

Universidade Eduardo Mondlane  
Faculdade de Ciências  
Departamento de Matemática e Informática  
Curso de Licenciatura em Informática



Trabalho de Licenciatura

Tema:

**SOBRE A CONSTRUÇÃO APROXIMADA  
DA MATRIZ DE CAUCHY PARA  
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS**

Autor: Roberto Arnaldo Nhamunue

Supervisor: Prof. Doutor João Sebastião Paulo Munembe

Maputo, Julho de 2006

MT-13



Declaração sob compromisso de honra

Declaro, por minha honra, que este trabalho é fruto da minha investigação pessoal e que nunca foi usado para obtenção de qualquer grau acadêmico.

*Roberto Arnaldo Nhamunue*

Roberto Arnaldo Nhamunue

BIBLIOTECA UFRJ	
Nº 10.714	
DATA 18-8-2006	
EMP. 2006	
MT-13	

# ÍNDICE

Agradecimentos . . . . .	5
Dedicatória . . . . .	6
Introdução . . . . .	7
Simbologia usada . . . . .	9
<b>1 Elementos de Análise Funcional</b> . . . . .	<b>10</b>
1.1 Introdução . . . . .	10
1.2 Conceitos básicos . . . . .	10
1.3 Espaços métricos . . . . .	11
1.3.1 Noções topológicas em espaços métricos . . . . .	13
1.4 Espaços lineares . . . . .	17
1.5 Espaços normados . . . . .	21
1.6 Espaços com medida . . . . .	22
1.7 Funções somáveis . . . . .	23
1.8 Funções absolutamente contínuas . . . . .	27
<b>2 Funcionais e Operadores Lineares</b> . . . . .	<b>29</b>
2.1 Funcionais lineares . . . . .	29
2.2 Operadores lineares . . . . .	30
2.2.1 Operadores contínuos e locais . . . . .	30
2.2.2 Exemplos de operadores lineares . . . . .	31
2.2.3 Operadores limitados . . . . .	32
2.2.4 Espaço de operadores lineares . . . . .	33
2.2.5 Operador inverso . . . . .	36
2.3 Operadores de contracção . . . . .	38
2.4 Equações integrais . . . . .	43
<b>3 Equações diferenciais funcionais</b> . . . . .	<b>49</b>
3.1 Introdução . . . . .	49
3.2 Noções básicas . . . . .	49
3.2.1 Classificação das EDF . . . . .	51
3.2.2 Exemplos de EDF . . . . .	52
3.3 Equações lineares e problemas lineares de fronteira . . . . .	53
3.4 Existência e unicidade de soluções . . . . .	56
3.5 Operador de Green . . . . .	57

4	Resolvente. Construção aproximada	59
4.1	Construção do resolvente $\tilde{R}(t, s)$ do núcleo $\tilde{K}(t, s)$ . . . . .	60
4.2	Avaliação do erro . . . . .	63
5	Construção aproximada da Matriz de Cauchy	66
5.1	Equações com argumento desviado . . . . .	66
5.2	Matriz de Cauchy. Construção aproximada e avaliação do erro . . . . .	72
5.3	Programa para a construção aproximada da matriz de Cauchy . . . . .	78
5.4	Exemplos de construção aproximada da Matriz de Cauchy . . . . .	81
	Conclusões e recomendações	85
	Bibliografia	86
	Índice alfabético	88
	Anexos	90

## AGRADECIMENTOS

Agradeço, em especial, aos meus familiares e à minha namorada que nunca deixaram de me prestar apoio moral durante a realização deste trabalho e à minha família que sempre prestou todo tipo de apoio na minha vida estudantil.

Eterna gratidão vai para o meu tutor e Supervisor, Prof. Doutor João Sebastião Paulo Mune-mbe, pelo apoio inenunciável que me deu durante a realização deste trabalho e durante o decurso do meu curso.

Deixo também, especial gratidão aos meus amigos e colegas Óscar, Abel, Andela, Capece, Hélder Langa, Patrício, Samo Juma, Vicente, Vicente Mondlane, Líguene, Manhenje, Dimaca, Nhampalele, Nhavoto, Penicela, Delcinho, Rato, Célio, Nando, Alito e os demais que, directa ou indirectamente, apoiaram a realização deste trabalho.

Aos docentes e funcionários do DMI vai um abraço pela paciência que têm tido comigo na realização do curso.

## DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus irmãos Arlindo, Auselmo, Hugo, Henriques, Anatórcia, Lourenço, Teresa e Menaldo, à minha mãe Zaida Manhiça, ao meu avô Arnaldo, ao meu tio Maurício e, em especial, ao meu pai Constantino Nhammte que me mostrou o caminho da ciência.

# INTRODUÇÃO

A descrição detalhada e investigação de diferentes fenômenos naturais que ocorrem em diferentes áreas da Física moderna, Biologia, Economia, Medicina, Ecologia, entre outras, é feita considerando a pré-história (passado) do processo em causa e, em certos casos, o estado do fenômeno no futuro. Os modelos matemáticos mais adequados para o estudo destes fenômenos são descritos através de equações diferenciais funcionais (EDF). As EDF constituem um modelo matemático que permite considerar diferentes propriedades características de um problema real aplicado.

Na resolução de problemas concretos aplicados usando métodos computacionais da Análise Numérica, torna-se difícil verificar os critérios teóricos que estabelecem a resolubilidade de um problema. Esta limitação remete-nos à ideia do uso de sistemas modernos de computação para a verificação dos critérios.

As limitações dos métodos numéricos tradicionais e os respectivos programas criam condições para a colocação da questão sobre a investigação construtiva, baseada em métodos de investigação, orientados para o uso de sistemas modernos de computação e na obtenção de resultados demonstrativos sobre a existência e propriedades das soluções dos problemas em estudo. Estes métodos são chamados construtivos (computer-assisted methods).

É de salientar que, na resolução de problemas usando métodos numéricos tradicionais, muitas vezes, não é possível obter a avaliação da exactidão da solução obtida. Na investigação construtiva pode-se construir a avaliação a posteriori da qualidade do resultado obtido. Entre os trabalhos que, de um modo significativo contribuíram para o desenvolvimento da área construtiva de investigação podemos realçar os trabalhos de E.W. Kaucher[20], W.L. Miranker[20], R.E. Moor[19], M. Plum[22], R.J. Lohner[21], S.K. Goudunov[18], B.S. Dobronets[17] e Babenko. As possibilidades de investigação construtiva de problemas para EDF surgiram somente nos últimos 20-30 anos. Com base na teoria geral de EDF, V.P. Maksimov[2] e A.N. Rumyantsev conceberam métodos construtivos de investigação aplicáveis a várias classes de problemas de fronteira para as EDF. J.S.P. Munembe[1] concebeu métodos de investigação construtiva de propriedades assintóticas das soluções de EDF com parâmetros periódicos.

No estudo das soluções de EDF, vai-se dar particular destaque às EDF lineares, nomeadamente as que possuem retardamento concentrado. A solução de uma EDF com retardamento concentrado pode, facilmente, ser representada por meio de uma equação integral. O método exposto neste trabalho, para determinar a equação integral correspondente, tem como centro a matriz de Cauchy<sup>1</sup>, que é a base para a obtenção da solução de uma EDF, neste caso, do problema de Cauchy em causa.

## OBJECTIVOS GERAIS

- Fazer uma abordagem, de forma simples, sobre soluções aproximadas de equações diferenciais com argumento retardado;
- Fazer um estudo, de modo pedagógico e metodológico, sobre a teoria de funcionais e operadores contínuos e lineares, assim como do operador inverso;

---

<sup>1</sup>Augustin Louis Cauchy(1789-1857)-matemático francês

- Abordar a questão sobre a construção do resolvente para equações integrais e a sua aplicação na construção da matriz de Cauchy.

## OBJECTIVOS ESPECÍFICOS

- Demonstração, de forma rigorosa, do teorema sobre a avaliação do erro da matriz de Cauchy aproximada para o caso  $n = 1$  e do teorema sobre a avaliação do erro da matriz de Cauchy aproximada para qualquer  $n$ ;
- Concepção de um programa de construção da matriz aproximada de Cauchy com precisão garantida.

## METODOLOGIA

Para atingir estes objectivos, faremos:

- Uso da teoria de Análise Funcional, Equações Integrais, Análise Matemática e da teoria abstracta das equações diferenciais funcionais;
- Exploração da aplicação informática Maple, na sua versão 8, para o cálculo numérico;
- A redacção final da tese foi feita usando o *Latex 2 $\epsilon$*  com o apoio do editor WinEdt.

Tratando-se de cálculo aproximado, ser-nos-ão úteis alguns conhecimentos de Análise Funcional que envolvem as noções de métrica, convergência e alguns teoremas sobre operadores lineares, especialmente o teorema sobre o operador inverso. Na abordagem da Análise Funcional, ter-se-á maior atenção em demonstrar os teoremas de maior interesse para o trabalho a desenvolver, deixando alguns teoremas sem demonstração na forma de proposições. Porém, serão referenciadas fontes bibliográficas para aqueles que tenham interesse em conhecer a sua demonstração. No final, apresentar-se-á o código do programa construtivo matriz de Cauchy e, em anexo, um exemplo do funcionamento do programa.



## Simbologia usada

$\simeq$  "é isomorfo a"

$\stackrel{def}{=}$  "igual por definição"

■ - denota o fim de uma demonstração

□ - denota o fim de uma definição e sua explicação

$\mathbb{R}^{n \times n}$  - Espaço de  $n \times n$ -matrizes reais  $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$  com a norma  $\|\cdot\|$

$\mathbb{R}^n$  - espaço  $n$ -dimensional de vectores reais com a norma  $|\cdot|$

$E$  - espaço métrico arbitrário

$L^n = L^n[0, T]$  - espaço de funções somáveis  $z : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  com a norma

$$\|z\|_{L^n[0, T]} \stackrel{def}{=} \int_0^T |z(t)| dt$$

$D^n = D^n[0, T]$  - espaço de funções absolutamente contínuas  $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  com a norma

$$\|x\|_{D^n} \stackrel{def}{=} \|x\|_{L^n} + |x(0)|$$

$C = C[0, T]$  - espaço de funções contínuas  $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  com a norma

$$\|x\|_C \stackrel{def}{=} \max_{0 \leq t \leq T} |x(t)|$$

# Capítulo 1

## Elementos de Análise Funcional

### 1.1 Introdução

A Análise Funcional [5] é um ramo da Matemática Moderna relativamente novo que surgiu no início do século XX como consequência da fusão de vários conceitos e ideias de outras áreas matemáticas tais como a Análise Matemática, a Álgebra e a Geometria. Caracterizando-se por uma enorme abstracção, ela aborda os problemas da matemática clássica de um modo muito generalizado, permitindo, deste modo, que as diversas áreas da matemática possam, com sucesso, derivar diversas soluções para problemas específicos. É, praticamente, impossível pensar em problemas de Física, equações diferenciais e cálculo aproximado sem passar pela Análise Funcional.

Os espaços métricos trazem-nos a ideia de distância entre dois elementos quaisquer de um dado conjunto. Explorou-se essa ideia até à concepção de uma nova noção - o limite. A definição de convergência num dado espaço métrico facilita o desenvolvimento do cálculo aproximado à medida que só se pode falar em aproximação se se tiver a noção de distância. Por sua vez, os espaços normados apresentam a medida de um dado elemento de um conjunto permitindo-nos a sua comparação com outros do mesmo conjunto. Os espaços de Banach são dos mais importantes pois possuem propriedades adequadas ao cálculo aproximado. Generalizamos o conceito de função introduzindo o operador, que actua sobre espaços lineares e normados. Os operadores lineares e limitados, com as suas propriedades de continuidade e invertibilidade são os mais destacados neste capítulo[5][6][7][8][11][14].

### 1.2 Conceitos básicos

Chamaremos **conjunto de partes** de  $X$  ou **sistema de conjuntos** de  $X$  a um conjunto formado por todos os subconjuntos do conjunto  $X$ .

**Definição 1.2.1** Um sistema não-vazio de conjuntos  $\mathcal{R}$  se chama **anel** se, de  $A \in \mathcal{R}$   $B \in \mathcal{R}$  se deduz

$$A \Delta B \in \mathcal{R} \quad \text{e} \quad A \cap B \in \mathcal{R}$$

Facilmente se pode verificar que  $A \cup B \in \mathcal{R}$  e  $A \setminus B \in \mathcal{R}$

**Observação 1.2.1** Todo o anel contém  $\emptyset$ .

**Observação 1.2.2** O sistema que contém apenas o conjunto vazio representa o menor anel possível de conjuntos.

Um conjunto  $E$  se chama **unidade** do sistema de conjuntos  $\mathcal{R}$  se pertence a  $\mathcal{R}$  e se, para qualquer  $A \in \mathcal{R}$  se verifica

$$A \cap E = A$$

Um anel de conjuntos que contém unidade é denominado **álgebra de conjuntos**.

