caso de duas variáveis. Cada uma das funções do sistema (1.33) tem período 2π para x e para y . Estas funções são ortogonais no quadrado

$$\mathcal{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\pi \leq x \leq \pi, \quad -\pi \leq y \leq \pi\}.$$

Na verdade:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos mx \, dx dy &= \int_{-\pi}^{\pi} dy \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, dx = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin mx \, dx dy &= \int_{-\pi}^{\pi} dy \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \, dx = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos mx \cos ny \cos rx \cos sy \, dx dy &= \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos rx \, dx \int_{-\pi}^{\pi} \cos ny \cos sy \, dy = 0, \quad m \neq r, \quad n \neq s. \end{aligned}$$

Os coeficientes de Fourier calculam-se segundo as fórmulas

$$\begin{aligned} a_{mn} &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \cos mx \cos ny \, dx dy, \\ b_{mn} &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \sin mx \cos ny \, dx dy, \\ c_{mn} &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \cos mx \sin ny \, dx dy, \\ d_{mn} &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x, y) \sin mx \sin ny \, dx dy. \end{aligned}$$

A série de Fourier, gerada pela função $f(x, y)$, tem a forma [7]

$$f(x, y) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_{mn} (a_{mn} \cos mx \cos ny + b_{mn} \sin mx \cos ny + c_{mn} \cos mx \sin ny + d_{mn} \sin mx \sin ny),$$

onde

$$\theta_{mn} = \begin{cases} 1/4 & , \text{ se } m = n = 0, \\ 1/2 & , \text{ se } n = 0 \text{ ou } m = 0, n > 0, \\ 1 & , \text{ se } m > 0, n > 0. \end{cases}$$

Capítulo 2

Funções de Bessel

2.1 Γ -função

A função Gamma [13] ou integral de Euler¹ de segunda espécie define-se (para $p > 0$) segundo a fórmula

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx. \quad (2.1)$$

O integral na parte direita de (2.1) é impróprio no limite superior de integração e para $p < 1$ é também impróprio no limite inferior de integração. A convergência de (2.1), para $p > 0$, está garantida. Integrando (2.1) por partes obtém-se

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{\infty} x^p e^{-x} dx = p \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = p\Gamma(p),$$

isto é, $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$. Então,

$$\begin{aligned} \Gamma(p) &= (p-1)\Gamma(p-1) = (p-1)(p-2)\Gamma(p-2) = \dots = \\ &= (p-1)(p-2)\dots(p-k)\Gamma(p-k), \quad k < p. \end{aligned}$$

Para $p = n$ natural tem-se

$$\Gamma(n+1) = n!$$

¹Leonhard Euler (1707-1783) — matemático alemão

A substituição $x = t^2$ gera

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} t^{2p-1} dt.$$

Então, para o caso particular $p = \frac{1}{2}$, obtem-se o integral de Poisson²

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

2.2 Equação de Euler-Bessel

Chama-se equação de Euler-Bessel [14] à equação diferencial ordinária de segunda ordem

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0, \quad (2.2)$$

onde p é constante (p chama-se índice da equação (2.2)). Sendo (2.2) uma equação linear, então o seu integral geral pode ser escrito na forma

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

onde y_1 e y_2 são duas soluções quaisquer de (2.2) linearmente independentes, c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

2.3 Funções de Bessel de primeira espécie com índice positivo

Seja $p \geq 0$ e faça-se a substituição

$$y = x^p z. \quad (2.3)$$

Assim

$$y' = px^{p-1}z + x^p z', \quad y'' = p(p-1)x^{p-2}z + 2px^{p-1}z' + x^p z''.$$

Colocando (2.3) em (2.2) obtem-se para z a equação

$$z'' + \frac{2p+1}{x}z' + z = 0. \quad (2.4)$$

²Siméon Denis Poisson (1781-1840) — matemático francês

A solução de (2.4) procura-se na forma duma série de potências

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Colocando esta série em (2.4) tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{2p+1}{x} c_1 + [2c_2 + (2p+1)2c_2 + c_0] + [2 \cdot 3c_3 + (2p+1)3c_3 + c_1]x + \\ & + [3 \cdot 4 \cdot c_4 + (2p+1)4 \cdot c_4 + c_2]x^2 + \dots + [(n+1)(n+2)c_{n+2} + \\ & + (2p+1)(n+2)c_{n+2} + c_n]x^n + \dots = 0. \end{aligned}$$

De modo a satisfazer a equação impõe-se que os coeficientes, para as diferentes potências de x , sejam iguais à zero. Assim, $c_1 \equiv 0$,

$$(n+1)(n+2)c_{n+2} + (2p+1)(n+2)c_{n+2} + c_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

Daqui conclui-se, que

$$c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+2)(n+2p+2)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

De (2.5) e (2.6) obtem-se

$$\begin{aligned} c_1 = c_3 = c_5 = \dots = c_{2m-1} = \dots = 0, \\ c_2 = -\frac{c_0}{2(2p+2)}, \quad c_4 = -\frac{c_2}{4(2p+4)} = \frac{c_0}{2 \cdot 4(2p+2)(2p+4)} \end{aligned}$$

e, de modo geral,

$$c_{2m} = (-1)^m \frac{c_0}{2^{2m} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m(p+1)(p+2) \cdot \dots \cdot (p+m)}.$$

Deste modo a solução da equação (2.4) é dada pela série

$$z = c_0 + c_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m(p+1)(p+2) \cdot \dots \cdot (p+m)},$$

onde c_0 é uma constante arbitrária. Com ajuda do critério de d'Alembert³[2] verifica-se facilmente que esta série converge, quaisquer que sejam os valores de x . Como a diferenciação termo

³Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) — matemático francês

a termo é permissível (dentro do intervalo de convergência), então z é realmente a solução da equação (2.4). A solução de (2.2) será

$$y = c_0 + c_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{p+2m}}{2^{2m} \cdot 1 \cdot 2 \cdots m(p+1)(p+2) \cdots (p+m)}. \quad (2.7)$$

Habitualmente considera-se

$$c_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)}.$$

A série (2.7), para $c_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)}$, chama-se **função de Bessel de primeira espécie** com índice $p \geq 0$ e denota-se por $J_p(x)$. Tendo em conta que $\Gamma(m+1) = m!$, $\Gamma(p+m+1) = (p+m)(p+m-1) \cdots (p+1)\Gamma(p+1)$, então

$$J_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2m}}{\Gamma(m+1)\Gamma(p+m+1)}. \quad (2.8)$$

Em particular, para $p = 0$,

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{(m!)^2}$$

e para $p = 1$

$$J_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1}}{m!(m+1)!}.$$

2.4 Funções de Bessel de primeira espécie com índice negativo

Se em (2.7) fizer-se a substituição $p = -p$ tem-se

$$J_{-p}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{-p+2m}}{\Gamma(m+1)\Gamma(-p+m+1)}. \quad (2.9)$$

Tendo em conta que para p inteiro e $m = 0, 1, \dots, p-1$ a expressão $-p+m+1$ toma valores inteiros negativos e zero, então $\Gamma(-p+m+1) = \infty$ e, por isso, os termos respectivos na série (2.9) consideram-se como sendo negativos. Assim, para p inteiro,

$$J_{-p}(x) = \sum_{m=p}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{-p+2m}}{\Gamma(m+1)\Gamma(-p+m+1)}$$

e colocando $m = p + k$ obtem-se

$$J_{-p}(x) = (-1)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(p+k+1)} = (-1)^p J_p(x).$$

As fórmulas (2.8) e (2.9) podem ser agrupadas numa só:

$$J_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2m}}{\Gamma(m+1)\Gamma(p+m+1)}.$$

2.5 Núcleo de Vallée Poussin

No capítulo 1 falou-se sobre os núcleos de Dirichlet

$$D_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

e Fejér

$$\Phi_n(x) = \frac{\sin^2(n + 1)\frac{x}{2}}{2(n + 1) \sin^2 \frac{x}{2}}. \quad (2.10)$$

Veja-se a soma

$$V_{n,k}(x) = \frac{1}{k} \sum_{l=n}^{n+k-1} D_l(x).$$

Fácilmente se deduz que

$$V_{n,k}(x) = \left(1 + \frac{n}{k}\right) \Phi_{n+k-1}(x) - \frac{n}{k} \Phi_{n-1}(x). \quad (2.11)$$

Com efeito:

$$\begin{aligned} V_{n,k} &= \frac{1}{k} \sum_{l=n}^{n+k-1} D_l(x) = \frac{1}{k} \left(\sum_{l=0}^{n+k-1} D_l(x) - \sum_{l=0}^{n-1} D_l(x) \right) = \\ &= \frac{1}{k} \left(\frac{n+k}{n+k} \sum_{l=0}^{n+k-1} D_l(x) - \sum_{l=0}^{n-1} D_l(x) \right) = \\ &= \frac{1}{k} \left(\frac{k}{n+k} \sum_{l=0}^{n+k-1} D_l(x) + \frac{n}{n+k} \sum_{l=0}^{n+k-1} D_l(x) - \sum_{l=0}^{n-1} D_l(x) \right) = \\ &= \frac{1}{n+k} \sum_{l=0}^{n+k-1} D_l(x) + \frac{n}{k(n+k)} \sum_{l=0}^{n+k-1} D_l(x) - \frac{n}{kn} \sum_{l=0}^{n-1} D_l(x) = \end{aligned}$$

$$= \Phi_{n+k-1}(x) + \frac{n}{k} \Phi_{n+k-1}(x) - \frac{n}{k} \Phi_{n-1}(x) = \left(1 + \frac{n}{k}\right) \Phi_{n+k-1}(x) - \frac{n}{k} \Phi_{n-1}(x).$$

A soma $V_{n,k}(x)$ chama-se **núcleo de Vallée Poussin**⁴. Colocando (2.10) em (2.11), e após algumas simplificações, obtemos o núcleo de Vallée Poussin numa forma compacta:

$$V_{n,k}(x) = \frac{\sin^2(n+k)\frac{x}{2} - \sin^2 n\frac{x}{2}}{2k \sin^2 \frac{x}{2}}. \quad (2.12)$$

Para o caso particular quando $k = 1$ tem-se $V_{n,1}(x) = D_n(x)$ e para $n = 0$, $k = n + 1$

$$V_{0,n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^n D_l(x) = \Phi_n(x).$$

Os núcleos de Dirichlet e Fejér não são nada mais nada menos do que casos particulares do núcleo de Vallée Poussin [8].