**Exemplo 1.2.1** Para qualquer conjunto  $A$ , o sistema  $\mathcal{R}(A)$ , de todos os seus subconjuntos representa uma álgebra de conjuntos com unidade  $E = A$ .

**Exemplo 1.2.2** Para qualquer conjunto não-vazio  $A$ , o sistema  $\{\emptyset, A\}$  representa uma álgebra de conjuntos com unidade  $E = A$ .

**Exemplo 1.2.3** O sistema de todos os subconjuntos limitados  $A$ , da recta numérica, é um anel de conjuntos sem unidade.

**Definição 1.2.2** O sistema de conjuntos  $\mathcal{R}$  se chama **semi-anel** se

1. contém  $\emptyset$
2. está fechado em relação à operação de intersecção
3. se  $A \in \mathcal{R}$  e  $A_1 \subset A, A_1 \in \mathcal{R}$ , se pode representar  $A$  na forma

$$A = \bigcup_{k=1}^n A_k$$

onde  $A_k$  são conjuntos de  $\mathcal{R}$  disjuntos dois a dois.

Se, na condição 3.,  $n$  puder tomar o valor infinito, o semi-anel toma o nome de  $\sigma$ -álgebra.

### 1.3 Espaços métricos

**Definição 1.3.1** Chama-se **espaço métrico** ao conjunto  $E$  de elementos (também chamados *pontos*)  $x, y, z, \dots$  ao qual é associado um número real  $d(x, y)$  denominado **métrica** (ou **distância**), que possui as seguintes propriedades (axiomas da métrica):

$\forall x, y, z \in E$

1.  $d(x, y) = d(y, x)$
2.  $d(x, y) \geq 0$  e  $d(x, y) = 0$  se e somente se  $x = y$
3.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (desigualdade triangular)

As condições acima listadas estão de acordo com o conceito habitual de distância.

- A distância:

- nunca é negativa;
- só pode ser igual a zero se os pontos forem coincidentes:

- a distância de um ponto  $x$  a um ponto  $y$  é igual à distância de  $y$  para  $x$ .

A desigualdade triangular expressa em (3) é análoga à proposição euclidiana de que um lado de um triângulo não pode ser superior à soma dos outros dois.

Portanto, o par  $(E, d)$  denota um espaço métrico, constituído por elementos (pontos) do conjunto  $E$  e a métrica  $d$  introduzida neste conjunto.

A existência de uma distância permite-nos definir a noção de limite num espaço métrico.

**Definição 1.3.2** Seja dado um espaço métrico  $(E, d)$  e uma sucessão  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  onde  $x_n \in E, \forall n \in \mathbb{N}$ . Diz-se que  $x_n \rightarrow x$  ( $x_n$  converge para  $x$ ) ou

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : d(x, x_k) \leq \varepsilon \quad \forall k > N$$

**Teorema 1.3.1** O limite de uma sucessão convergente é único.

**Demonstração.** Para provar esta asserção, tomemos  $x_n \rightarrow x$  e  $x_n \rightarrow y$ , onde  $x \neq y$ . Da desigualdade triangular podemos obter  $d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y)$ . Porém, o segundo membro desta desigualdade tende para zero quando  $n \rightarrow \infty$  enquanto que o primeiro membro é não-negativo. Consequentemente  $d(x, y) = 0$  e  $x = y$ . ■

**Teorema 1.3.2** Para  $\forall x, y, z, u \in E$ , cumpre-se a seguinte desigualdade:

$$|d(x, y) - d(z, u)| \leq d(x, z) + d(y, u) \quad (1.1)$$

**Demonstração.** Do axioma de desigualdade triangular teremos

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \leq d(x, z) + d(z, u) + d(u, y)$$

e, segue que

$$d(x, y) - d(z, u) \leq d(x, z) + d(y, u) \quad (1.2)$$

Nesta desigualdade, podemos trocar  $x$  e  $y$  por  $z$  e  $u$  respectivamente obtendo

$$d(z, u) - d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, u) \quad (1.3)$$

Sabe-se que, para qualquer número  $a, |a| = a$  ou  $|a| = -a$ . Concluímos que, de (1.2) e (1.3), a desigualdade (1.1) é verdadeira. ■

**Definição 1.3.3** Diz-se que  $x_k$  é uma *sucessão fundamental* (ou *de Cauchy*) se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : d(x_m, x_p) \leq \varepsilon \quad \forall m, p > N$$

Se  $x_k$  for uma sucessão fundamental, pode-se escrever:

$$\lim_{m,p \rightarrow \infty} d(x_m, x_p) = 0 \quad \square$$

**Teorema 1.3.3** *Se uma sucessão  $x_k$  converge, então é uma sucessão fundamental.*

**Demonstração.** Do axioma da desigualdade triangular, segue-se que toda a sucessão convergente é fundamental. Com efeito, se  $x_k \rightarrow x$ , para qualquer que seja  $\varepsilon > 0$  se pode encontrar  $N$  tal que  $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$  para todo  $n > N_\varepsilon$ . Por isso

$$d(x_m, x_p) \leq d(x_m, x) + d(x_p, x) < \varepsilon \quad \forall m, p > N_\varepsilon \quad \blacksquare$$

**Observação 1.3.1** Seja  $(E, d)$  um espaço métrico e  $M \subset E$ . Então  $(M, d)$  (com a mesma métrica) é também um espaço métrico.

**Definição 1.3.4** Um espaço métrico diz-se **completo** se qualquer sucessão fundamental for convergente para um elemento do mesmo espaço.  $\square$

### 1.3.1 Noções topológicas em espaços métricos

A noção de métrica possibilitou a criação dos conceitos de bolas abertas e fechadas que podem elucidar mais a ideia da convergência. Seja  $(E, d)$  um espaço métrico arbitrário.

**Definição 1.3.5** Um conjunto  $B(a, r)$  de pontos  $x \in E$  recebe o nome de **bola aberta**, com centro em  $a$  e raio  $r$  (com relação à métrica  $d$ ), se

$$d(x, a) < r$$

Por sua vez, o conjunto  $B[a, r]$  será **bola fechada** se

$$d(x, a) \leq r$$

**Exemplo 1.3.1** No espaço  $\mathbb{R}^1$ , a bola aberta corresponde ao intervalo  $(a - r, a + r)$  e a bola fechada ao segmento  $[a - r, a + r]$ . Em  $\mathbb{R}^2$  a bola aberta representa os pontos interiores ao círculo com raio  $r$  e centro em  $a$  enquanto que a bola fechada inclui, também, os pontos da circunferência em causa.  $\square$

**Proposição 1.3.1**  $x = \lim x_n$  sse em qualquer bola  $B(x, r)$  com centro em  $x$

$$\exists N : x_n \in B(x, r) \quad \forall n \geq N$$

**Definição 1.3.6** Diz-se que um conjunto  $F \subset E$  é **fechado** se qualquer sucessão  $\{x_n\}$ , onde  $x_n \in F$  converge para um limite  $x$ ,  $x$  pertence a  $F$ .

**Exemplo 1.3.2** O segmento  $a \leq x \leq b, x \in \mathbb{R}^1$  é um conjunto fechado. O mesmo acontece para os conjuntos  $x \geq a$  e  $x \leq b$ .

**Proposição 1.3.2** *A soma de um número finito de conjuntos fechados é também um conjunto fechado.*

**Proposição 1.3.3** *A intersecção de quaisquer conjuntos fechados é um conjunto fechado.*

**Definição 1.3.7** ( $\varepsilon$ -vizinhança, vizinhança, ponto interior, ponto de acumulação, aderência)

Seja  $(E, d)$  um espaço métrico,  $M \subset E$  e  $x_0 \in E$ .

Chamaremos  $\varepsilon$ -vizinhança do ponto  $x_0$  à bola aberta  $B(x_0, \varepsilon)$ .

Qualquer subconjunto de  $E$  que contenha uma  $\varepsilon$ -vizinhança de  $x_0$  será chamado **vizinhança** do ponto  $x_0$ .

$x_0$  será chamado **ponto interior** de  $M$  se  $M$  for uma vizinhança de  $x_0$ .

$x_0$  é chamado **ponto de acumulação** de  $M$  se qualquer vizinhança de  $x_0$  contém um ponto de  $M$  diferente de  $x_0$ . Ao conjunto formado por  $M$  e por todos os seus pontos de acumulação chamaremos **aderência** ou **fecho** de  $M$ . É denotado por  $[M]$ .

Segue-se que  $M$  será um conjunto fechado se  $M = [M]$ .

**Exemplo 1.3.3** Em  $\mathbb{R}^1$  o fecho do conjunto  $a < x < b$  é o segmento  $a \leq x \leq b$ .

Nun espaço métrico arbitrário.  $[B(a, r)] \subset B[a, r]$   $\square$

Diremos que um **conjunto** é **contável**(enumerável) se os seus elementos puderem ser colocados em uma sucessão infinita  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

**Definição 1.3.8** (Subconjunto denso, espaço separável) Seja  $M \subset E$  e  $(E, d)$  um espaço métrico.

$M$  diz-se **denso** em  $E$  se  $[M] = E$ .

$E$  diz-se **separável** se possui um subconjunto contável e denso em  $E$ .

**Exemplo 1.3.4** A recta  $\mathbb{R}$  é separável pois o conjunto dos números racionais  $\mathbb{Q}$  é contável e é denso em  $\mathbb{R}$ .

**Definição 1.3.9** Um **subconjunto**  $M$  de um espaço métrico  $E$  diz-se **limitado** se existir uma bola ( aberta ou fechada) em  $E$  que contenha  $M$ .

**Lema 1.3.1** (Desigualdade de Cauchy-Schwarz<sup>1</sup>) [6] Para quaisquer números complexos  $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \right|^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right) \quad (1.4)$$

onde  $\bar{y}$  é o conjugado de  $y$ .

**Demonstração.**  $\forall$  número  $a$

$$0 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - ay_i)(\bar{x}_i - \bar{a}\bar{y}_i) =$$

$$\sum_{i=1}^n |x_i|^2 - a \sum_{i=1}^n y_i \bar{x}_i - \bar{a} \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i + |a|^2 \sum_{i=1}^n |y_i|^2$$

Se  $\sum_{i=1}^n |y_i|^2 = 0$  então  $\forall y_i$  deve ser igual a zero, o que prova o lema.

Se  $\sum_{i=1}^n |y_i|^2 \neq 0$  então  $a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i}{\sum_{i=1}^n |y_i|^2}$  e o resultado será a desigualdade (1.4). ■

Se, na desigualdade (1.4), tomarmos  $x$  e  $y$  como reais, teremos a desigualdade de **Cauchy-Buniakovski**:

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^n x_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n y_k^2 \quad (1.5)$$

Em seguida serão apresentados alguns dos exemplos mais comuns de espaços métricos:

**Exemplo 1.3.5** Dado um conjunto não-vazio  $E$ , definimos a métrica

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq y; \\ 0, & \text{se } x = y. \end{cases}$$

Esta é chamada **métrica discreta**.

De facto,  $d(x, y) = 0$  sse  $x = y$  (cumpre-se o primeiro axioma). Está claro, também, que cumpre-se o segundo axioma pois  $d(x, y) = d(y, x)$ . Para verificarmos o terceiro axioma, suponhamos que  $x \neq y$ , então se  $z \notin \{x, y\}$  teremos

$$1 = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) = 1 + 1 = 2$$

cumprindo-se, deste modo, a desigualdade triangular.

**Exemplo 1.3.6** O espaço dos números reais,  $\mathbb{R}$ , com a métrica

$$d(x, y) = |x - y|$$

constitui um espaço métrico completo.

**Exemplo 1.3.7** Em  $\mathbb{R}^n$  (ou em  $\mathbb{C}^n$ ) a distância:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

para  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$  é uma métrica e é denominada **métrica usual** em  $\mathbb{R}^n$  (ou  $\mathbb{C}^n$ ).