2.6 Soma de Vallée Poussin

Seja $f(x)$ uma função integrável em $[-\pi, \pi]$. A expressão

$$\Theta_{n,k}(x) = \frac{1}{k} \sum_{l=n}^{n+k-1} S_l(x) \quad (2.13)$$

chama-se **soma de Vallée Poussin** para a função $f(x)$. É fácil verificar que as somas de Fourier e de Fejér são casos particulares. Realmente,

$$\Theta_{n,1}(x) = S_n(x), \quad \Theta_{0,k+1}(x) = \Theta_k(x).$$

Anteriormente viu-se que

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta + x) D_n(\zeta) d\zeta. \quad (2.14)$$

Colocando (2.14) em (2.13) tem-se

$$\Theta_{n,k}(x) = \frac{1}{k} \sum_{l=n}^{n+k-1} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta + x) D_l(\zeta) d\zeta =$$

⁴Charles Joseph de la Vallée Poussin (1866-1962) — matemático francês

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta + x) \frac{1}{k} \sum_{l=n}^{n+k-1} D_l(\zeta) d\zeta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta + x) V_{n,k}(\zeta) d\zeta. \quad (2.15)$$

Tendo em conta (2.12), então (2.15) será

$$\Theta_{n,k}(x) = \frac{1}{2k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\zeta + x) \frac{\sin^2(n+k)\frac{\zeta}{2} - \sin^2 n\frac{\zeta}{2}}{\sin^2 \frac{\zeta}{2}} d\zeta.$$

2.7 Avaliação do integral $\int_{-\pi}^{\pi} |V_{n,k}(x)| dx$

Neste parágrafo investiga-se o comportamento do integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} |V_{n,k}(x)| dx$$

em relação à variação dos parâmetros n e k . Para tal demonstrar-se-ão alguns teoremas auxiliares, que serão usados posteriormente na referida avaliação.

Teorema 7. *Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções definidas em $[a, b]$, $f(x)$ é simétrica em relação ao ponto $\frac{a+b}{2}$, isto é, $f(a+b-x) = f(x)$ e é crescente em $[a, (a+b)/2]$. Suponha-se, também, que $g(x)$ é diferenciável em $[a, b]$ e $g''(x) \geq 0$.*

Então é justa a desigualdade

$$\int_a^b f(x)g(x) dx \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx.$$

Demonstração. Fazendo $x = a + b - t$ no integral

$$\int_{(a+b)/2}^b f(x)g(x) dx$$

e mudando novamente t para x tem-se

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \int_a^{(a+b)/2} f(x)g(x) dx + \int_{(a+b)/2}^b f(x)g(x) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^{(a+b)/2} f(x)g(x) dx + \int_a^{(a+b)/2} f(a+b-x)g(a+b-x) dx = \\
&= \int_a^{(a+b)/2} f(x)g(x) dx + \int_a^{(a+b)/2} f(a+b-x)g(a+b-x) dx = \\
&= \int_a^{(a+b)/2} f(x)[g(x) + g(a+b-x)] dx.
\end{aligned}$$

Aqui explorou-se o facto que $f(x)$ é simétrica em relação ao ponto $\frac{a+b}{2}$.

Fazendo $h(x) = g(x) + g(a+b-x)$ e tendo em conta que $g'(x)$ é crescente e $x \leq a+b-x$, quando $x \in [a, (a+b)/2]$, então $g'(x) \leq g'(a+b-x)$. Portanto $h'(x) \leq 0$ e $h(x)$ é decrescente em $[a, (a+b)/2]$. Segundo o teorema de Tshebishev⁵

$$\begin{aligned}
\int_a^{(a+b)/2} f(x)h(x) dx &\leq \frac{2}{b-a} \int_a^{(a+b)/2} f(x) dx \int_a^{(a+b)/2} h(x) dx = \\
&= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Corolário 1. *Seja $m - 2$ um número natural e $h = \frac{\pi}{m}$. Então*

$$\int_h^{\pi/2} \frac{|\sin mx|}{\sin x} dx \leq \frac{2}{\pi} \int_h^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}.$$

Demonstração. Se m fôr par tem-se

$$\left[h, \frac{\pi}{2} \right] = \bigcup_{k=1}^{\frac{m}{2}-1} [kh, (k+1)h]$$

e quando m fôr ímpar

$$\left[h, \frac{\pi}{2} \right] = \bigcup_{k=1}^{\frac{m-3}{2}} [kh, (k+1)h] \cup \left[\frac{m-1}{2}h, \frac{m}{2}h \right].$$

⁵Pafnutii L'vovitch Tshebishev (1821-1894) — matemático russo

Em cada intervalo $[kh, (k+1)h]$ as funções $|\sin mx|$ e $\frac{1}{\sin x}$ satisfazem as condições do teorema anterior e, no segmento $[h(m-1)/2, hm/2]$, satisfazem as condições da desigualdade de Tshebishev. Além disso,

$$\frac{1}{h} \int_{kh}^{(k+1)h} |\sin mx| dx = \frac{2}{\pi}.$$

Adicionando as desigualdades o corolário fica demonstrado. ■

Teorema 8. Se $k-1$ for um número natural e $x \in (0, \pi/2]$, então

$$\frac{|\sin kx|}{\sin x} < \frac{k \sin x}{x}.$$

Demonstração. Tendo em conta a desigualdade

$$\sin x \geq \frac{2x}{\pi}, \quad x \in [0, \pi/2]$$

e sabendo que a função $\frac{\sin x}{x}$ decresce no intervalo $(0, \pi]$ tem-se

$$\frac{\sin kx}{k \sin^2 x} = \frac{x}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin kx}{kx} \leq \frac{x}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} = \operatorname{ctg} x < \frac{1}{x},$$

se $x \in (0, \pi/k]$ e

$$\frac{|\sin kx|}{k \sin^2 x} \leq \frac{1}{k(4/\pi^2)x^2} < \frac{1}{k(4/\pi^2)(\pi/k)x} < \frac{1}{x},$$

se $x \in (\pi/k, \pi/2]$. ■

Teorema 9. Sejam $n+1$ e k dois números naturais. Então,

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} |V_n, k(t)| dt \leq \frac{4}{\pi^2} \ln \left(1 + \frac{n}{k} \right) + 1.7.$$

Demonstração. Tendo em conta a paridade da função integrante, a identidade

$$\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A+B) \sin(A-B),$$

e fazendo a substituição $\frac{t}{2} = x$, tem-se

$$J = \frac{2}{\pi k} \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(2n+k)x \sin kx|}{\sin^2 x} dx.$$

Suponha-se que $k > 1$. Colocando $m = 2n + k$, $h = \frac{\pi}{m}$ e escolhendo um número inteiro r tal, que $rh < \frac{\pi}{k} < (r+1)h$, então $(r+1)h \leq \frac{\pi}{2}$. Divide-se o integral J pelos intervalos $[0, h]$, $[h, (r+1)h]$, $[(r+1)h, \pi/2]$. Com base no Teorema 8, no intervalo $(0, \pi/2]$ é justa a desigualdade

$$\frac{|\sin kx|}{k \sin^2 x} < \frac{1}{x}.$$

Assim sendo

$$J_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^h \frac{|\sin(2n+k)x \sin kx|}{\sin^2 x} dx < \frac{2}{\pi} \int_0^h \frac{\sin mx}{x} dx = \frac{2}{\pi} \text{Si } \pi,$$

onde $\text{Si } x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ é o **integral-seno**;

$$J_2 = \frac{2}{\pi} \int_h^{(r+1)h} \frac{|\sin(2n+k)x \sin kx|}{\sin^2 x} dx < \frac{2}{\pi} \int_h^{(r+1)h} \frac{\sin mx}{x} dx = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^r \int_{ih}^{(i+1)h} \frac{dx}{x}.$$

Pelo Teorema 7

$$\int_{ih}^{(i+1)h} \frac{|\sin mx|}{x} dx \leq \frac{1}{h} \int_{ih}^{(i+1)h} |\sin mx| dx \int_{ih}^{(i+1)h} \frac{dx}{x} = \frac{2}{\pi} \int_{ih}^{(i+1)h} \frac{dx}{x}.$$

Deste modo

$$J_2 < \frac{4}{\pi^2} \int_h^{(r+1)h} \frac{dx}{x} = \frac{4}{\pi^2} \ln(r+1) < \frac{4}{\pi^2} \ln 2 \left(1 + \frac{n}{k}\right).$$

Para o integral no segmento $[(r+1)h, \pi/2]$ aplica-se a desigualdade de Cauchy-Bunikovskii:

$$J_3 \leq \frac{2}{\pi k} \left(\int_{(r+1)h}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 mx}{\sin^2 x} dx \right)^{1/2} \left(\int_{\pi/k}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 kx}{\sin^2 x} dx \right)^{1/2}.$$

Divide-se o primeiro integral pelos segmentos $[ih, (i+1)h]$ e aplica-se para cada uma das partes o Teorema 7. Somando as desigualdades obtidas tem-se

$$\int_{(r+1)h}^{\pi/2} \frac{\sin^2 mx}{\sin^2 x} dx \leq \frac{1}{2} \int_{(r+1)h}^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2 x} dx \leq \frac{1}{2} \text{ctg } \frac{\pi}{k} < \frac{k}{2\pi}.$$

De modo análogo

$$\int_{\pi/k}^{\pi/2} \frac{\sin^2 kx}{\sin^2 x} dx \leq \frac{k}{2\pi}.$$

Assim, $J_3 < \pi^{-2}$. Consequentemente,

$$J = J_1 + J_2 + J_3 < \frac{4}{\pi^2} \ln \left(1 + \frac{n}{k} \right) + \frac{2}{\pi} \text{Si } \pi + \frac{4}{\pi^2} \ln 2 + \frac{1}{\pi^2} < \frac{4}{\pi^2} \ln \left(1 + \frac{n}{k} \right) + 1.7. \quad \blacksquare$$

Capítulo 3

Método de funções próprias e suas aplicações

3.1 A essência do método

Muitos problemas da física-matemática são descritos matematicamente através de equações diferenciais com derivadas parciais. Por exemplo, o problema sobre a oscilação duma corda é dado pela equação

$$p(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + r(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + q(x)u(x, t) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \quad (3.1)$$

o problema sobre transmissão do calor é dado pela equação

$$p(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + r(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + q(x)u(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}.$$

As funções $p(x)$, $r(x)$ e $q(x)$ são contínuas em $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$. Suponha-se que pretende-se achar a solução $u(x, t)$ da equação (3.1) definida na região

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, t) : a \leq x \leq b, \quad 0 \leq t < +\infty\},$$

que satisfaz as condições de fronteira

$$\begin{cases} \alpha_1 u(a, t) + \beta_1 u'_x(a, t) = 0, \\ \alpha_2 u(b, t) + \beta_2 u'_x(b, t) = 0, \end{cases} \quad \forall t \in [0, +\infty), \quad (3.2)$$

e as condições iniciais

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x), \\ u'_t(x, 0) = g(x), \end{cases} \quad \forall x \in [a, b]. \quad (3.3)$$

Aqui, α_1 , α_2 , β_1 e β_2 são constantes tais, que

$$\begin{cases} \alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0, \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0, \end{cases}$$

$f(x)$ e $g(x)$ são funções contínuas em $[a, b]$.

Procura-se a solução de (3.1) na forma de produto de duas funções, uma dependente sómente de x e a outra dependente sómente de t , isto é,

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (3.4)$$

Colocando (3.4) em (3.1) tem-se

$$\begin{aligned} p(x) \frac{\partial^2 X(x)T(t)}{\partial x^2} + r(x) \frac{\partial X(x)T(t)}{\partial x} + q(x)X(x)T(t) &= \frac{\partial^2 X(x)T(t)}{\partial t^2} \iff \\ \iff p(x)T(t) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + r(x)T(t) \frac{\partial X(x)}{\partial x} + q(x)X(x)T(t) &= X(x) \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dividindo (3.5) por $X(x)T(t)$ ($X(x)T(t) \neq 0$) obtem-se a relação

$$\frac{p(x)X''(x) + r(x)X'(x) + q(x)X(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)}. \quad (3.6)$$

Em (3.6) a parte esquerda depende só de x e a parte direita depende só de t , daí que esta igualdade seja possível só quando estas relações são constantes, isto é,

$$\frac{p(x)X''(x) + r(x)X'(x) + q(x)X(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda,$$

λ é constante. Daqui obtêm-se duas equações lineares diferenciais ordinárias de segunda ordem

$$p(x)X''(x) + r(x)X'(x) + q(x)X(x) = -\lambda X(x), \quad (3.7)$$

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0. \quad (3.8)$$

Para que a função $u(x, t) = X(x)T(t)$ satisfaça as condições de fronteira é necessário e suficiente que a função $X(x)$ satisfaça as condições de fronteira

$$\begin{cases} \ell_a X \equiv \alpha_1 X(a) + \beta_1 X'(a) = 0, \\ \ell_b X \equiv \alpha_2 X(b) + \beta_2 X'(b) = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

A equação (3.7), juntamente com as condições (3.9), chama-se **problema de fronteira**. Ao valor de λ , para qual o problema de fronteira tem solução não trivial chama-se **valor próprio** e a solução correspondente chama-se **função própria** [14].

Veja-se a equação (3.8): compondo a equação característica para o valor próprio $\lambda = \lambda_n$ (vamos supôr $\lambda_n > 0$) tem-se

$$k^2 + \lambda_n = 0 \implies k = \pm i\sqrt{\lambda_n}.$$

A solução correspondente à λ_n tem a forma

$$T_n(t) = A_n \cos \sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} t, \quad (3.10)$$

onde A_n e B_n são constantes. Cada função da forma

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

onde $X_n(x)$ é a função própria correspondente ao valor próprio λ_n em (3.7), será a solução do problema (3.1), que satisfaz a condição de fronteira (3.2). Procura-se a solução de (3.1) na forma duma série do tipo

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)T_n(t). \quad (3.11)$$

Se a série (3.11) converge e admite derivadas de segunda ordem termo a termo em relação à x e t , então colocando (3.11) em (3.1) é fácil verificar que esta série é a solução. Realmente,

$$\begin{aligned} & p(x) \frac{\partial^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)T_n(t) \right)}{\partial x^2} + \\ & + r(x) \frac{\partial \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)T_n(t)}{\partial x} + q(x) \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)T_n(t) - \frac{\partial^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)T_n(t) \right)}{\partial t^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= p(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^2 X_n(x)}{\partial x^2} T_n(t) + r(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial X_n(x)}{\partial x} T_n(t) + q(x) \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) T_n(t) - \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) \frac{\partial^2 T_n(t)}{\partial t^2} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(p(x) \frac{\partial^2 X_n(x)}{\partial x^2} T_n(t) + r(x) \frac{\partial X_n(x)}{\partial x} T_n(t) + q(x) X_n(x) T_n(t) - X_n(x) \frac{\partial^2 T_n(t)}{\partial t^2} \right) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(p(x) \frac{\partial^2 u_n(x, t)}{\partial x^2} + r(x) \frac{\partial u_n(x, t)}{\partial x} + q(x) u_n(x, t) - \frac{\partial^2 u_n(x, t)}{\partial t^2} \right) = 0,
\end{aligned}$$

porque $u_n(x, t)$ é solução de (3.1) daí, que a soma será igual à zero. Também, como cada parcela na série (3.11) satisfaz as condições de fronteira (3.11), então a soma da série deverá satisfazer (3.2). Além de satisfazer as condições de fronteira, a solução deverá satisfazer as condições iniciais (3.3). Para que isto se verifique é preciso impôr

$$\begin{cases} u(x, 0) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) T_n(0) = f(x), \\ \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) T_n'(0) = g(x). \end{cases} \quad (3.12)$$

Pode-se constatar que em (3.12) a série $\sum_{n=0}^{\infty} T_n(0) X_n(x)$ e a série $\sum_{n=0}^{\infty} T_n'(0) X_n(x)$ são as decomposições de $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente, segundo as funções próprias $X_n(x)$.

Colocando (3.10) em (3.12) tem-se

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n X_n(x), \\ g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sqrt{\lambda_n} X_n(x). \end{cases} \quad (3.13)$$

Comparando (3.12) com (3.13) obtém-se

$$\begin{cases} T_n(0) = A_n, \\ T_n'(0) = B_n \sqrt{\lambda_n}. \end{cases} \quad (3.14)$$

As operações efectuadas com a série (3.11) basearam-se no facto de se ter feito a suposição que ela é convergente e duas vezes diferenciável termo a termo segundo x e t , conseqüentemente os coeficientes A_n e B_n deverão garantir o cumprimento desta suposição.

3.2 O problema de Sturm-Liouville

Sejam $p(x)$ e $q(x)$ duas funções da classe $C^1_{[a,b]}$ e $C_{[a,b]}$, respectivamente, e suponha-se que $p(x) > p_0 > 0$ em $[a, b]$. Considere-se o problema

$$\begin{cases} \mathcal{A}u = \lambda u, & x \in [a, b], \\ \ell_a u = 0, \\ \ell_b u = 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

Aqui, $\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) + q(x)$, $\ell_a u \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a)$, $\ell_b u \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b)$ e impõe-se, que $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$, $\alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0$. O domínio $D(\mathcal{A})$ do operador \mathcal{A} é composto por funções $u : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^1$ da classe $C^2_{[a,b]}$ e que satisfazem as condições de fronteira $\ell_a u = 0$, $\ell_b u = 0$. Ao operador \mathcal{A} , juntamente com o seu domínio $D(\mathcal{A})$, chama-se **operador de Sturm-Liouville**². Diz-se que o operador \mathcal{L} que actua de um subespaço $M \subset L^2_{[a,b]}$ em L^2 é **simétrico** se

$$(\mathcal{L}f, g) = (f, \mathcal{L}g), \quad \forall f, g \in M.$$

Teorema 10. *O operador de Sturm-Liouville é simétrico.*

Demonstração. Deve-se mostrar a igualdade

$$(\mathcal{A}u, v) = (u, \mathcal{A}v), \quad \forall u, v \in D(\mathcal{A}).$$

$$(\mathcal{A}u, v) = \int_a^b \{ -[p(x)u'(x)]' + q(x)u(x) \} v(x) dx = - \int_a^b [p(x)u'(x)]' v(x) dx + \int_a^b q(x)u(x)v(x) dx.$$

Integrando por partes o primeiro integral à direita tem-se

$$\begin{aligned} - \int_a^b [p(x)u'(x)]' v(x) dx &= - \left(p(x)u'(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b p(x)u'(x)v'(x) dx \right) = \\ &= \int_a^b p(x)u'(x)v'(x) dx - p(x)u'(x)v(x) \Big|_a^b. \end{aligned}$$