Com efeito, podemos facilmente verificar os axiomas 1 e 2 da definição de métrica. Provenmos a desigualdade triangular. Para quaisquer  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$  e  $z = (z_1, \dots, z_n)$ , queremos provar que

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (z_k - x_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n (y_k - x_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n (z_k - y_k)^2} \quad (1.6)$$

Façamos  $a_k = y_k - x_k$ ,  $b_k = z_k - y_k$ . Por conseguinte  $z_k - x_k = a_k + b_k$ . A desigualdade (1.6) tomará a forma

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Buniakovski ao desenvolvimento do primeiro termo desta expressão, teremos :

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2} &= \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k + \sum_{k=1}^n b_k^2} \leq \\ &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2} + \sum_{k=1}^n b_k^2} \\ &= \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

O espaço  $\mathbb{R}^n$  constitui, entretanto, um espaço completo. De facto, seja  $x_k = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$  uma sucessão fundamental em  $\mathbb{R}^n$ . Então, para qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe  $N$ , tal que:

$$d(x_p, x_m) = \sqrt{(x_1^{(p)} - x_1^{(m)})^2 + \dots + (x_n^{(p)} - x_n^{(m)})^2} \leq \varepsilon$$

para qualquer  $m, p > N$ . Isto implica que

$$|x_1^{(p)} - x_1^{(m)}| \leq \varepsilon, \dots, |x_n^{(p)} - x_n^{(m)}| \leq \varepsilon$$

para qualquer  $m, p > N$ . Do exemplo (4.1), segue que cada sucessão  $x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$  converge quando  $k \rightarrow \infty$ . Sendo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i$$

então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = (x_1, \dots, x_n)$$

Note-se que o presente exemplo constitui uma generalização do exemplo (4.1) e, portanto, a demonstração deste último torna-se análoga à deste exemplo para o caso particular em que  $n = 1$ .

**Exemplo 1.3.8** O espaço  $C[a, b]$  das funções reais contínuas definidas em  $a \leq x \leq b$ , com a métrica

$$d(x, y) = \max_{a \leq x \leq b} |x(t) - y(t)|$$

também é um espaço métrico completo.

**Demonstração.** Seja  $x_k(t)$  uma sucessão fundamental de funções de  $C[a, b]$ , isto é:

$$\lim_{m, p \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} [x_m(t) - y_p(t)] = 0$$



Esta é precisamente a definição de convergência uniforme. Existe uma função  $x(t)$  tal que  $x_k(t)$  aproxima-se uniformemente para  $x(t)$  sobre  $a \leq t \leq b$ . É sabido que uma sucessão uniformemente convergente de funções converge para uma função contínua. Sendo assim, uma sucessão de Cauchy de elementos  $C[a, b]$  converge para um elemento em  $C[a, b]$  e, portanto,  $C[a, b]$  é um espaço completo. ■

**Exemplo 1.3.9**  $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$  não é espaço métrico completo. De facto, podemos extrair, em  $\mathbb{R}$  pelo menos uma sucessão  $\{x_n\}$ ,  $x_n \rightarrow x_0$ , o que contraria a definição de espaço completo.

**Exemplo 1.3.10** O espaço  $C^2[a, b]$  das funções contínuas no segmento  $[a, b]$  com a métrica quadrática definida por

$$d(x, y) = \left( \int_a^b [x(t) - y(t)]^2 dt \right)^{1/2}$$

De forma análoga se pode demonstrar a desigualdade de Cauchy-Buniakovski na forma integral

$$\left( \int_a^b x(t)y(t)dt \right)^2 \leq \int_a^b x^2(t)dt \int_a^b y^2(t)dt$$

## 1.4 Espaços lineares

Sabe-se da Álgebra linear que um ponto no espaço tridimensional pode ser representado por um vector, que é um conjunto de três números que indicam as coordenadas do ponto. Dados dois vectores  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  e  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ , podemos formar um novo vector  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  que constitui a soma dos outros dois. Podemos, também, construir um vector  $\alpha \mathbf{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)$  que representa o produto do vector por um escalar (número)  $\alpha$ , também pertencente ao mesmo espaço tridimensional. O que se pretende ilustrar com esta pequena abordagem é que existem conjuntos onde podemos definir uma regra para a soma de dois elementos e uma regra para a multiplicação de um elemento desse conjunto por um escalar, resultando num novo elemento também pertencente ao mesmo conjunto. A estes conjuntos, com as propriedades atrás especificadas, denominamos **espaços vectoriais** (ou **lineares**) [5][6][8].

**Definição 1.4.1** Um conjunto não vazio  $V$  de elementos  $x, y, z, \dots$  se chama **espaço linear (ou vectorial)** se satisfaz as seguintes condições:

1.  $\forall x, y, z \in V$  define-se a operação de **soma** e denotado  $x + y$  tal que:

- (a)  $x + y = y + x$  (*comutatividade*)
- (b)  $x + (y + z) = (x + y) + z$  (*associatividade*)
- (c)  $\exists \theta \in V : x + \theta = x \quad \forall x \in V$  (*elemento zero*)

$$(d) \forall x \in V \quad \exists -x \in V : \quad x + (-x) = \theta \text{ (elemento oposto)}$$

2.  $\forall$  escalar  $\alpha$ ,  $\forall x \in V$  define-se a operação de multiplicação  $\alpha x \in V$  tal que:

$$(a) \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$

$$(b) 1.x = x$$

3. As operações de adição e multiplicação estão relacionadas entre si mediante as leis distributivas:

$$(a) (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

$$(b) \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

**Proposição 1.4.1** *O elemento zero é único e*

$$\theta = 0.x \quad \forall x \in V$$

**Proposição 1.4.2** *O vector*

$$-x = -1.x$$

**Exemplo 1.4.1** O conjunto de todos os sistemas possíveis de  $n$  números, sejam reais ou complexos,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  é um espaço vectorial com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas por:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

Para  $x_i \in \mathbb{R}$ , o espaço é denotado  $\mathbb{R}^n$  e, para  $x_i$  complexo é denotado  $\mathbb{C}^n$ .

**Exemplo 1.4.2** O conjunto das funções contínuas sobre um segmento  $[a, b]$ , denotado por  $C[a, b]$  é um espaço linear com as operações de adição de funções e multiplicação destas por escalar definidas de forma habitual:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{e} \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Sabe-se, da Análise Matemática elementar, que a soma de duas funções contínuas é também uma função contínua e que o produto de uma função contínua por um escalar é também uma função contínua, tornando-se desnecessária a sua demonstração aqui.

**Definição 1.4.2** Dois espaços  $V$  e  $V^*$  se dizem *isomorfos* quando se pode estabelecer uma correspondência biunívoca compatível com as operações em  $V$  e  $V^*$ . Isto significa que: de

$$x \mapsto x^* \quad \text{e} \quad y \mapsto y^* \quad x, y \in V \quad \text{e} \quad x^*, y^* \in V^*$$

segue-se:

$$\begin{aligned} x + y &\mapsto x^* + y^* \\ \alpha x &\mapsto \alpha x^* \quad \forall \alpha \end{aligned}$$

**Definição 1.4.3 (Dependência Linear)** Os elementos  $x, y, \dots, w$  de um espaço linear se dizem *linearmente dependentes* se existem  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  e existe pelo menos um  $\alpha_i \neq 0$   $i = 1, \dots, n$  tais que:

$$\alpha_1 x + \dots + \alpha_n w = 0 \quad (1.7)$$

Caso contrário, se  $\alpha_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  dir-se-á que são *linearmente independentes*.

**Definição 1.4.4** Se em um espaço  $V$  se podem encontrar  $n$  elementos linearmente independentes e quaisquer  $n + 1$  elementos de  $V$  são linearmente dependentes diz-se que o espaço tem *dimensão  $n$* . Esta dimensão será *infinita* se  $\forall n \in \mathbb{N}$  existem em  $V$   $n$  elementos linearmente independentes.

**Definição 1.4.5** Chama-se *Base* de um espaço  $V$   $n$ -dimensional a todo o sistema de  $n$  elementos linearmente independentes.

**Definição 1.4.6 (Critério do subespaço)** Um subconjunto não vazio  $V'$  de um espaço linear  $V$  se diz *subespaço*, se, por si só, constitui um espaço linear com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas em  $V$ , isto é:

$V' \subset V$  é um subespaço se

$$\alpha x + \beta y \in V' \quad \forall x, y \in V', \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} = \mathbb{R}(\text{ou } \mathbb{C})$$

**Observação 1.4.1** Qualquer espaço linear  $V$  contém um subespaço nulo, formado pelo elemento zero.

**Observação 1.4.2** O espaço linear  $V$  é um subespaço de si mesmo.

**Definição 1.4.7** Diz-se que um *subespaço é próprio* se este for diferente de  $V$  e contém ao menos um elemento diferente de zero.

**Exemplo 1.4.3** O subconjunto  $V' \subset \mathbb{R}^3$  definido por  $V' = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$  é um subespaço.

Com efeito, sejam  $u = (x_1, y_1, 0)$  e  $v = (x_2, y_2, 0)$ . Para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha u + \beta v = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, 0) \in V'$$

O conjunto  $V'$  em questão representa o plano  $xOy$ . Este é subespaço do espaço tridimensional. É subespaço próprio e não trivial. De forma similar pode-se provar que qualquer plano passando pela origem das coordenadas é um subespaço assim como qualquer recta passando pela origem. Porém, qualquer plano que não passe pela origem não pode constituir subespaço de  $\mathbb{R}^3$  pois não contém o elemento zero.

**Exemplo 1.4.4** As funções  $f(x) = x^0, f(x) = x^1, \dots, f(x) = x^n$  são linearmente independentes. Demonstramos: O elemento zero é a função  $f(x) = 0$ . Se as potências forem linearmente dependentes teremos

$$c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n = 0 \quad \forall x$$

o que é impossível, a menos que  $\forall c_i = 0$ .

O subespaço gerado por  $x^0, x^1, \dots, x^n$  é o conjunto de todas as combinações das potências de  $x$  até  $x^n$ , isto é, todos os polinómios de grau menor ou igual a  $n$ .

**Exemplo 1.4.5** Os vectores  $(1, 0, 0, \dots, 0)$ ,  $(0, 1, 0, \dots, 0)$ , ...,  $(0, 0, 0, \dots, 1)$  de  $\mathbb{R}^n$  são linearmente independentes e formam uma base. De facto

$\alpha_1(1, 0, 0, \dots, 0) + \alpha_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + \alpha_n(0, 0, 0, \dots, 1) = 0$  se e somente se  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$  provando-se, assim, a independência linear.

**Teorema 1.4.1** *Seja  $x_\alpha$  um conjunto não vazio qualquer de elementos de um espaço linear  $V$ . Então existe um subespaço mínimo que contém  $x_\alpha$ .*

**Demonstração.** Com efeito, existe em  $V$  ao menos um subespaço que contém  $V$ : todo o  $V$ . ■

**Teorema 1.4.2** *A intersecção de quaisquer conjuntos  $V_\gamma$  é também um subespaço.*

**Demonstração.** Efectivamente, se

$$V^* = \bigcap V_\gamma \quad x, y \in V^*$$

também

$$\alpha x + \beta y \in V^* \quad \forall \alpha, \beta \quad \blacksquare$$

**Definição 1.4.8** A intersecção de todos os subespaços que contém o sistema de vectores  $x_\alpha$  constitui o menor subespaço que contém  $x_\alpha$ . A esse subespaço mínimo designa-se **subespaço gerado** pelo conjunto  $x_\alpha$  e denota-se por  $L(x_\alpha)$ .

**Proposição 1.4.3** *Dois espaços lineares são isomorfos se, e somente se têm a mesma dimensão algébrica.*

## 1.5 Espaços normados

**Definição 1.5.1** Diz-se que um espaço linear  $V$  é **normado** se, para este, é definida uma função  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , denominada **norma** em  $E$  (espaço linear sobre  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ), com as seguintes propriedades:

1.  $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in V$  e  $\|x\| = 0$  se e somente se  $x = 0$
2.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall x \in V, \alpha \in \mathbb{K}$
3.  $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in V$

**Exemplo 1.5.1** O espaço  $\mathbb{R}^n$  possui a seguinte norma

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \quad (1.8)$$

**Demonstração.** É fácil mostrar que as propriedades 1. e 2. se cumprem. Para provar a terceira propriedade, fazemos

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + \dots + (x_n + y_n)^2})^2 \\ &= (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + \dots + (x_n + y_n)^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) + 2(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n) \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

Já que a norma é um valor positivo, podemos excluir os quadrados nos dois membros, obtendo

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Quando, no espaço  $\mathbb{R}^n$ , a norma é definida pela fórmula (1.8), este espaço é denominado **espaço euclidiano  $n$ -dimensional**. É importante notar que um espaço linear pode possuir diferentes normas. Por exemplo, para o espaço  $\mathbb{R}^n$ , podemos definir outra norma, como se segue:

$$\|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{R}$$

**Exemplo 1.5.2** O espaço  $C[a, b]$  torna-se um espaço normado com a norma definida por

$$\|f\| = \sup_{a \leq x \leq b} f(x), \quad \forall f \in C[a, b]$$

**Definição 1.5.2** Um espaço linear normado completo denomina-se *espaço de Banach*.

**Exemplo 1.5.3** A função  $|x|, x \in \mathbb{K}$  define uma norma em  $\mathbb{K}$ . Com esta norma,  $\mathbb{K}$  é um espaço de Banach.