¹Jaques Charles Francois Sturm (1803-1855) — matemático francês

²Joseph Liouville (1809-1882) — matemático francês

Em conclusão

$$(\mathcal{A}u, v) = \int_a^b [p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)] dx - p(b)u'(b)v(b) + p(a)u'(a)v(a); \quad (3.16)$$

recorrendo às condições de fronteira tem-se $\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0$, $\alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0$. Se $\beta_1 = \beta_2 = 0$, o teorema está logo demonstrado, pois $u(a) = v(a) = 0$ e $u(b) = v(b) = 0$ ($v(a) = v(b) = 0$, porque $v \in D(\mathcal{A})$). Suponha-se que $\beta_1 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$. Então $u'(a) = -\frac{\alpha_1}{\beta_1}u(a)$, $u'(b) = -\frac{\alpha_2}{\beta_2}u(b)$. Assim,

$$(\mathcal{A}u, v) = \int_a^b [p(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)] dx + \frac{\alpha_2}{\beta_2}p(b)u(b)v(b) - \frac{\alpha_1}{\beta_1}p(a)u(a)v(a) = (u, \mathcal{A}v). \quad \blacksquare$$

Teorema 11. *A cada valor próprio do problema (3.15) corresponde uma só função própria, com exactidão até um factor constante.*

Demonstração. Suponha-se o contrário, isto é, para o valor próprio λ correspondem duas funções próprias $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$, linearmente independentes. Assim, o determinante de Wronski³ composto por estas duas soluções deverá ser diferente de zero, isto é,

$$\begin{vmatrix} \phi_1(x) & \phi_1'(x) \\ \phi_2(x) & \phi_2'(x) \end{vmatrix} = \phi_1(x)\phi_2'(x) - \phi_1'(x)\phi_2(x) \neq 0, \quad x \in [a, b]. \quad (3.17)$$

Veja-se se (3.17) cumpre-se para, por exemplo, $x = a$. Segundo a condição de fronteira no ponto a temos

$$\begin{cases} \alpha_1 \phi_1(a) + \beta_1 \phi_1'(a) = 0, \\ \alpha_1 \phi_2(a) + \beta_1 \phi_2'(a) = 0. \end{cases}$$

Este sistema tem solução não trivial, isto é, $\alpha_1 \neq 0$, $\beta_1 \neq 0$ se o determinante fôr igual à zero. Isto contradiz a condição (3.17) o que mostra que $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ são linearmente dependentes.

■

³Jósef Hoëne-Wronski (1778-1853) — matemático alemão

Sabe-se que se um operador é simétrico então os seus valores próprios são reais. Realmente

$$\lambda(u, u) = (\mathcal{A}u, u) = (u, \mathcal{A}u) = (u, \lambda u) = \bar{\lambda}(u, u) \implies (\lambda - \bar{\lambda})(u, u) = 0.$$

Um produto é igual à zero se um dos factores for nulo. Aqui, $(u, u) \neq 0$, porque se fosse igual à zero, então $u \equiv 0$, o que não pode, pois u é função própria correspondente ao valor próprio λ . Assim, resta sómente afirmar que o outro factor $\lambda - \bar{\lambda}$ é igual à zero, isto é, $\lambda = \bar{\lambda}$. Vamos mostrar, na forma de um teorema, que as funções próprias, correspondentes à diferentes valores próprios, são ortogonais.

Teorema 12. *(Sobre a ortogonalidade das funções próprias)*

Sejam $u_1(x)$ e $u_2(x)$ duas funções próprias de (3.15) correspondentes aos valores próprios λ_1 e λ_2 respectivamente, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Então $(u_1, u_2) = 0$.

Demonstração. Tem-se

$$\mathcal{A}u_1 = \lambda_1 u_1, \quad \mathcal{A}u_2 = \lambda_2 u_2;$$

$$\lambda_1(u_1, u_2) = (\mathcal{A}u_1, u_2) = (u_1, \mathcal{A}u_2) = \lambda_2(u_1, u_2) \implies (\lambda_1 - \lambda_2)(u_1, u_2) = 0.$$

Já que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então $(u_1, u_2) = 0$. ■

Diz-se que o operador \mathcal{L} é **positivo** se $(\mathcal{L}u, u) > 0$.

Teorema 13. *(Sobre a positividade do operador de Sturm-Liouville)*

Se existe $q_0 \stackrel{\text{def}}{=} q_0[p_0, b - a, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, p(a), p(b)]$, $q(x) \geq q_0$, então o operador de Sturm-Liouville é positivo.

Demonstração. Na igualdade (3.16) faz-se $v = u$. Então

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}u, u) &= \int_a^b [p(x)u'^2(x) + q(x)u^2(x)] dx + \frac{\alpha_2}{\beta_2}p(b)u^2(b) - \frac{\alpha_1}{\beta_1}p(a)u^2(a) \geq \\ &\geq p_0 \int_a^b u'^2(x) dx + q_0 \int_a^b u^2(x) dx - \alpha p(b)u^2(b) - \beta p(a)u^2(a) \geq \\ &\geq p_0 \int_a^b u'^2 dx + q_0 \int_a^b u^2(x) dx - \alpha p(b) \left(\varepsilon \int_a^b u'^2(x) dx + c_\varepsilon \int_a^b u^2 dx \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\beta p(a) \left(\varepsilon \int_a^b u'^2 dx + c_\varepsilon \int_a^b u^2(x) dx \right) = \\
& = [p_0 - \alpha p(b)\varepsilon - \beta p(a)\varepsilon] \int_a^b u'^2(x) dx + \{q_0 - c_\varepsilon[\alpha p(b) + \beta p(a)]\} \int_a^b u^2(x) dx = \\
& = \{q_0 - c_\varepsilon[\alpha p(b) + \beta p(a)]\} \int_a^b u'^2(x) dx > 0,
\end{aligned}$$

se $q_0 > c_\varepsilon[\alpha p(b) + \beta p(a)]$. Aqui, $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p_0}{\alpha p(b) + \beta p(a)}$, $c_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{b-a} + \frac{1}{\varepsilon}$, $\frac{\alpha_1}{\beta_1} \stackrel{\text{def}}{=} \beta$, $\frac{\alpha_2}{\beta_2} \stackrel{\text{def}}{=} -\alpha$.

■

Fácilmente se vê que sendo \mathcal{A} positivo, então os seus valores próprios são positivos: $0 \leq (\mathcal{A}u, u) = \lambda(u, u) \implies \lambda \geq 0$. Na demonstração do teorema anterior usou-se o seguinte lema:

Lema 2. *Suponha-se que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe uma constante $c_\varepsilon \frac{1}{b-a} + \frac{1}{\varepsilon}$. Então é justa a desigualdade*

$$u^2(x_0) \leq \varepsilon \int_a^b u'^2(x) dx + c_\varepsilon \int_a^b u^2(x) dx, \quad \forall u \in C_{[a,b]}^1, \quad \forall x_0 \in [a, b].$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
u^2(x_0) &= u^2(x) + \int_x^{x_0} [u^2(y)]' dy = u^2(x) + \int_x^{x_0} 2u(y)u'(y) dy \leq \\
&\leq u^2(x) + \varepsilon \int_a^b u'^2(y) dy + \frac{1}{\varepsilon} \int_a^b u^2(y) dy.
\end{aligned}$$

Integrando esta desigualdade no intervalo $[a, b]$ obtém-se

$$(b-a)u^2(x_0) \leq \varepsilon(b-a) \int_a^b u'^2(x) dx + \left(1 + \frac{b-a}{\varepsilon}\right) \int_a^b u^2(x) dx. \quad (3.18)$$

Dividindo (3.18) por $b-a$ tem-se a desigualdade pretendida. ■

3.3 Séries de Fourier segundo suas funções próprias

Sejam

$$X_0(x), X_1(x), \dots, X_n(x), \dots, \quad x \in [a, b] \quad (3.19)$$

as funções próprias do problema de fronteira

$$\begin{cases} [p(x)X'(x)]' + q(x)X(x) = -\lambda X(x), \\ \alpha_1 X(a) + \beta_1 X'(a) = 0, \\ \alpha_2 X(b) + \beta_2 X'(b) = 0, \end{cases}$$

onde $p(x)$ e $q(x)$ são funções contínuas em $[a, b]$, $p(x)$ é positiva e admite derivada contínua de primeira ordem. Sem perder a sua essência, e de modo a tornar o cálculo mais simples, supõe-se que o sistema (3.19) é normado, isto é,

$$\int_a^b X_n^2(x) dx = 1.$$

Então, qualquer que seja a função $f(x)$ absolutamente integrável em $[a, b]$, pode-se compôr a série de Fourier

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n X_n(x), \quad (3.20)$$

onde

$$c_n \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(x) X_n(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

São justas as afirmações seguintes, que enunciaremos sem demonstrar [7], [8].

Teorema 14. *Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a, b]$, seccionávelmente diferenciável e que satisfaz as condições de fronteira*

$$\begin{cases} \alpha_1 f(a) + \beta_1 f'(a) = 0, \\ \alpha_2 f(b) + \beta_2 f'(b) = 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Então a série de Fourier (3.20) converge para $f(x)$ de modo absoluto e uniforme. ■

As condições (3.21) podem parecer "artificiais", mas recordando a origem do problema, e considerando $f(x)$ como o valor inicial de $u(x, t)$, isto é, $f(x) = u(x, 0)$, então as condições (3.2), para $t = 0$, conduzem à igualdade (3.21).

Seja $f(x)$ uma função seccionavelmente diferenciável (contínua ou descontínua). Então a série de Fourier para $f(x)$, segundo as funções próprias, converge em $[a, b]$ e a sua soma é igual à $f(x)$ em cada ponto de continuidade, ou é igual à $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ em cada ponto de descontinuidade.