No geral, os espaços completos têm maior aplicação do que os incompletos, pois um dos métodos de solução de equações é a construção de uma sucessão de aproximações da solução real e provar que essa sucessão é fundamental. Para o caso de um espaço completo é fácil deduzir que a sucessão converge para um elemento do espaço em causa.

## 1.6 Espaços com medida

Denominamos **espaço mensurável** ao par  $(X, \mathcal{A})$ , onde  $\mathcal{A}$  é uma  $\sigma$ -álgebra de  $X$ .

Seja  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  uma função definida numa  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}$ . Diremos que  $\mu$  é **aditiva** se:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2. Se  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  são disjuntos dois a dois, então

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$$

$\mu$  diz-se  **$\sigma$ -aditiva** se  $n$  puder tomar o valor infinito.

**Proposição 1.6.1** ([14], pag. 12) *Seja  $\mathcal{A}$  uma  $\sigma$ -álgebra e  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$  uma função  $\sigma$ -aditiva.*

1. Se  $A, B \in \mathcal{A}$  e  $A \subset B$  então  $\mu(A) \leq \mu(B)$
2. Se  $\{A_n\}$  é uma sucessão de elementos de  $\mathcal{A}$  tais que  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ , então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Denomina-se **medida** a uma função  $\sigma$ -aditiva  $\mu$  definida numa  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}$  e **espaço com medida** ao terno  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  onde  $(X, \mathcal{A})$  é um espaço mensurável e  $\mu$  é uma medida em  $\mathcal{A}$ .

Se

$$X = \bigcup_n X_n$$

e  $\mu(X_n) < \infty$ , diremos que a medida  $\mu$  do espaço  $X$  é  **$\sigma$ -finita** e a sucessão  $\{X_n\}$  é **sucessão exaustiva**.

**Exemplo 1.6.1** Consideremos o conjunto  $X$  e fixemos  $x \in X$ . Dado  $A \subset X$ , definimos uma função  $\delta_x$  em  $\mathcal{R}(X)$  como:

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1. & \text{se } x \in A; \\ 0. & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

$\delta_x$  define uma medida (probabilidade) em  $\mathcal{R}(X)$ , que chamaremos **medida de Dirac**.

Sejam  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  um espaço de medida e  $A$  um subconjunto de  $X$ . Diremos que  $A \subset B$  tem **medida nula** se

$$\exists B \in \mathcal{A} \text{ tal que } A \subset B \text{ e } \mu(B) = 0$$

**Definição 1.6.1** Chama-se **medida superior** do conjunto  $S \subset E$  ao número

$$\mu^*(S) = \inf_{S \subset \cup B_n} \sum_n m(B_n), \quad B_n \in \mathcal{B}$$

onde  $\mathcal{B}$  representa um semianel com unidade  $E$ .

**Definição 1.6.2** Chama-se **medida inferior** do conjunto  $S \subset E$  ao número

$$\mu_*(S) = m(E) - \mu^*(S), \quad B_n \in \mathcal{B}$$

**Definição 1.6.3** Um conjunto  $S \subset E$  se chama **medível** (segundo Lebesgue) se

$$\mu_*(S) = \mu^*(S)$$

## 1.7 Funções somáveis

**Definição 1.7.1** Seja o espaço de medida  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ . Uma função  $f(x)$  definida no conjunto  $X$  diz-se  $\mu$ -**mensurável** se

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$$

para qualquer conjunto de Borel da recta numérica.

**Definição 1.7.2** Uma função  $f(x)$  diz-se **simples** quando é  $\mu$ -mensurável e toma um número contável de valores.

Seja  $f$  uma função simples que toma os valores  $y_1, y_2, \dots, y_n$ ;  $y_i \neq y_j$  para  $i \neq j$ . Define-se o **integral** de  $f$  no conjunto  $A$  mediante a igualdade:

$$\int_A f(x) d\mu = \sum_n y_n \mu(A_n) \quad (1.9)$$

onde  $A_n = \{x : x \in A, f(x) = y_n\}$

**Definição 1.7.3** Uma função simples diz-se **integrável** (ou **somável**) (em ordem à medida  $\mu$ ) num conjunto  $A$  se a série (1.9) converge absolutamente.

### Propriedades

Se  $f$  e  $g$  são integráveis e  $k$  é uma constante, então



$$1. \int_A f(x)d\mu + \int_A g(x)d\mu = \int_A [f(x) + g(x)]d\mu$$

$$2. \int_A kf(x)d\mu = k \int_A f(x)d\mu$$

3. Se  $f$  é limitada no conjunto  $A$  e se  $|f(x)| \leq M$  em  $A$ , se cumpre:

$$\left| \int_A f(x)d\mu \right| \leq M\mu(A)$$

**Definição 1.7.4** Uma função mensurável  $f$ , definida num conjunto  $X$  de medida  $\sigma$ -finita se chama **somável** em  $X$  se é somável em cada subconjunto mensurável  $A \subset X$  de medida finita e se para cada sucessão exaustiva  $\{X_n\}$  de conjuntos mensuráveis existe o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X_n} f(x)d\mu(x)$$

**Teorema 1.7.1** Se existe o integral de Riemann

$$I = (R) \int_a^b f(x)dx$$

$f$  é integrável em  $[a, b]$  segundo Lebesgue e

$$\int_{[a,b]} f(x)d\mu = I$$

**Demonstração.** ([8], pag.349)

**Exemplo 1.7.1** A função de Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ é racional;} \\ 0, & \text{se } x \text{ é irracional.} \end{cases}$$

é integrável segundo Lebesgue mas não é integrável segundo Riemann.

**Exemplo 1.7.2** Qualquer função  $f(x)$  para a qual o integral  $\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$  existe para  $\forall \varepsilon > 0$  e tem limite finito para  $\varepsilon \rightarrow 0$  é integrável em  $[a, b]$  segundo Lebesgue e

$$\int_{[a,b]} f(x)d\mu = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$



**Definição 1.7.5** [5] Diz-se que uma função  $g(t)$ ,  $t \in [a, b]$  é de **variação limitada** se  $\exists M = \text{const}$  tal, que qualquer divisão do segmento  $[a, b]$  em um número finito de subsegmentos limitados por  $t_i, i = 0, \dots, n$  tais que  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ , cumpre-se a igualdade

$$\sum_{i=0}^{n-1} |g(t_{i+1}) - g(t_i)| \leq M$$

Se o conjunto destas somas for limitado, então possui um valor limite superior denominado **variação completa** da função  $g(t)$ , que é denotado por

$$\text{Var}_a^b g(t)$$

**Proposição 1.7.1** A soma ou a diferença de duas funções de variação limitada é, também, de variação limitada.

Para a demonstração deste teorema vide ([5], pg. 254).

**Exemplo 1.7.3** Qualquer função monótona é de variação limitada. Com efeito, caso  $g(t)$  seja monótona crescente em  $[a, b]$ , então para qualquer divisão deste segmento:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} |g(t_{i+1}) - g(t_i)| &= \sum_{i=0}^{n-1} [g(t_{i+1}) - g(t_i)] + [g(t_2) - g(t_1)] + \dots + [g(b) - g(t_{n-1})] = \\ &= g(b) - g(a) \end{aligned}$$

Outro conceito que merece destaque na Análise funcional é o integral de Riemann-Stieltjes ([8], pg. 406).

Seja  $g(t)$ ,  $t \in [a, b]$  uma função contínua de variação limitada. Seja  $f$  uma função arbitrária neste segmento. Consideremos a partição

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

Escolhemos  $\tau_i \in [t_i, t_{i-1}]$  arbitrário e formamos a soma:

$$\sum_{i=1}^n f(\tau_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})] \tag{1.10}$$

denominada **soma integral**.

Se existe

$$\lim_{\max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\tau_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})] = S$$

onde as somas integrais não dependem da divisão do segmento  $[a, b]$  nem da escolha de  $\tau_i$ , então o limite  $S$  chama-se **integral de Riemann-Stieltjes** e designa-se por

$$S = \int_a^b f(t) dg(t)$$

## Propriedades

1. Teorema do valor médio

$$\left| \int_a^b f(t) dg(t) \right| \leq \max |f(t)| \operatorname{Var}_a^b g(t)$$

Em particular, se  $g(t) = t$

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq |b - a| \max |f(t)|$$

2. Se  $g = g_1 + g_2$ , então

$$\int_a^b f(t) dg(t) = \int_a^b f(t) dg_1(t) + \int_a^b f(t) dg_2(t)$$

3. Se  $g$  é uma função de variação limitada, diferente de zero somente num conjunto finito ou numerável de pontos, então:

$$\int_a^b f(t) dg(t) = 0$$

para qualquer função  $f$  contínua em  $[a, b]$ .

4. Se  $f$  é contínua em  $[a, b]$  então  $\int_a^b f(t) dg(t)$  não depende dos valores que  $g$  toma nos seus pontos (contáveis) de descontinuidade de 1ª espécie.

5. São válidas as seguintes igualdades :

$$\int_a^b f(t) dg(t) = \sum_i f(t_i) h_i$$

onde  $g$  é uma função de saltos,  $h_i$  são os saltos de  $g$  nos pontos  $t_i$ .

$$\int_a^b f(t) dg(t) = \int_a^b f(t) g'(t) dt$$

Diz-se que uma sucessão de funções  $\{f_n\}$  converge uniformemente em  $[a, b]$  para uma função  $f$  se para  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que para  $\forall n > N_\varepsilon$  cumpre-se  $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$  para  $t \in [a, b]$ .

**Definição 1.7.6** Uma *função* diz-se *somável* num conjunto  $V$  se existe uma sucessão de funções simples  $f_n$ , integráveis em  $V$  que convergem uniformemente para  $f$ .  $\square$

A definição anterior é, efectivamente, correcta se se observarem as seguintes condições:

1. O limite

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_V f_n(x) d\mu = \int_V f(x) d\mu \quad (1.11)$$

existe para qualquer sucessão uniformemente convergente de funções simples integráveis em  $V$ .

2. O limite (1.11) não depende da escolha da sucessão  $\{f_n\}$ .

### Propriedades do integral de Lebesgue

Sejam  $f(x)$  e  $g(x)$  duas funções somáveis e  $k$  uma constante arbitrária, então

1.  $\int_A 1 d\mu = \mu(A)$
2.  $\int_A [kf(x)] d\mu = k \int_A f(x) d\mu$
3. A existência ou inexistência dos integrais  $\int_A f(x) d\mu$  e  $\int_A |f(x)| d\mu$  é simultânea.
4. Se  $f$  é integrável em  $A$ , será, também, integrável em qualquer conjunto mensurável  $A' \in A$ .
5. Se

$$A = \bigcup_n A_n; A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$$

e a série

$$\sum_n \int_{A_n} |f(x)| d\mu$$

converge, então a função  $f$  é integrável em  $A$  e  $\int_A f(x) d\mu = \sum_n \int_{A_n} f(x) d\mu$

## 1.8 Funções absolutamente contínuas

**Definição 1.8.1** [9] Uma *função*  $x(t)$  diz-se *absolutamente contínua* no intervalo  $[a, b]$  se para qualquer  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , tal que, qualquer sistema de intervalos não sobrepostos  $(\alpha_k, \beta_k) \subset [a, b]$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), a soma dos incrementos absolutos de  $x(t)$  nestes intervalos é menor que  $\varepsilon$  implica que a soma dos comprimentos dos intervalos é menor que  $\delta$ , isto é:

$$\sum_{k=1}^n |x(\beta_k) - x(\alpha_k)| < \varepsilon \quad \text{se} \quad \sum_{k=1}^n (\beta_k - \alpha_k) < \delta$$

**Observações**

1. Uma função absolutamente contínua é contínua;
2. Uma função absolutamente contínua é uniformemente contínua. a afirmação contrária não é válida.
3. Toda função absolutamente contínua é de variação limitada;
4. A soma, a diferença e o produto de um número finito de funções absolutamente contínuas são absolutamente contínuas
5. Qualquer função absolutamente contínua pode ser expressa como um integral indefinido. isto é:

$$x(t) = x(a) + \int_a^t \varphi(s) ds$$

**Teorema 1.8.1** *A função*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

*onde  $f(t)$  é uma função somável, é absolutamente contínua.*

**Demonstração.** ([8], pg. 387)

**Teorema 1.8.2** *(de Lebesgue) A função  $f = F'$ , onde  $F(x)$  é absolutamente contínua  $x \in [a, b]$ , é somável neste segmento e, para todo  $x \in [a, b]$*

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$$

**Demonstração.** ([8], pg. 388)

## Capítulo 2

# Funcionais e Operadores Lineares

### 2.1 Funcionais lineares

**Definição 2.1.1** Um *funcional* é uma aplicação  $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ , onde  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) e  $E$  é um espaço normado arbitrário.