Se o sistema de funções próprias (3.19) fôr completo, então tem lugar a igualdade de Parseval

$$\int_a^b f^2(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2.$$

Qualquer função contínua $F(x)$ pode aproximar-se em média através duma função $g(x) \in C_{[a,b]}^2$ [6], [8], [10], que satisfaz as condições de fronteira (pode-se, por exemplo, escolher $g(x)$ tal, que $g(a) = g(b) = g'(a) = g'(b) = 0$). Seja

$$\int_a^b [F(x) - g(x)]^2 dx < \varepsilon/4, \quad (3.22)$$

onde $\varepsilon > 0$. Pelo Teorema 13 a série de Fourier, segundo o sistema (3.19), converge para $g(x)$ uniformemente. Isto significa que existe um polinómio

$$P_n(x) = a_0 X_0(x) + a_1 X_1(x) + \dots + a_n X_n(x) \quad (3.23)$$

para o qual se cumpre a desigualdade

$$|g(x) - P_n(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{4(b-a)}}, \quad a \leq x \leq b.$$

Daqui conclui-se que

$$\int_a^b [g(x) - P_n(x)]^2 dx < \varepsilon/4. \quad (3.24)$$

Com base na desigualdade $(A+B)^2 \leq 2(A^2+B^2)$ de (3.22) e (3.24) implica

$$\int_a^b [F(x) - P_n(x)]^2 dx = \int_a^b [F(x) - g(x) + g(x) - P_n(x)]^2 dx \leq$$

$$\leq 2 \int_a^b [F(x) - g(x)]^2 dx + 2 \int_a^b [g(x) - P_n(x)]^2 dx < \varepsilon.$$

Deste modo demonstrou-se que qualquer função contínua $F(x)$ pode aproximar-se em média por um polinómio do tipo (3.23). O método de funções próprias conduz à solução do problema colocado no parágrafo 3.1, se as funções $f(x)$ e $g(x)$ decompõem-se em séries convergentes segundo o sistema de funções próprias e os coeficientes A_n e B_n , definidos em (3.14), garantem a convergência da série (3.11), que admite derivação termo a termo até à segunda ordem em relação às variáveis x e t . Além disso, independentemente do facto de se cumprirem ou não estas condições, quando o problema tem solução pode-se procurá-la na forma da série (3.11). Por outro lado, este método frequentemente conduz à função $u(x, t)$ que não é diferenciável em toda a região. Claro que não se pode considerar tal função como sendo a solução do problema, no sentido exacto. Este tipo de solução chama-se **solução generalizada** [12].

3.4 Oscilações livres numa corda

A equação matemática que descreve o processo de oscilação numa corda é

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}. \quad (3.25)$$

Conhecendo a forma e velocidade da corda no momento inicial $t = 0$, pede-se para deduzir a forma da corda em qualquer momento sabendo, por exemplo, que ela está fixa nos extremos $x = 0$ e $x = l$.

As condições de fronteira e iniciais, para este caso, são

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(l, t) = 0, \end{cases} \quad (3.26)$$

e

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x), \\ \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x) \end{cases} \quad (3.27)$$

respectivamente. Aplicando o método de funções próprias na resolução deste problema, procura-se a solução na forma [14]

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (x, t) \in [0, l] \times [0, +\infty). \quad (3.28)$$

Colocando (3.28) em (3.25) e dividindo tudo por $X(x)T(t) \neq 0$

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2$$

obtêm-se duas equações

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad (3.29)$$

$$T''(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0. \quad (3.30)$$

Colocando (3.28) em (3.26) tem-se

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (3.31)$$

Começa-se por resolver o problema (3.29), com as condições de fronteira (3.1.7). Compondo a equação característica vê-se que a solução geral tem a forma

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x. \quad (3.32)$$

Colocando (3.32) nas condições de fronteira (3.31) tem-se $c_1 \equiv 0$ e já que a solução não pode ser trivial impõe-se necessariamente que $c_2 \neq 0$, por exemplo $c_2 = 1$. A segunda condição de fronteira cumpre-se para os valores de λ que satisfazem a equação trigonométrica $\sin \lambda l = 0$. Resolvendo esta equação obtêm-se os valores de λ

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Deste modo para o valor próprio $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$ corresponde a função própria $X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$, $n = 1, 2, \dots$. Para $\lambda = \lambda_n$, a equação (3.30) tem a forma

$$T_n''(t) + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n(t) = 0,$$

cuja solução geral é

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{an\pi t}{l} + B_n \sin \frac{an\pi t}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Portanto, para $\lambda = \frac{n\pi}{l}$ a solução é

$$u_n(x, t) = \left(A_n \cos \frac{an\pi t}{l} + B_n \sin \frac{an\pi t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Procura-se a solução do problema (3.25), com as condições de fronteira (3.26), na forma da série

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{an\pi t}{l} + B_n \sin \frac{an\pi t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (3.33)$$

Exige-se a satisfação das condições iniciais (3.27). Assim,

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} = f(x),$$

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{an\pi}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} = g(x).$$

Pode-se ver que $f(x)$ e $g(x)$ se decompõem na série de Fourier segundo o sistema

$$\left\{ \sin \frac{n\pi x}{l} \right\}.$$

Os coeficientes de Fourier são

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (3.34)$$

e

$$B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l g(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (3.35)$$

Deste modo, a solução do problema é dada pela série (3.33), onde os coeficientes A_n e B_n se encontram segundo as fórmulas (3.34) e (3.35), respectivamente.

3.5 Oscilações radiais numa membrana circular

No sistema cartesiano o fenómeno de oscilação numa membrana é descrito pela equação

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial y^2} \right). \quad (3.36)$$

Como pretende-se fazer o estudo das oscilações radiais numa membrana circular, cujo o raio é igual à l , introduz-se o sistema de coordenadas polares

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

que transforma a equação (3.36) para a equação

$$\frac{\partial^2 u(r, \theta, t)}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u(r, \theta, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u(r, \theta, t)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u(r, \theta, t)}{\partial \theta^2} \right). \quad (3.37)$$

Como a oscilação é radial, então não há dependência do ângulo θ daí, que (3.37) toma uma forma mais reduzida

$$\frac{\partial^2 u(r, t)}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} \right). \quad (3.38)$$

Considera-se que a membrana está fixa na fronteira $r = l$, portanto a condição de fronteira é

$$u(l, t) = 0. \quad (3.39)$$

A forma e velocidade inicial da membrana, para $t = 0$, são descritas pelas condições iniciais

$$u(r, 0) = f(r)$$

e

$$\frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = g(r).$$

Aplicando o método de funções próprias procura-se a solução do problema (3.38) na forma

$$u(r, t) = R(r)T(t). \quad (3.40)$$

Colocando (3.40) em (3.38)

$$R(r)T''(t) = c^2 \left(R''(r)T(t) + \frac{1}{r} R'(r)T(t) \right) \quad (3.41)$$

e dividindo (3.41) por $R(r)T(t)$ obtém-se a relação

$$\frac{R''(r) + \frac{1}{r} R'(r)}{R(r)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = -\lambda^2. \quad (3.42)$$

Em conclusão, de (3.42) geram-se duas equações:

$$R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) + \lambda^2 R(r) = 0 \quad (3.43)$$

e

$$T''(t) + (c\lambda)^2 T(t) = 0. \quad (3.44)$$

É claro que $R(r)$ satisfaz a condição de fronteira

$$R(l) = 0. \quad (3.45)$$

Multiplicando (3.43) por r^2

$$r^2 R''(r) + rR'(r) + \lambda^2 r^2 R(r) = 0$$

vê-se que (3.43) é a equação de Euler-Bessel de índice $p = 0$ e parâmetro λ . O seu integral geral é

$$R(r) = c_1 J_0(\lambda r) + c_2 Y_0(\lambda r).$$

Como

$$Y_0(\lambda r) = \sqrt{\frac{2}{\lambda \pi r}} \sin\left(\lambda r - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\rho_0(\lambda r)}{\lambda r \sqrt{\lambda r}},$$

onde $\rho_0(\lambda r)$ é limitada, quando $r \rightarrow \infty$, vê-se que $Y_0(\lambda r)$ não é limitada na vizinhança de $r = 0$ daí, que coloca-se $c_2 \equiv 0$. De modo a ter-se uma solução não trivial, impõe-se que $c_1 \neq 0$, por exemplo $c_1 = 1$. Então, segundo a condição (3.2.12) tem-se

$$R(l) = J_0(\lambda l) = 0.$$

Resolvendo esta equação obtém-se

$$\mu_n = \lambda_n l \implies \lambda_n = \frac{\mu_n}{l},$$

onde μ_n é a n -ésima raiz positiva da função $J_0(\mu)$. Assim,

$$R_n(r) = J_0(\lambda_n r) = J_0\left(\frac{\mu_n}{l} r\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

A equação (3.44), para $\lambda = \lambda_n$, tem solução geral

$$T_n(t) = A_n \cos c\lambda_n t + B_n \sin c\lambda_n t, \quad n = 1, 2, \dots$$

Deste modo, a equação (3.38) tem soluções particulares que satisfazem (3.39), na forma

$$u_n(r, t) = (A_n \cos c\lambda_n t + B_n \sin c\lambda_n t) J_0(\lambda_n r), \quad n = 1, 2, \dots$$

Procura-se a solução do problema (3.38), que satisfaz a condição de fronteira (3.39), na forma da série

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos c\lambda_n t + B_n \sin c\lambda_n t) J_0(\lambda_n r). \quad (3.46)$$

É claro que exige-se o cumprimento das condições iniciais

$$u(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\lambda_n r) = f(r),$$

$$\left. \frac{\partial u(r, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n c\lambda_n J_0(\lambda_n r) = g(r).$$

As funções $f(r)$ e $g(r)$ decompõem-se na série de Fourier segundo o sistema $\{J_0(\lambda_n r)\}$. Os coeficientes de Fourier calculam-se pelas fórmulas

$$A_n = \frac{2}{l^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^l r f(r) J_0(\lambda_n r) dr, \quad (3.47)$$

$$B_n = \frac{2}{cl\mu_n J_1^2(\mu_n)} \int_0^l r g(r) J_0(\lambda_n r) dr. \quad (3.48)$$

Deste modo, a solução do problema é dada pela série (3.46), onde os coeficientes A_n e B_n calculam-se segundo as fórmulas (3.47) e (3.48), respectivamente.