**Definição 2.1.2** Um *funcional* é *aditivo* se:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in E$$

**Definição 2.1.3** Um *funcional* se diz *homogêneo* se

$$f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

onde  $\alpha$  é escalar

**Definição 2.1.4** Se  $f$  for um *funcional* definido no espaço linear complexo, este será *conjugado homogêneo* caso

$$f(\alpha x) = \bar{\alpha} f(x)$$

onde  $\bar{\alpha}$  é conjugado de  $\alpha$

**Definição 2.1.5** Ao funcional aditivo homogêneo dá-se o nome de *funcional linear*. A aditividade e homogeneidade do funcional podem-se resumir na seguinte propriedade:

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

**Definição 2.1.6** Um funcional aditivo conjugado homogêneo chama-se *funcional conjugado linear* ou *antilinear*.

**Definição 2.1.7** Um *funcional linear*  $f$  definido sobre o espaço  $E$  diz-se *contínuo* se  $\forall \varepsilon > 0, \forall x_0 \in E$  existe uma vizinhança  $U$  do ponto  $x_0$  tal que

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in U$$

**Exemplo 2.1.1** O produto escalar de dois vectores

$$f(x) = (x, c) = x_1 \cdot c_1 + x_2 \cdot c_2 + \dots + x_n \cdot c_n \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

onde  $c = (c_1, \dots, c_n)$  é um vector constante de  $\mathbb{R}^n$ , representa um funcional linear em  $\mathbb{R}^n$ .

## 2.2 Operadores lineares

**Definição 2.2.1** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços métricos e  $D \subset X$ ,  $R \subset Y$ . Chama-se *operador*  $A : D \rightarrow R$  à regra que associa um  $x \in D$  a um valor  $y \in R$  e é denotado por  $Ax$  ou  $A(x)$ .

A correspondência entre  $x$  e  $y$  é representada na forma:

$$y = Ax$$

O conjunto  $D_A$  de todos os valores possíveis de  $x$  é denominado **domínio de definição** do operador  $A$ .

A cada ponto  $y \in R$  que pode ser escrito sob a forma  $y = Ax$  chama-se **imagem** do valor  $x$ . Ao conjunto de todas as imagens se denomina **contradomínio** de  $A$  e designa-se  $R_A$ .

Dado um conjunto  $E \subset D$ . O conjunto de todos os valores  $y = Ax$ ,  $x \in E$  é designado **imagem do conjunto**  $E$  e denota-se  $A(E)$ .

Note-se que a noção de operador linear surge como uma generalização da ideia de função para o caso específico dos espaços lineares.  $\square$

**Definição 2.2.2** O *operador*  $A$  diz-se *aditivo* se :

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 \quad \forall x_1, x_2 \in X$$

**Definição 2.2.3** O *operador*  $A$  é *homogêneo* se:

$$A(\alpha x) = \alpha(Ax) \quad \forall x \in X \quad \text{e} \quad \forall \alpha \text{ escalar}$$

### Propriedades principais de operadores lineares

- Se o operador  $A$  é aditivo, então

$$A0 = 0$$

- $A(-x) = -Ax, \forall x \in X$

- Se  $A$  é aditivo e homogêneo, então

$$A\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right) = \sum_{k=1}^n \alpha_k Ax_k$$

(propriedade da distributividade do operador)

#### 2.2.1 Operadores contínuos e locais

**Definição 2.2.4** [8] Um *operador*  $A : X \rightarrow Y$  se diz *contínuo* no ponto  $x_0 \in D_A$  se  $\forall$  vizinhança  $V$  do ponto  $y_0 = Ax_0 \in R_A$ ,  $\exists$  vizinhança  $U$ , do ponto  $x_0$ , tal que:

$$Ax \in V \quad \forall x \in U \cap D_A$$

Por outras palavras, o operador  $\mathbf{A}$  será contínuo no ponto  $x_0 \in D_{\mathbf{A}}$  se  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$  tal que  $\forall x \in D_{\mathbf{A}} : d(x, x_0) < \delta$  cumpre-se

$$d_1(\mathbf{A}x, \mathbf{A}x_0) < \varepsilon$$

onde  $d$  e  $d_1$  definem métricas em  $X$  e  $Y$  respectivamente. O operador será contínuo se for contínuo para cada  $x \in D_{\mathbf{A}}$ .

**Definição 2.2.5** Um *operador*  $\mathbf{A}$  diz-se *linear* se for aditivo e contínuo.

**Teorema 2.2.1 (continuidade do operador)** *Se um operador aditivo  $\mathbf{A}$  for contínuo num ponto  $x_0 \in X$ , então é contínuo em cada ponto do espaço  $X$ , quer dizer, é linear.*

**Demonstração.** Seja  $x_n \in X$  e  $x_n \rightarrow x$ , então  $x_n - x + x_0 \rightarrow x_0$ . Como consequência da continuidade de um operador  $\mathbf{A}$  no ponto  $x_0$ ,

$$\mathbf{A}x_n - \mathbf{A}x + \mathbf{A}x_0 = \mathbf{A}(x_n - x + x_0)$$

e, portanto

$$\mathbf{A}x_n - \mathbf{A}x \rightarrow 0 \quad \text{ou} \quad \mathbf{A}x_n \rightarrow \mathbf{A}x \quad \blacksquare$$

O teorema 2.2.1 leva-nos a um critério de verificação da linearidade de um operador. Para tal, basta-nos apenas verificar a sua continuidade, por exemplo, no ponto  $x = 0$ . Já que, para um operador aditivo  $\mathbf{A}0 = 0$ , então a continuidade de  $\mathbf{A}$  no ponto 0 significa que, se  $x_n \rightarrow 0$  também  $\mathbf{A}x_n \rightarrow 0$ . Os funcionais lineares são um caso particular dos operadores lineares.

**Definição 2.2.6** Um *operador*  $\mathbf{A} : X \rightarrow Y$ , onde  $X$  e  $Y$  são espaços funcionais, se diz *local* se os valores de  $y(t) = (\mathbf{A}x)(t)$  em qualquer vizinhança de  $t = t_0$  dependem apenas do valor de  $x(t)$  na mesma vizinhança.

## 2.2.2 Exemplos de operadores lineares

Em seguida apresentam-se alguns exemplos de operadores lineares mais comuns:

**Exemplo 2.2.1** O operador unitário (ou identidade)

$$\mathbf{I}x = x, \quad \forall x \in X$$

**Exemplo 2.2.2** O operador nulo

$$\mathbf{0}x = 0, \quad \forall x \in X$$

Que esteja claro que o  $\mathbf{0}$  do primeiro membro representa um operador enquanto que o  $0$  do segundo membro é o elemento zero do conjunto  $R_{\mathbf{0}}$ .

**Exemplo 2.2.3** Sejam  $D = R = X = Y = C[a, b]$ . Para qualquer função  $K : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  definamos o operador  $A : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  por:

$$(Af)(x) = \int_a^b K(x, y)f(y)dy \quad \forall f \in C[a, b] \quad (2.1)$$

$A$  é designado **operador linear integral** em  $C[a, b]$  enquanto que  $K$  é o núcleo desse operador. **Observação:** Perceba-se bem a diferença dos significados dos parêntesis do primeiro membro da equação 2.1: é definida uma função  $(Af)$  pela afirmação de que o seu valor em  $x$ ,  $(Af)(x)$ , é dado pelo integral do segundo membro.

**Exemplo 2.2.4** O operador  $\frac{d}{dt}$  de diferenciação é um dos mais ilustrativos exemplos de operadores locais pois, sabe-se muito bem que a existência da derivada num dado ponto depende muito do valor da função dada na sua vizinhança.

### 2.2.3 Operadores limitados

**Definição 2.2.7** Um operador  $A : X \rightarrow X$  diz-se *limitado* se  $\exists C = \text{const}$  tal que

$$\|Ax\| \leq C\|x\|. \quad \forall x \in X \quad (2.2)$$

**Teorema 2.2.2** Um operador aditivo é linear se e somente se este for limitado.

**Demonstração.**

1. Da necessidade

Seja  $A$  um operador linear não limitado. Por conseguinte,  $\forall n > 0 \quad \exists x_n \in X$  tal que

$$\|Ax_n\| > n\|x_n\| \quad (2.3)$$

Pode-se ver que  $Ax_n \neq 0$ , e também  $x_n \neq 0$

Suponhamos que  $x'_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$

Então  $\|x'_n\| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$

Por outro lado, como consequência da homogeneidade de um operador linear

$$Ax'_n = \frac{1}{n\|x_n\|} Ax_n$$

De (2.3) segue que  $\|Ax'_n\| > 1$  e, por isso,  $Ax'_n$  não tende para 0, o que contradiz a continuidade do operador  $A$ . Prova-se, assim, que  $A$  é limitado.

2. Da suficiência

Seja  $A$  um operador aditivo limitado, isto é,  $\exists C$ :

$$\|Ax\| \leq C\|x\| \quad (2.4)$$

Se  $x_n \rightarrow 0$ , isto é,  $\|x_n\| \rightarrow 0$ , então de (2.4) segue que  $\|Ax_n\| \rightarrow 0$ , isto é  $Ax_n \rightarrow 0$ . E, como  $A$  é contínuo no ponto 0, de acordo com o teorema (2.2.1), ele é linear.



**Definição 2.2.8** O valor mínimo da constante  $C$  que satisfaz a condição (2.2) é designado *norma* do operador  $A$  e denotado  $\|A\|$ .

Deste modo

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

e

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \quad \forall x \in X \quad (2.5)$$

Da homogeneidade do operador linear pode-se deduzir a seguinte fórmula:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

## 2.2.4 Espaço de operadores lineares

O objectivo desta abordagem é a definição das principais operações sobre operadores.

Sejam dados os conjuntos  $X$  e  $Y$  que são subconjuntos de um dado espaço linear e seja  $S$  o espaço de todos os operadores lineares que actuam de  $X$  em  $Y$ . Este espaço será denotado por  $S(X, Y)$ . Sejam dados, também, os operadores  $A, B \in S(X, Y)$ .

**Definição 2.2.9** A soma dos operadores  $A$  e  $B$ , denotada por  $A + B$ , é um operador  $C$  definido como:

$$Cx = Ax + Bx. \quad \forall x \in X$$

enquanto que o **produto** do operador  $A$  por um **escalar** (real)  $\alpha$  será, também, um operador  $C$  desta feita definido como:

$$Cx = \alpha(Ax). \quad \forall x \in X$$

□

**Definição 2.2.10** Sejam dados os operadores  $A : X \rightarrow Y$  e  $B : Y \rightarrow Z$  onde  $X, Y$  e  $Z$  são subconjuntos de um espaço linear. O operador **produto**  $BA : X \rightarrow Z$  é definido por

$$(BA)x = B(Ax). \quad \forall x \in X, \forall Ax \in Y$$

O produto de operadores não goza da comutatividade, isto é:

$$(BA) \neq (AB)$$

### Propriedades do produto de operadores

- $C(AB) = (CA)B$
- $B(A_1 + A_2) = BA_1 + BA_2$
- $(B_1 + B_2)A = B_1A + B_2A$

No geral, têm particular interesse os operadores que actuam sobre espaços de Banach.

**Proposição 2.2.1** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços normados. O conjunto de todos os operadores limitados  $X \rightarrow Y$  é um espaço normado com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas anteriormente e a norma também definida anteriormente. Este espaço será denotado por  $B(X, Y)$ . Se  $X = Y$  teremos  $B(X, X)$ .*

**Demonstração.** Provemos, antes, que  $B(X, Y)$  é um espaço linear. Se  $A, B \in B(X, Y)$ , então  $\forall b, c, d, e$  escalares e  $x, y \in X$  teremos

$$\begin{aligned}(cA + dB)(ex + by) &= cA(ex + by) + dB(ex + by) \\ &= ceAx + cbAy + deBx + dbBy \\ &= e(cA + dB)x + b(cA + dB)y\end{aligned}$$

aproveitando-nos das operações de adição, multiplicação por escalar e ainda da linearidade dos operadores  $A$  e  $B$ . Consequentemente o operador  $cA + dB$  é linear. Portanto

$$\begin{aligned}\|(cA + dB)x\| &= \|cAx + dBx\| \\ &\leq |c| \|Ax\| + |d| \|Bx\| \\ &\leq (|c| \|A\| + |d| \|B\|) \|x\|\end{aligned}$$

$\forall x \in X$  segundo a definição (2.2.8). Concluimos que  $cA + dB$  é limitado e

$$\|(cA + dB)x\| \leq (|c| \|A\| + |d| \|B\|) \|x\| \quad \blacksquare$$

A proposição anterior tem extrema utilidade na definição de séries convergentes de potências de operadores.

**Definição 2.2.11** *Sejam  $x_1, x_2, \dots$  elementos de um espaço normado. Diremos que a série  $\sum x_n$  converge absolutamente se a série numérica  $\sum \|x_n\|$  converge.*

Note-se que a convergência absoluta da série  $\sum x_n$  é independente da sua convergência no sentido da norma. Contudo, num espaço de Banach, a convergência absoluta implica convergência no sentido da norma.

**Teorema 2.2.3** *Uma série absolutamente convergente num espaço de Banach é convergente.*

**Demonstração.** Deve-se provar que, se  $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$  converge, então  $\exists x : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$ , ou seja, se

$$s_n = \sum_{r=1}^n x_r, \quad s_n \rightarrow x$$

Usando o critério de convergência de Cauchy, teremos

$$\|s_{n+p} - s_n\| = \left\| \sum_{r=n+1}^{n+p} x_r \right\| \leq \sum_{r=n+1}^{n+p} \|x_r\| \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty$$

pois  $\sum \|x_n\|$  é convergente. Consequentemente,  $\{s_n\}$  é uma sucessão fundamental num espaço de Banach convergindo, assim, para um elemento desse mesmo espaço. ■

**Proposição 2.2.2** *Os termos de uma série absolutamente convergente de operadores lineares limitados podem ser reagrupados e multiplicados entre si termo a termo.*

Falemos, agora, das séries de potências de operadores, as quais só podem ser definidas em  $B(X, X)$ .

**Proposição 2.2.3** *Sejam  $A, B \in B(X, X)$ , então o operador  $AB$  é limitado e linear e,*

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \quad (2.6)$$

**Demonstração.** Aplicando a fórmula (2.5) duas vezes, teremos

$$\|ABx\| = \|A(Bx)\| \leq \|A\| \|Bx\| \leq \|A\| \|B\| \|x\| \quad \blacksquare$$

**Teorema 2.2.4 (Séries de potências de operadores)** *Seja  $A \in B(N, N)$  e  $\{c_n\}$  uma sucessão numérica. Se a série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \|A\|^n$$

*converge absolutamente, então a série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n$$

*de operadores converge absolutamente para um elemento de  $B(N, N)$ .*

**Demonstração.** Segundo a desigualdade (2.6)  $\|A^2\| \leq \|A\|^2$ . Por conseguinte  $\|A^3\| \leq \|A\|^2 \|A\| \leq \|A\|^3$  por aí em diante e, generalizando

$$\|A^n\| \leq \|A\|^n$$

Porém, dado que  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \|A\|^n$  converge conclui-se que  $\sum_{n=0}^{\infty} \|c_n A\|^n$  também converge. Por isso

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n$  converge absolutamente e, pelo teorema (2.2.3) esta mesma série converge para um elemento de  $B(N, N)$ . ■

### 2.2.5 Operador inverso

**Definição 2.2.12** Um *operador*  $A : X \rightarrow Y$  se chama *invertível* se  $\forall y \in R_A$ , a equação

$$Ax = y$$

tem solução única.

Se  $A$  é invertível, a cada  $y \in R_A$ , associa-se um único  $x \in D_A$  que é solução de  $Ax = y$ . Ao operador que permite realizar esta correspondência chama-se *inverso de  $A$*  e denota-se por  $A^{-1}$ .

**Teorema 2.2.5** Um operador  $A^{-1}$ , inverso do operador linear  $A$ , é também linear.

**Demonstração.** Sejam  $x = A\xi$ ,  $y = A\eta$ . Então, para quaisquer escalares  $c$  e  $d$

$$\begin{aligned} A^{-1}(cA\xi + dA\eta) &= A^{-1}(cA\xi + dA\eta) \\ &= A^{-1}(Ac\xi + Ad\eta) \\ &= A^{-1}A(c\xi + d\eta) \\ &= c\xi + d\eta \\ &= cA^{-1}x + dA^{-1}y \end{aligned}$$

**Teorema 2.2.6** Se  $A : X \rightarrow Y$  é invertível, então  $A^{-1}$  é invertível e

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

**Demonstração.** Se  $A^{-1}$  existe, então, torna-se óbvio que existe uma relação de um para um entre  $X$  e  $Y$ . ■

**Teorema 2.2.7** Se  $A : X \rightarrow Y$  é invertível, então

$$AA^{-1} = I : X \rightarrow X \quad e \quad A^{-1}A = I : Y \rightarrow Y$$

**Demonstração.** A primeira parte segue da aplicação de  $A$  na equação  $y = A^{-1}x$  com  $Ay = x$ . Para a segunda parte, toma-se  $x = Ay$  na equação  $y = A^{-1}x$ . ■

**Teorema 2.2.8** Seja  $A : X \rightarrow Y$  um operador invertível. Se  $B : Z \rightarrow Y$ , então  $AB$  é invertível e

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \tag{2.7}$$

**Demonstração.**  $\forall x \in Y \quad \exists! y \in X : x = Ay$  e  $\exists! z \in Z : y = Bz$ , conseqüentemente,  $x = ABz$ . Temos ainda  $z = A^{-1}y$  e  $y = A^{-1}x$ , portanto  $z = B^{-1}A^{-1}x$  quando  $x = ABz$ , o que prova a equação (2.7).

**Proposição 2.2.4** *Sejam  $A : X \rightarrow Y$  e  $B : Y \rightarrow X$ . Sejam também  $AB = I_Y$  e  $BA = I_X$ . Então  $A$  e  $B$  são inversíveis e, além disso, cumpre-se*

$$A^{-1} = B \quad \text{e} \quad B^{-1} = A$$

**Demonstração.**  $\forall x \in Y \quad \exists y \in X : Ay = x$ , nomeadamente  $y = Bx$ . Se  $y$  é tal que  $Ay = x$ , então  $BAy = y = By$ , assim  $y$  é unicamente determinado por  $x$ . ■

**Teorema 2.2.9** *Seja  $A : X \rightarrow Y$  um operador aditivo. As duas afirmações são equivalentes:*

1.  $Ax = f$  possui solução única;
2.  $Ax = 0$  possui solução trivial.

**Demonstração.** Suponhamos que  $Ax = 0$  não tenha solução trivial, isto é,  $\exists \xi : A\xi = 0$ . Suponhamos, também, que  $\eta$  é solução de  $Ax = f$ . Então  $\xi + \eta$  é solução de  $Ax = f$ . Realmente,

$$A(\xi + \eta) = A\xi + A\eta = 0 + f = f$$

Logo, se  $\xi \neq 0$ , a solução de  $Ax = f$  não é única. ■

**Teorema 2.2.10** *A condição necessária e suficiente para a existência e linearidade do operador inverso é a seguinte:*

$$\exists m > 0 : \quad \forall x \in X \quad \|Ax\| \geq m\|x\|$$

e, além disso

$$\|A^{-1}\| \geq \frac{1}{m}$$

**Teorema 2.2.11 (operador inverso)** *Seja  $A : X \rightarrow X$ , um operador linear limitado, onde  $X$  é um espaço de Banach. Se  $\|A\| < 1$ , então  $I - A$  é invertível.  $(I - A)^{-1}$  é limitado e cumpre-se*

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

**Demonstração.** Construímos o inverso usando uma série binomial. Dado que  $\|A\| < 1$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n$  converge absolutamente. Consequentemente, pelo teorema (2.2.4),  $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$  converge para um operador linear limitado. Usando a proposição (2.2.2) podemos achar os produtos  $(I - A) \sum_{n=0}^{\infty} A^n$  e  $(\sum_{n=0}^{\infty} A^n)(I - A)$ , concluindo que são ambos iguais a  $I$ . Consequentemente

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

Daqui teremos, pela fórmula (2.6),  $\|(I - A)^{-1}\| = \|\sum_{n=0}^{\infty} A^n\| \leq \sum \|A^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = (I - A)^{-1}$  ■



**Corolário 2.2.1** *Sejam  $A$  e  $A_a = A + \Delta$  operadores lineares limitados, com  $\|A_a^{-1}\| \leq \alpha$  e  $\|\Delta\| \leq \delta$ , onde  $\alpha \cdot \delta < 1$ . Se  $x$  e  $x_a$  satisfazem*

$$Ax = b \quad \text{e} \quad A_a x_a = b$$

então

$$\|x - x_a\| \leq \frac{\alpha \cdot \delta}{1 - \alpha \cdot \delta} \|x_a\|$$

**Demonstração.**

$$\begin{aligned} x - x_a &= [(A_a - \Delta) - A_a^{-1}]b \\ &= [(\mathbf{I} - A_a^{-1}\Delta)^{-1} - \mathbf{I}]A_a^{-1}b \\ &= [(\mathbf{I} - A_a^{-1}\Delta)](\mathbf{I} - A_a^{-1}\Delta)^{-1}A_a^{-1}b \\ &= A_a^{-1}\Delta(\mathbf{I} - A_a^{-1}\Delta)^{-1}x_a \end{aligned}$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} \|x - x_a\| &\leq \|A_a^{-1}\| \|\Delta\| \|(\mathbf{I} - A_a^{-1}\Delta)^{-1}\| \|x_a\| \\ &\leq \frac{\alpha \delta}{1 - \alpha \delta} \|x_a\| \end{aligned}$$

Servindo-nos da fórmula (2.6) e do teorema (2.2.11), notamos que

$$\|x - x_a\| \leq \frac{\alpha \delta}{1 - \alpha \delta} \|x_a\| \blacksquare$$

A fórmula no corolário anterior é a estimação do erro. Como se pode ver, há pouca lógica na inclusão dos valores de  $\alpha$  e  $\delta$ . Porém, estes valores vêm cobrir, para muitos casos, a falta de conhecimento ou dificuldade do cálculo da norma de dado operador. Com o uso desta fórmula, precisamos apenas da informação sobre o operador aproximado  $A_a$  e da solução aproximada  $x_a$ . Deste modo, consegue-se uma forma útil e rigorosa de estimação do erro, mesmo quando se desconhece a solução exacta  $x$  ou ainda o inverso do operador  $A$ .

## 2.3 Operadores de contracção

Várias equações da Matemática Aplicada podem ser escritas na forma de equações operacionais num espaço métrico. Tais equações podem tomar, entre outras, a forma especial:

$$x = Ax \tag{2.8}$$

Outras equações podem ser manipuladas de modo a possuírem a forma (2.8). As soluções da equação (2.8) são denominadas **pontos fixos** do operador  $A$ .

**Definição 2.3.1** O operador  $A : E \rightarrow E$ , sendo  $(E, d)$  um espaço métrico, é denominado **operador de contracção** se existe  $\alpha < 1$  que satisfaz a seguinte condição:

$$d(Ax, Ay) \leq \alpha d(x, y), \forall x, y \in E \tag{2.9}$$

É evidente que o operador de contracção  $\mathbf{A}$  é sempre contínuo. Com efeito, se  $x_n$  e  $x_o$  forem escolhidos da região de existência do operador  $\mathbf{A}$  e  $x_n \rightarrow x_o$ , então, da desigualdade

$$d(\mathbf{A}x_n, \mathbf{A}x_o) \leq \alpha d(x_n, x_o) \quad \text{segue que} \quad \mathbf{A}x_n \rightarrow \mathbf{A}x_o$$

**Teorema 2.3.1 (de Banach)** *Se  $\mathbf{A}$  é um operador de contracção em  $E$  (espaço métrico completo), então:*

1. *existe um único ponto fixo*
2. *Para qualquer  $x_o \in X$ , a sucessão  $\{x_n\}$  definida por  $x_{n+1} = \mathbf{A}x_n$  converge para  $x$ .*

**Demonstração.** Seja  $x_o \in E$  um ponto qualquer. Da fórmula iterativa  $x_{n+1} = \mathbf{A}x_n$  e da fórmula (2.9), temos para qualquer  $n$

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(\mathbf{A}x_n, \mathbf{A}x_{n-1}) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1})$$

Por sua vez,  $d(x_n, x_{n-1}) \leq \alpha d(x_{n-1}, x_{n-2})$ . Prosseguindo  $n$  vezes obtemos:

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}) \leq \alpha^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \dots \leq \alpha^n d(x_1, x_o)$$

Vamos, agora provar que  $\{x_n\}$  é uma sucessão de Cauchy.  
Seja  $m > n$ , então

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq (\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \dots + \alpha^n) d(x_1, x_o) \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i \right) d(x_1, x_o) \\ &= \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_1, x_o) \end{aligned}$$

Nota-se que  $d(x_m, x_n) \rightarrow 0$  quando  $m, n \rightarrow \infty$ . Como  $(E, d)$  é um espaço métrico completo, então a sucessão  $\{x_n\}$  converge para um  $x$  que será o nosso ponto fixo.