3.6 Oscilação numa membrana rectangular

O fenómeno de oscilação livre numa membrana, no sistema cartesiano, é descrito pela equação

$$\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right). \quad (3.49)$$

Suponha-se que a membrana tem a forma dum rectângulo e o seu contorno é dado pelas desigualdades

$$0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b.$$

Se a membrana está fixa na fronteira, então as condições de fronteira são

$$\begin{cases} u(0, y, t) = 0, \\ u(a, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) = 0, \\ u(x, b, t) = 0. \end{cases} \quad (3.50)$$

A forma e velocidade inicial da membrana, para $t = 0$, são descritas segundo as condições iniciais

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = f(x, y), \\ \left. \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x, y). \end{cases} \quad (3.51)$$

Como se pode notar, a função $u(x, y, t)$ depende de três variáveis. Aplica-se o método de funções próprias, onde $u(x, y, t)$ procura-se na forma dum produto de duas funções, uma dependente de x e y e outra dependente só de t , isto é,

$$u(x, y, t) = \Phi(x, y)T(t). \quad (3.52)$$

Colocando (3.52) em (3.49)

$$\Phi(x, y)T''(t) = c^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} \right) T(t)$$

e dividindo tudo por $\Phi(x, y)T(t)$ obtém-se

$$\frac{\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2}}{\Phi(x, y)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = -\lambda^2,$$

portanto

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} + \lambda^2 \Phi(x, y) = 0, \quad (3.53)$$

$$T''(t) + c^2 \lambda^2 T(t) = 0. \quad (3.54)$$

É fácil verificar que a função $\Phi(x, y)$ satisfaz a condição de fronteira

$$\Phi(0, y) = 0, \quad \Phi(a, y) = 0, \quad \Phi(x, 0) = 0, \quad \Phi(x, b) = 0. \quad (3.55)$$

Procura-se a solução de (3.53), que satisfaz (3.55), na forma

$$\Phi(x, y) = X(x)Y(y). \quad (3.56)$$

Colocando (3.56) em (3.53)

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) + \lambda^2 X(x)Y(y) = 0$$

e dividindo tudo por $X(x)Y(y)$ obtém-se

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y) + \lambda^2 Y(y)}{Y(y)} = -k^2$$

donde tira-se

$$X''(x) + k^2 X(x) = 0, \quad (3.57)$$

$$Y''(y) + l^2 Y(y) = 0, \quad (3.58)$$

onde

$$l^2 = \lambda^2 - k^2. \quad (3.59)$$

As equações (3.57) e (3.58) têm soluções gerais

$$X(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx, \quad (3.60)$$

$$Y(y) = c_3 \cos ly + c_4 \sin ly. \quad (3.61)$$

Voltando para as condições de fronteira verifica-se que

$$X(0) = 0, \quad X(a) = 0, \quad (3.62)$$

$$Y(0) = 0, \quad Y(b) = 0. \quad (3.63)$$

Os coeficientes c_1 e c_2 de (3.60) procuram-se utilizando as condições (3.62). Assim $c_1 \equiv 0$, $c_2 \neq 0$, por exemplo $c_2 = 1$. Portanto $X(x) = \sin kx$ e tendo em conta, que

$$X(a) = \sin ka = 0$$

obtem-se

$$k_m = \frac{m\pi}{a}, \quad m = 1, 2, \dots$$

De modo análogo, para definir-se c_2 e c_3 de (3.61) utilizam-se as condições (3.63). Tem-se que $Y(0) = c_3 = 0$, portanto $c_4 \neq 0$, por exemplo $c_4 = 1$. Assim, $Y(y) = \sin ly$. Considerando, que

$$Y(b) = \sin lb = 0$$

e resolvendo esta equação trigonométrica acha-se

$$l_n = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Deste modo, para o valor próprio $k_m = \frac{m\pi}{a}$ corresponde a função própria $X_m(x) = \sin \frac{m\pi x}{a}$ e para o valor $l_n = \frac{n\pi}{b}$ corresponde a função própria $Y_n(y) = \sin \frac{n\pi y}{b}$. Não se teve em conta os valores de m e n negativos, pois eles dão, com exactidão até um factor constante, as mesmas funções próprias. Tendo em consideração (3.56) e (3.59), para

$$\lambda = \lambda_{mn} = \sqrt{k_m^2 + l_n^2} = \pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}},$$

a equação (3.53) tem soluções particulares que satisfazem a condição na fronteira:

$$\Phi_{mn}(x, y) = X_m(x)Y_n(y) = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Para cada $\lambda = \lambda_{mn}$ resolve-se a equação (3.54) e obtem-se

$$T_{mn}(t) = A_{mn} \cos c\lambda_{mn}t + B_{mn} \sin c\lambda_{mn}t, \quad m, n = 1, 2, \dots$$

Portanto, as funções

$$u_{mn}(x, y, t) = (A_{mn} \cos c\lambda_{mn}t + B_{mn} \sin c\lambda_{mn}t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad m, n = 1, 2, \dots,$$

são soluções particulares da equação (3.49), que satisfazem a condição de fronteira (3.50). A solução será apresentada na forma duma série dupla

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{mn} \cos c\lambda_{mn}t + B_{mn} \sin c\lambda_{mn}t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (3.64)$$

que para satisfazer as condições iniciais (3.51) exige-se o seguinte:

$$u(x, y, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = f(x, y),$$

$$\left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} c \lambda_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = g(x, y).$$

As funções $f(x, y)$ e $g(x, y)$ decompõem-se nas séries duplas de Fourier segundo o sistema

$$\left\{ \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right\}.$$

Então os coeficientes A_{mn} e B_{mn} calculam-se do seguinte modo:

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (3.65)$$

e

$$B_{mn} = \frac{4}{c \lambda_{mn} ab} \int_0^a \int_0^b g(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (3.66)$$

Deste modo a solução do problema (3.49) é dada pela série (3.64), cujos coeficientes se calculam segundo as fórmulas (3.65) e (3.66).

3.7 Transmissão de calor num condutor

O fenómeno de transmissão de calor é descrito pela equação

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}. \quad (3.67)$$

Suponha-se que o condutor tem extremos $x = 0$ e $x = l$ e suponha-se, também, que na fronteira a temperatura é igual à zero, isto é,

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

e a condição inicial, para $t = 0$, é

$$u(x, 0) = f(x).$$

Aplicando o método de funções próprias procuram-se as soluções particulares do problema (3.67) na forma

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (3.68)$$

Colocando (3.68) em (3.67)

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

e dividindo tudo por $X(x)T(t)$ tem-se

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2.$$

Daqui tiram-se duas equações

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad (3.69)$$

$$T'(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0. \quad (3.70)$$

Da equação (3.69) tem-se

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x.$$

De acordo com as condições de fronteira $X(0) = c_1 \equiv 0$, portanto $c_2 \neq 0$, por exemplo $c_2 = 1$.

Assim,

$$X(l) = \sin \lambda l = 0$$

e resolvendo esta equação tem-se que os valores de λ são

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Para o valor próprio $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$ corresponde a função própria $X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$, $n = 1, 2, \dots$

Para $\lambda = \lambda_n$, a solução da equação (3.70) é

$$T_n(t) = A_n e^{-\frac{n^2 a^2 \pi^2 t}{l^2}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Deste modo as funções

$$u_n(x, t) = A_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\frac{n^2 a^2 \pi^2 t}{l^2}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

representam as soluções particulares de (3.67) que satisfazem as condições de fronteira. Então, a solução de (3.67) poderá ser apresentada na forma duma série

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{-\frac{n^2 a^2 \pi^2 t}{l^2}} \quad (3.71)$$

e devido à condição inicial tem-se

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} = f(x).$$

Pode-se ver que $f(x)$ é a decomposição na série de Fourier segundo o sistema

$$\left\{ \sin \frac{n\pi x}{l} \right\}.$$

Os coeficientes de Fourier são

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.72)$$

Assim, a solução do problema (3.67) é dada pela série (3.71), onde os coeficientes A_n se encontram segundo a fórmula (3.72).

Conclusão

Este trabalho teve, como objectivo geral, o intuito de introduzir os alunos, dos cursos de Engenharia, na teoria das séries trigonométricas de Fourier, dando algumas noções básicas sobre sistemas ortogonais e mostrando, também, como esta teoria se aplica na resolução de problemas concretos.

Como objectivo específico, estudou-se o integral do núcleo de Vallée Poussin e obteve-se uma avaliação melhorada do tipo $\frac{4}{\pi^2} \ln \left(1 + \frac{n}{k} \right) + 1.7$. Ao estudar-se o método de funções próprias demonstrou-se, de um modo diferente do habitual, a positividade do operador de Sturm-Liouville.

Bibliografia

- [1] M. J. Alves, *Elementos de Análise Matemática. Parte I*, UEM, Maputo, 2000.
- [2] M. J. Alves, *Elementos de Análise Matemática. Parte II*, UEM, Maputo (por publicar).
- [3] R. V. Churchill, *Fourier Series and Boundary Value Problems*, McGraw-Hill, New York, 1963.
- [4] H. F. Davis, *Fourier Series and Orthogonal Functions*, Allyn and Bacon, Boston, 1963.
- [5] K. M. Heal, M. L. Hansen, and K. M. Rickard, *Maple V: Learning Guide*, Waterloo Maple, Advancing Mathematics, Springer, New York, 1998.
- [6] V. Hutson, and J. Pym, *Applications of Functional Analysis and Operator Theory*, Academic Press, London, 1980.
- [7] D. Jackson, *Séries de Fourier e Polinómios Ortogonais*, Nauka, Moscovo, 1948.
- [8] A. N. Kolmogorov, and C. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, Dover Pubns, 1999.
- [9] L. A. Lusternik, and V. J. Sobolev, *Elements of Functional Analysis*, Gordon & Science Pub., London, 1962.
- [10] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, Inc., Singapore, 1991.
- [11] E. C. Titchmarsh, *The Theory of Functions*, Oxford Press, 1939.
- [12] G. P. Tolstov, *Fourier Series*, Prentice-Hall, New Jersey, 1962.