A unicidade do ponto fixo segue da condição (2.9): Se  $x'$  e  $x''$  são pontos fixos, então

$$d(x', x'') = d(\mathbf{A}x', \mathbf{A}x'') \leq \alpha d(x', x'')$$

Por conseguinte,  $d(x', x'') = 0$ , i.e.,  $x' = x''$  ■

Pode-se observar que o teorema de Banach é válido para um subespaço fechado  $F \in E$  se o conjunto de valores do operador pertencer a  $F$ .

**Exemplo 2.3.1** Se considerarmos a função  $f(x) = x + e^{-x}$  como um operador que actua do conjunto  $\mathbb{R}^+$  em si mesmo, vamos notar que  $f(x)$  não é operador de contracção pois não satisfaz as condições da definição anterior. Com efeito,  $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$  temos

$$\|f(x) - f(y)\| = |f(x) - f(y)| = |x - y| \cdot |f'(z)| = \|x - y\| |f'(z)|$$

para  $x \leq z \leq y$ , pelo teorema do valor médio. Suponhamos que  $\exists a < 1$  que satisfaz a condição (2.9), então teremos

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| |f'(z)| = \|x - y\| (1 - e^z) > a \|x - y\|$$

para  $x$  e  $y$  (e portanto  $z$ ) maiores que  $-\log^{(1-a)}$ , o que contradiz 2.9. Consequentemente, não existe  $a$  que satisfaça (2.9).

**Exemplo 2.3.2** Seja  $f(x)$  uma função real diferenciável, definida no segmento  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , i.e.  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ . Pretende-se resolver a equação  $x = f(x)$ , o que equivale a achar o ponto de intersecção do gráfico de  $f(x)$  com a recta  $y = x$ .

A função  $f(x)$  é um operador actuando no segmento  $[a, b]$  que é um conjunto fechado do espaço  $\mathbb{R}$ . Se  $|f'(x)| \leq \alpha < 1$ , então o operador  $f$  é de contracção. Com efeito, pela fórmula de Lagrange,  $\forall x', x'' \in [a, b]$

$$|f(x') - f(x'')| = |f'(c)(x' - x'')| \leq \alpha |x' - x''|$$

onde  $x' \leq c \leq x''$

O teorema de Banach é aplicável. Por conseguinte, o operador  $f$  tem um único ponto fixo que pode ser obtido a partir de qualquer ponto inicial  $x_0 \in [a, b]$ . Esse ponto fixo será a solução de  $f(x) = x$ .

**Exemplo 2.3.3** Consideremos o operador do espaço  $n$ -dimensional em si mesmo, definido pelo sistema de equações lineares

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Se  $\mathbf{A}$  é um operador de contracção, podemos aplicar o método de aproximações sucessivas para achar  $x$  na equação  $x = \mathbf{A}x$ . A escolha da métrica em  $X$  definirá se  $\mathbf{A}$  é ou não um operador de contracção. Em  $\mathbb{R}^n$  podemos considerar três métricas possíveis, cada uma das quais terá as suas condições de contracção:

a) Se  $d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$

$$\begin{aligned} d(y', y'') &= \max_i |y'_i - y''_i| = \max_i \left| \sum_j a_{ij} (x'_j - x''_j) \right| \leq \max_i \sum_j |a_{ij}| |x'_j - x''_j| \leq \\ &\leq \max_i \sum_j |a_{ij}| \max_j |x'_j - x''_j| = \\ &= \left( \max_i \sum_j |a_{ij}| \right) d(x', x'') \end{aligned}$$

donde podemos deduzir a condição de contracção

$$\left( \sum_j |a_{ij}| \right) \leq \alpha < 1 \quad (2.10)$$



b) Seja

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Buniakovski, teremos:

$$d^2(y', y'') = \sum_i \left( \sum_j a_{ij}(x'_j - x''_j) \right)^2 \leq \left( \sum_i \sum_j a_{ij}^2 \right) d^2(x', x'')$$

que nos leva à condição de contracção

$$\left( \sum_i \sum_j a_{ij}^2 \right) \leq \alpha < 1 \quad (2.11)$$

c) Seja

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

$$\begin{aligned} d(y', y'') &= \sum_i |y'_i - y''_i| = \sum_i \left| \sum_j a_{ij}(x'_j - x''_j) \right| \leq \sum_i \sum_j |a_{ij}| |x'_j - x''_j| \leq \\ &\leq \left( \max_j \sum_i |a_{ij}| \right) d(x', x'') \end{aligned}$$

donde podemos deduzir a condição de contracção

$$\left( \sum_i |a_{ij}| \right) \leq \alpha < 1, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.12)$$

Consequentemente, se se verifica uma das condições (2.10), (2.11) e (2.12), existe um e único ponto  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  tal que

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Além disso podemos ter aproximações sucessivas na forma

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \\ x^{(1)} &= (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}) \\ &\dots \\ x^{(n)} &= (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}) \end{aligned}$$

donde

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i$$

e  $x^{(0)}$  pode ser qualquer ponto de  $\mathbb{R}^n$ . Qualquer uma das condições (2.10), (2.11) e (2.12) é suficiente para que o operador  $\mathbf{A}$  seja de contracção.

Nenhuma das 3 condições é necessária para que se possa aplicar o método de aproximações sucessivas. Se  $|a_{ij}| < \frac{1}{2}$ , cumprem-se as 3 condições e é aplicável o método de aproximações sucessivas. Se  $|a_{ij}| = \frac{1}{2}$ , as 3 somas são iguais a 1 e o método de aproximações sucessivas não é aplicável.

**Exemplo 2.3.4** Vamos obter o teorema de existência e unicidade da solução de uma equação diferencial a partir do teorema de Banach. Consideremos a equação

$$y' = f(x, y) \quad (2.13)$$

com a condição inicial

$$y|_{x=x_0} = y_0 \quad (2.14)$$

onde  $f(x, y)$  é contínua no rectângulo  $\Delta(|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b)$  e  $|f(x, y)| \leq M$  e  $f(x, y)$  satisfaz a **condição de Lipschitz** em relação à variável  $y$ , i.e.:

$$\exists K > 0 \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2| \quad \forall (x, y) \in \Delta \quad (2.15)$$

A condição de Lipschitz é satisfeita, em particular, se a função  $f(x, y)$  tem, em  $\Delta$ , uma derivada parcial limitada em relação a  $y$ , i.e.  $|\frac{\partial f}{\partial y}| \leq K$

Se é satisfeita a condição (2.15), pode-se provar que é possível achar  $h > 0$ , suficientemente pequeno, tal que no segmento  $\delta = [x_0 - h, x_0 + h]$  exista uma única solução da equação (2.13) e que satisfaça a condição inicial (2.14).

Para tal, façamos  $\int_{x_0}^x y' dx = y - y_0$  e, portanto,

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y) dt \quad (2.16)$$

A equação (2.16) é equivalente à equação (2.13) com a condição inicial (2.14).

Consideremos o espaço  $C[x_0 - h, x_0 + h]$  e denotemos  $\delta = C[x_0 - h, x_0 + h]$  e  $F \subset \delta$  o conjunto das funções  $y = y(x)$  para as quais  $x \in \delta$ ,  $y_0 - b \leq y(x) \leq y_0 + b$ .

No espaço  $C$ , o conjunto  $F$  é uma bola fechada de raio  $b$  e centro  $y = y_0$  (constante). Consequentemente  $F$  é um conjunto fechado.

Definamos o operador  $z = \mathbf{A}y$ , i.e.

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, y(t)] dt \quad t \in \delta \quad (2.17)$$

$\forall y \in F$

Verifica-se que todos os valores do operador  $\mathbf{A}$  pertencem a  $F$  e  $\mathbf{A}$  é um operador de contracção.

Se  $y \in F$ , então  $\forall x \in \delta$ , o ponto  $(x, y(x)) \in \Delta$ . Consequentemente o segundo membro da equação (2.17) tem sentido e  $z \in C$ . Além disso  $|f(x, y(x))| \leq M$  e, portanto,  $\forall x \in \delta$

$$|z(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f[t, y(t)] dt \right| \leq M|x - x_0| \leq Mh \leq M \frac{b}{M} = b$$

Consequentemente  $z \in F$ .

Sejam  $y, \tilde{y} \in F$ .  $z = Ay$ ,  $\tilde{z} = A\tilde{y}$ . Usando a condição de Lipschitz,  $\forall x \in \delta$ , temos:

$$\begin{aligned} |z(x) - \tilde{z}(x)| &= \left| \int_{x_0}^x f[x, y(x)] dx - \int_{x_0}^x f[x, \tilde{y}(x)] dx \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x f[x, y(x)] - f[x, \tilde{y}(x)] dx \right| \leq K \int_{x_0}^x |y(x) - \tilde{y}(x)| dx \leq \\ &\leq K \cdot \max_{x \in \delta} |y(x) - \tilde{y}(x)| |x - x_0| \leq K \rho(y, \tilde{y}) h = \alpha \rho(y, \tilde{y}) \end{aligned}$$

onde  $\alpha = Kh < 1$

Consequentemente  $\rho(z, \tilde{z}) \leq \alpha \rho(y, \tilde{y})$ .

Portanto, o teorema de Banach é aplicável para o operador  $A$  e este tem um ponto fixo que é única solução da equação (2.13) no segmento  $\delta$ .

## 2.4 Equações integrais

Começaremos o nosso estudo com as noções de operador integral.

Seja  $K(x, y)$  uma função complexa de variáveis reais:  $K(x, y)$  é definida no quadrado  $a \leq x \leq b$ ,  $a \leq y \leq b$ .  $a$  e  $b$  podem ser infinitos. Esta função gera a transformação integral:

$$z(x) = A\varphi = \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy \quad (2.18)$$

A função  $K(x, y)$  é denominada **núcleo do operador** (2.18).

O operador  $A$  é linear, quer dizer:

1.  $A(\varphi_1 + \varphi_2) = A\varphi_1 + A\varphi_2$
2.  $A(\alpha\varphi) = \alpha A\varphi$

Designa-se **Equação integral** a qualquer equação que envolve uma função  $\varphi(x)$ , desconhecida, e os seus integrais, resolvida em função de  $\varphi(x)$ . As seguintes equações, para  $\varphi(x)$  e  $\lambda$  dados

$$A\varphi = f \quad \text{isto é} \quad \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = f(x) \quad a \leq x \leq b \quad (2.19)$$

$$A\varphi = \lambda\varphi \quad \text{isto é} \quad \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = \lambda\varphi(x) \quad a \leq x \leq b \quad (2.20)$$

$$A\varphi = \lambda\varphi + f \quad \text{isto é} \quad \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = \lambda\varphi(x) + f(x) \quad a \leq x \leq b \quad (2.21)$$

são conhecidas como **Equações integrais de Fredholm**<sup>1</sup>. Note-se que nas equações integrais de Fredholm os limites de integração são constantes.

As equações (2.19) e (2.21) são *não homogêneas* enquanto que a equação (2.20) é *homogênea*. Apesar da equação (2.19) poder ser obtida de (2.21) para  $\lambda = 0$ , há razões suficientes para a distinção do tratamento de cada uma delas.

A equação (2.20) é considerada um problema do autovalor:

- Para a maior parte dos valores de  $\lambda$ , a única solução é  $\varphi = 0$  (solução trivial).
- Os valores de  $\lambda$  para os quais existe a solução não trivial são denominados **autovalores** e as funções  $\varphi(x)$  correspondentes são as **auto-funções**.

Se variarmos o limite superior do integral para  $b = x$  teremos uma equação conhecida como **Equação de Volterra**<sup>2</sup>, que não é mais do que um caso particular da equação de Fredholm com núcleo:

$$\tilde{K}(x, y) = \begin{cases} 0, & y > x; \\ K(x, y), & y < x. \end{cases} \quad (2.22)$$

As equações integrais de Volterra subdividem-se em dois tipos:

- **Equação integral de Volterra de 1ª espécie** - quando a função desconhecida se encontra somente sob sinal integral.

$$f(x) = \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt \quad (2.23)$$

- **Equação integral de Volterra de 2ª espécie** - quando a função desconhecida se encontra tanto dentro como fora do sinal integral.

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt \quad (2.24)$$

onde  $f(x)$ ,  $K(x, t)$  são funções conhecidas e  $\varphi(x)$  é a função incógnita.