- [13] G. N. Watson, *Teoria das Funções de Bessel*, Nauka, Moscovo, 1949.
- [14] H. F. Weinberger, *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales*, Reverté, Barcelona, 1970.

Índice remissivo

- Bessel 13
- Cantor 25
- Cesàro 22
- Condição
 - de convergência uniforme 22
 - de fronteira 40, 50
 - inicial 41, 50
- Convergência
 - fraca 10
 - em média 10
 - pontual 20
 - uniforme 20, 24, 49
 - somas de Cesàro 24
- Coordenadas polares 53
- Critério
 - d'Alembert 31
- Desigualdade
 - de Bessel 13, 21
 - de Cauchy-Bunikovskiĭ 9, 11, 38
 - de Tshebishëv 37
- Dini 19
 - condição de Dini 19
- Dirichlet 18
 - integral de Dirichlet 18
 - núcleo de Dirichlet 18
- Equação
 - de Euler-Bessel 30, 54
- Espaço
 - euclidiano 9
 - real 9
- Fejér 23
- Fourier 12
 - coeficiente de Fourier 12, 27, 55
- Funções
 - de Bessel 29, 30
 - de Bessel de primeira espécie 30, 32
 - equivalentes 11
 - gamma 29
 - ortogonais 10
 - próprias 42
 - seccionávelmente contínua 22
 - uniformemente contínua 25
- Igualdade
 - de Parseval 13
- Integral

- de Euler de segunda espécie 29
- geral 54
- de Poisson 30
- Liouville 44
- Método
 - de funções próprias 40
- Norma 11
- Núcleo
 - de Dirichlet 33
 - de Fejér 23, 33
 - propriedades do núcleo de Fejér 23
 - de Vallée Poussin
- Operador
 - simétrico 44
 - de Sturm-Liouville 44
- Oscilação
 - duma corda 50
 - radial 52
- Parseval 13
- Poisson 30
- Problema
 - de fronteira 42
 - de Sturm-Liouville 44
 - de transmissão de calor 40
 - de oscilação duma corda 40
- Produto escalar 9, 11
- Série
 - de Fourier 12, 14, 49
 - dupla de Fourier 27, 59
 - funcional 20
- Sistema
 - completo 13
 - linearmente independente 10
 - ortogonal 26
 - ortonormado 12, 15
 - trigonométrico fundamental 27
- Solução
 - generalizada 50
 - particular 58
- Soma
 - de Cesàro 22
 - parcial 12, 22
 - Vallée Poussin
- Sturm 44
- Transmissão de calor 59
- Tshebishëv 36
- Valor próprio 42
- Weierstrass 20
 - critério de Weierstrass 20
- Wronski 45
- Wronskiano 45

Anexos

> ANEXO I

> Dada a funcao $f=1$, no intervalo $[0, \pi]$, decompor na serie de Fourier segundo o sistema trigonometrico $\sin(kx)$ (aproximar ate $k=5$).

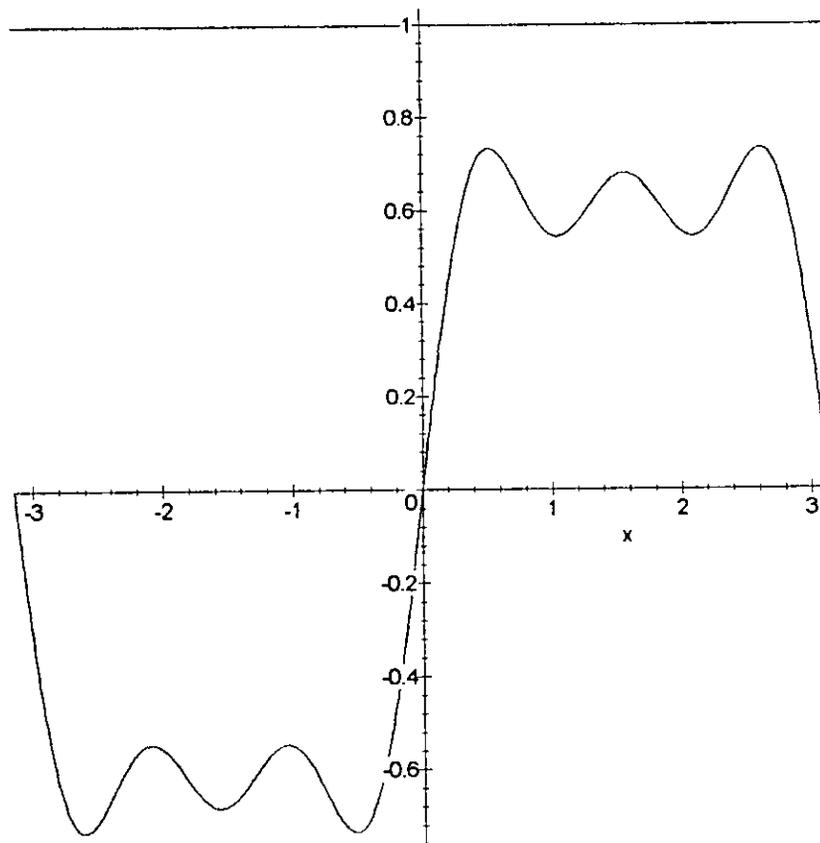
> $f:=x \rightarrow 1$;

$f:=1$

> $g := x \rightarrow (\pi/4) * (\sin(x) + \sin(3*x)/3 + \sin(5*x)/5)$;

$$g := x \rightarrow \frac{1}{4} \pi \left(\sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) \right)$$

> $\text{plot}([f(x), g(x)], x=-\pi.. \pi)$;



> A funcao $f(x)=1$ esta a vermelho, a decomposicao de $f(x)$, com aproximacao $k=5$, isto e' a funcao $g(x)$ esta a verde.

> ANEXO II

> Dada a funcao $f=x$, no intervalo $[-\pi, \pi]$, decompor na serie de Fourier segundo o sistema trigonometrico $\sin(kx)$ (aproximar ate $k=3$).

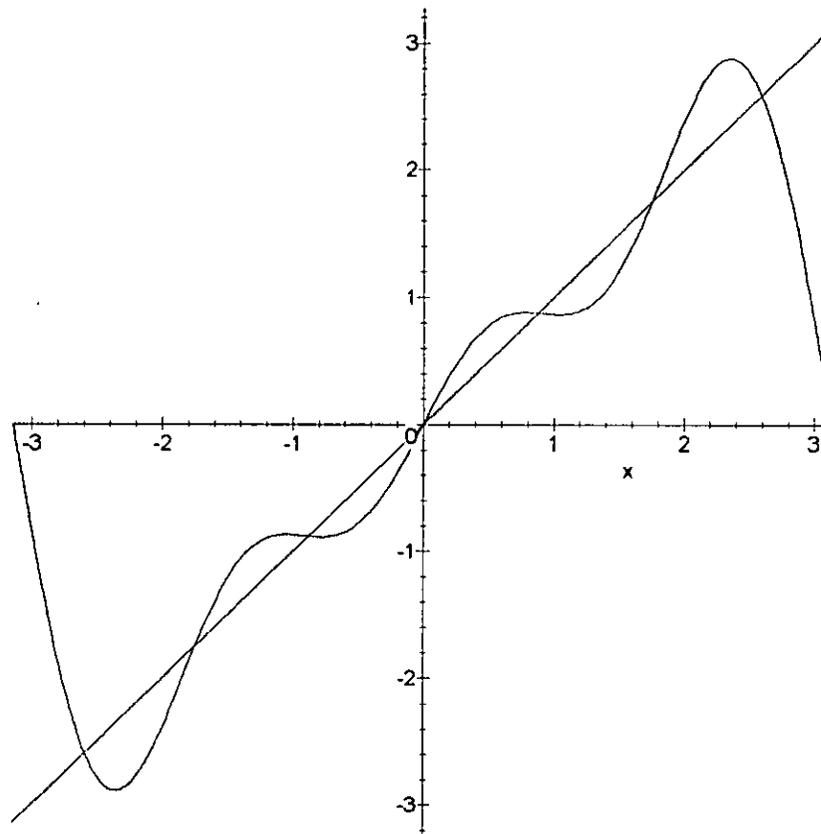
> $f:=x \rightarrow x$;

$$f:=x \rightarrow x$$

> $g := x \rightarrow 2 * (\sin(x) - \sin(2*x)/2 + \sin(3*x)/3)$;

$$g := x \rightarrow 2 \sin(x) - \sin(2x) + \frac{2}{3} \sin(3x)$$

> $\text{plot}([f(x), g(x)], x=-\pi.. \pi)$;

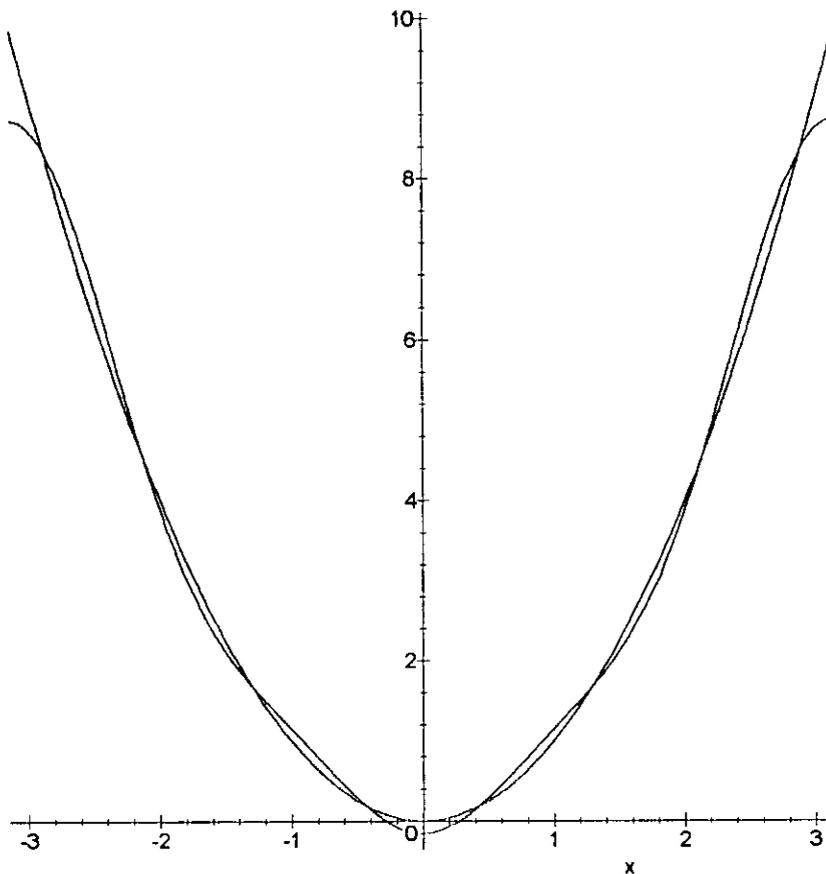


> A funcao $f(x)=x$ esta a vermelho, a decomposicao de $f(x)$, com aproximacao $k=3$, isto e' a funcao $g(x)$ esta a verde.

```

> ANEXO III
> Dada a funcao f=x^2, no intervalo [-Pi,Pi] decompor na serie de
  Fourier segundo o sistema trigonometrico fundamental (aproximar
  ate k=4).
> f:=x->x^2;
> g :=x->Pi^2/3-4*(cos(x)-cos(2*x)/4+cos(3*x)/9);
      g:=x -> 1/3 pi^2 - 4 cos(x) + cos(2 x) - 4/9 cos(3 x)
> plot([f(x),g(x)], x=-Pi..Pi);

```



```

> A funcao f(x)=x^2 esta a vermelho, a decomposicao de f(x), com
  aproximacao k=4, isto e' a funcao g(x) esta a verde

```

> ANEXO IV

> Dada a funcao $f = -\ln|2 \sin(x/2)|$, no intervalo $[0, \pi]$, decompor na serie de Fourier segundo o sistema trigonometrico $\cos(kx)$ (aproximar ate $k=3$)

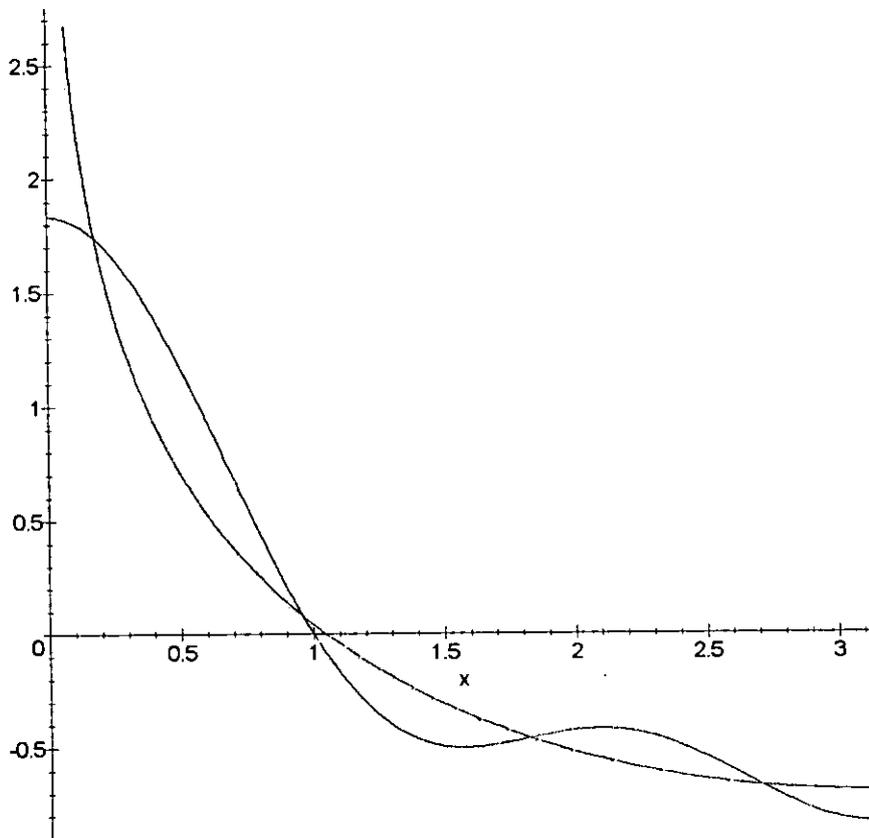
> $f := x \rightarrow -\ln(\text{abs}(2 * \sin(x/2)))$;

$$f := x \rightarrow -\ln\left(\left|2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right|\right)$$

> $g := x \rightarrow \cos(x) + \cos(2*x)/2 + \cos(3*x)/3$;

$$g := x \rightarrow \cos(x) + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{3} \cos(3x)$$

> $\text{plot}([f(x), g(x)], x=0..Pi)$;



> A funcao $f(x) = -\ln|2 \sin(x/2)|$ esta a vermelho, a decomposicao de $f(x)$, com aproximacao $k=3$, isto e' a funcao $g(x)$ esta a verde.

```
[ > ANEXO V
```

```
[ > Dada a funcao f(x,y)=xy, no quadrado [0,2*Pi]*[0,2*Pi], decompor  
na serie dupla de Fourier, segundo o sistema trigonometrico  
fundamental (aproximar ate m=2, n=2)
```

```
[ > f:=(x,y)-> x*y;
```

$$f:=(x,y) \rightarrow xy$$

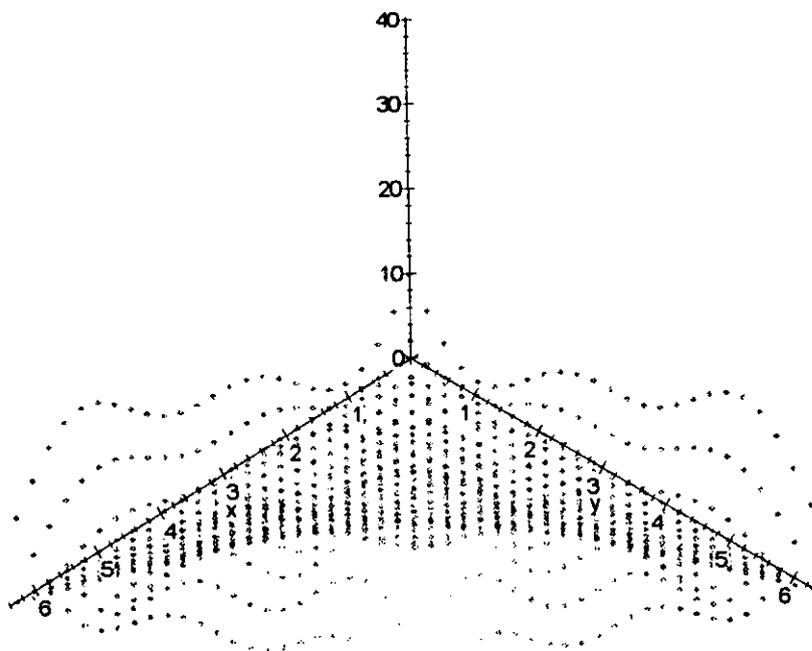
```
[ > g:=(x,y)->
```

```
Pi^2-2*Pi*(sin(x)+sin(2*x)/2+sin(y)+sin(2*y)/2)+4*(sin(x)*sin(y)  
+sin(2*x)*sin(y)/2+sin(x)*sin(2*y)/2+sin(2*x)*sin(2*y)/4);
```

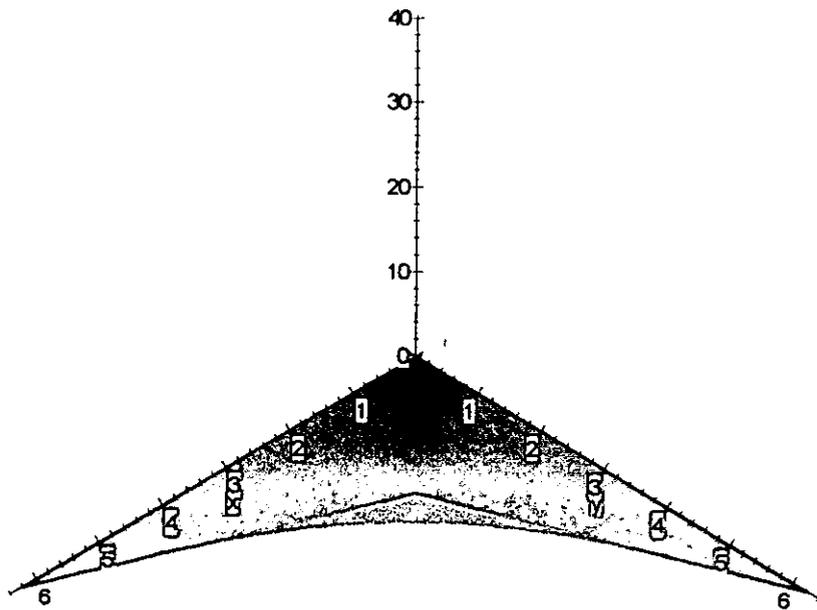
$$g:=(x,y) \rightarrow \pi^2 - 2\pi \left(\sin(x) + \frac{1}{2} \sin(2x) + \sin(y) + \frac{1}{2} \sin(2y) \right) + 4 \sin(x) \sin(y)$$

$$+ 2 \sin(2x) \sin(y) + 2 \sin(x) \sin(2y) + \sin(2x) \sin(2y)$$

```
[ > plot3d({g(x,y),f(x,y)}, x=0..2*Pi, y=0..2*Pi);
```



```
[ > plot3d(f(x,y), x=0..2*Pi, y=0..2*Pi);
```



```
> plot3d(g(x,y), x=0..2*Pi, y=0..2*Pi);
```