### Propriedades

1. A equação (2.21) tem, no mínimo, uma solução, a menos que a equação (2.20) tenha uma solução não-trivial.

<sup>1</sup>Erik Ivar Fredholm(1866-1927)-matemático russo

<sup>2</sup>Vito Volterra(1860-1949)-matemático italiano

2. Se  $u$  e  $v$  são auto-funções correspondentes ao mesmo autovalor  $\lambda$  da equação (2.20), então:

$$\alpha u + \beta v$$

é também uma auto-função correspondente a  $\lambda$ .

Chama-se **solução** da equação integral (2.23) ou (2.24) à função  $\varphi(x)$  que, ao ser substituída na referida equação a transforma numa identidade (em relação a  $x$ ).

**Exemplo 2.4.1**  $\varphi(x) = 3$  é solução da equação integral de Volterra de 1ª espécie  $x^3 = \int_0^x (x-t)^2 \varphi(t) dt$

Com efeito, ao substituirmos, teremos:

$$x^3 = \int_0^x (x-t)^2 3 dt \iff x^3 = -(x-t)^3 \Big|_{t=0}^x = x^3 \text{ que é, realmente, uma identidade.}$$

Pode-se aplicar o teorema de Banach para uma equação de Volterra de 2ª espécie

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t) \varphi(t) dt \quad (2.25)$$

Suponhamos que  $K(x,y)$  e  $\varphi(x)$  são contínuas quando  $x,y \in [a,b]$ . Por conseguinte  $|K(x,y)| \leq M$ .

Seja  $\mathbf{A} : C[a,b] \rightarrow C[a,b]$  definido por  $g = \mathbf{A}f$ .

Teremos  $d(g_1, g_2) = \max |g_1(x) - g_2(x)| \leq |\lambda| M(b-a) \max |f_1(x) - f_2(x)|$  o que torna  $\mathbf{A}$  um operador de contracção quando

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$$

Portanto, quando  $\lambda$  é definido pela expressão anterior, a equação (2.25) tem solução única.

As equações integrais podem ser resolvidas usando diversos métodos, dos quais se destacam:

1. Método das resolventes
2. Método das aproximações sucessivas

Seja dada a equação

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t) \varphi(t) dt \quad (2.26)$$

onde  $K(x,t)$  é contínua para  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq t \leq x$  e  $f(x)$  é contínua para  $0 \leq x \leq a$ .

O **método das resolventes**[16] consiste em:

1. Procurar a solução na forma

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda \varphi_1(x) + \lambda^2 \varphi_2(x) + \dots + \lambda^n \varphi_n(x) + \dots$$

2. Achar a função

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^{\nu} K_{\nu+1}(x, t) \quad (2.27)$$

denominada **Resolvente**(ou **núcleo resolvente**) da equação integral (2.26).  
Na equação (2.27)

$$K_{\nu+1}(x, t) = \int_t^x K(x, z)K_{\nu}(z, t)dz, \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (2.28)$$

$$K_1(x, t) = K(x, t)$$

3. Achar a solução na forma

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^t R(x, t; \lambda)f(t)dt \quad (2.29)$$

O método das aproximações sucessivas consiste em achar a solução da equação integral (2.24) como:

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x)$$

onde  $\varphi_n(x)$  é determinado iterativamente

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)\varphi_{n-1}(t)dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

sendo a função  $f(x)$  frequentemente atribuída a  $\varphi_0(x)$  para iniciar o processo de iteração.

A maior parte dos métodos aproximados de resolução de equações integrais baseia-se nos métodos das resolventes e das aproximações sucessivas. Tem-se, como objectivo principal obter um núcleo resolvente aproximado ou as funções iteradas numa forma específica e fácil de manipular. Destacam-se os seguintes métodos aproximados:

### 1. Substituição do núcleo por um núcleo degenerado

Consiste na substituição do núcleo  $K(x, t)$  por um núcleo degenerado  $L(x, t)$ .

Chama-se **núcleo degenerado** ao núcleo que pode ser escrito na forma:

$$L(x, t) = \sum_{k=1}^n a_k(x)b_k(t)$$

onde as funções  $a_k(x)$  e  $b_k(t)$  ( $k = 1, \dots, n$ ) são contínuas no quadrado  $a \leq x, t \leq b$  e linearmente independentes.

Se, na equação

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)\varphi(t)dt$$

substituímos  $K(x, t)$  pelo núcleo degenerado  $L(x, t)$  passaremos a ter:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n a_k(x) \int_0^x b_k(t) \varphi(t) dt \quad (2.30)$$

Introduzamos as notações

$$\int_0^x b_k(t) \varphi(t) dt = C_k, \quad k = 1, \dots, n$$

Então, a equação (2.30) toma a forma

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n C_k a_k(x) \quad (2.31)$$

sendo  $C_k$  constantes desconhecidas.

Deste modo, a resolução de uma equação integral com núcleo degenerado se reduz a achar as constantes  $C_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Substituindo a equação (2.31) na equação (2.30), teremos

$$\sum_{m=1}^n \left\{ C_m - \int_0^x b_m(t) \left[ f(t) + \lambda \sum_{k=1}^n C_k a_k(t) \right] dt \right\} a_m(x) = 0$$

Devido à independência linear das funções  $a_m(x)$  ( $m = 1, 2, \dots, n$ ) se deduz que

$$C_m - \int_0^x b_m(t) \left[ f(t) + \lambda \sum_{k=1}^n C_k a_k(t) \right] dt = 0$$

ou seja

$$C_m - \lambda \sum_{k=1}^n C_k \int_0^x a_k(t) b_m(t) dt = \int_0^x b_m(t) f(t) dt$$

Introduzamos, para simplificar a escrita, as notações

$$a_{km} = \int_0^x a_k(t) b_m(t) dt, \quad f_m = \int_0^x b_m(t) f(t) dt$$

Obtemos, então

$$C_m - \lambda \sum_{k=1}^n a_{km} C_k = f_m, \quad m = 1, 2, \dots, n$$

que é o mesmo que

$$\begin{aligned}
 (1 - \lambda a_{11})C_1 - \lambda a_{12}C_2 - \dots - \lambda a_{1n}C_n &= f_1 \\
 \lambda a_{21}C_1 + (1 - \lambda a_{22})C_2 - \dots - \lambda a_{2n}C_n &= f_2 \\
 \dots &\dots \\
 \lambda a_{n1}C_1 + \lambda a_{n2}C_2 - \dots + (1 - \lambda a_{nn})C_n &= f_n
 \end{aligned}
 \tag{2.32}$$

Achemos o determinante  $\Delta(\lambda)$  do sistema (2.32)

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & 1 - \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix}$$

Se  $\Delta(\lambda) \neq 0$ , o sistema (2.32) tem solução única  $C_1, C_2, \dots, C_n$  que pode ser obtida pelo método de Cramer

$$C_k = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & \dots & -\lambda a_{1k-1}f_1 - \lambda a_{1k+1} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \dots & -\lambda a_{2k-1}f_2 - \lambda a_{2k+1} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{n1} & \dots & -\lambda a_{nk-1}f_n - \lambda a_{nk+1} & \dots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix}$$

$k = 1, \dots, n$

Finalmente, a solução da equação integral (2.30) será a função  $\varphi(x)$  dada pela expressão

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^n C_k a_k(x)$$

2. Método de Bubnov-Galiorkin Consiste na busca da solução na forma

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k u_k(x)$$

onde o sistema de funções  $\{u_n(x)\}$  é escolhido de modo que seja completo no espaço  $L_2(a, b)$  e as funções  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$  são linearmente independentes para qualquer  $n$ .

Os coeficientes  $a_k (k = 1, \dots, n)$  são determinados com ajuda da seguinte fórmula:

$$(\varphi_n(x), u_k(x)) = (f(x), u_k(x)) + \lambda \left( \int_a^b K(x, t) \varphi_n(t) dt, u_k(t) \right)$$



## Capítulo 3

# Elementos da Teoria de Equações diferenciais funcionais

### 3.1 Introdução

A teoria das Equações Diferenciais Funcionais(EDF)[13] teve seu início nos finais do século XVIII através das investigações de Bernoulli<sup>1</sup>, Laplace<sup>2</sup> e Condorcet<sup>3</sup>. Este ramo teve muito pouca apreciação por parte dos investigadores no século XIX e nos princípios do século XX. Só a partir da 3ª década do século XX é que se retomou e, com mais afinco, o interesse pelas EDF. Em várias aplicações o comportamento futuro dos fenómenos é associado às soluções de uma equação diferencial ordinária, quer dizer, o futuro comportamento de uma dada variável é definitivamente amarrado ao presente e considerado independente de qualquer estado anterior ou posterior. A ideia das EDF surge para cobrir esta lacuna. Nas EDF, o passado ou o futuro podem ter uma influência significativa sobre um estado presente de uma certa variável. É o caso das equações com retardamento e avanço. Verifica-se que muitos modelos podem ser melhor representados usando EDF em vez de equações diferenciais ordinárias. A aplicação das EDF estende-se para várias áreas desde a Biologia, Física, Economia até às Telecomunicações.

### 3.2 Noções básicas

Antes de detalhes sobre as EDF, apresentaremos algumas notações que iremos usar ao longo de nossa abordagem[15].

O operador diferencial será representado por

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x$$

O operador  $A^*$  é o operador adjunto do operador  $A$ .

O conjunto de soluções linearmente independentes da equação  $Ax = 0$  chama-se **espaço nulo**

---

<sup>1</sup>John Bernoulli(1667-1748)-matemático alemão

<sup>2</sup>Pierre Simon Laplace(1749-1827)-matemático francês

<sup>3</sup>Marquis de Condorcet- matemático, filósofo e revolucionário francês

ou núcleo de  $A$  e denota-se por  $\ker A$ .

A dimensão do conjunto linear  $M$  denota-se  $\dim M$ .

**Definição 3.2.1** Diz-se que o operador  $A : X \rightarrow Y$  é **noetheriano** se:

1. é **normalmente resolúvel**, quer dizer, o conjunto  $R(A)$  é fechado;
2.  $\dim \ker A < \infty$
3.  $\dim \ker A^* < \infty$

Ao número

$$\text{ind} A = \dim \ker A - \dim \ker A^*$$

chamaremos **índice** do operador  $A$ .

Um operador linear  $A$ , actuando de  $X$  em um produto  $Y_1 \times Y_2$  é denotado por um par de operadores  $A_1 : X \rightarrow Y_1$  e  $A_2 : X \rightarrow Y_2$ , de modo que  $Ax = \{A_1x, A_2x\}$ ,  $x \in X$ . Portanto, este operador será denotado por

$$A = [A_1, A_2]$$

Contrariamente, o operador que actua de  $X_1 \times X_2$  em  $Y$ , onde  $X_1, X_2$  e  $Y$  são espaços de Banach, tal que

$$A\{x_1, x_2\} = A_1x_1 + A_2x_2, \quad x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$$

será denotado por

$$A = \{A_1, A_2\}$$

onde  $A_1x_1 = A\{x_1, 0\}$ ,  $A_2x_2 = A\{0, x_2\}$

Vamos particularizar estas notações para casos concretos que utilizaremos adiante. O operador linear que actua de  $B \times \mathbb{R}^n$  em  $D$ , onde  $B, \mathbb{R}^n$  e  $D$  são espaços de Banach, será definido pelo par de operadores  $\Lambda : B \rightarrow D$  e  $Y : \mathbb{R}^n \rightarrow D$ , de tal forma que:

$$\{\Lambda, Y\}\{z, \beta\} = \Lambda z + Y\beta, \quad z \in B, \beta \in \mathbb{R}^n$$

Reciprocamente, o operador linear actuando de  $D$  em  $B \times \mathbb{R}^n$  será definido por  $\delta : D \rightarrow B$  e  $r : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , de modo que

$$[\delta, r]x = \{\delta x, rx\}, \quad x \in D$$

Se o operador limitado  $\{\Lambda, Y\} : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow D$  for inverso do operador  $[\delta, r] : D \rightarrow B \times \mathbb{R}^n$ , então

$$x = \Lambda \delta x + Yrx \tag{3.1}$$

com

$$\delta(\Lambda + Y\beta) = z, \quad r(\Lambda + Y\beta) = \beta, \quad \{z, \beta\} \in B \times \mathbb{R}^n$$

e, consequentemente

$$\Lambda \delta + Yr = I, \quad \delta \Lambda = I, \quad \delta Y = 0, \quad r \Lambda = 0, \quad rY = I$$

O operador finito-dimensional  $Y : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow D$  será identificado por um vector  $(y_1, \dots, y_n)$ ,  $y_i \in D$ , onde

$$Y\beta = \sum_{i=1}^n y_i \beta^i, \quad \beta = \text{col}(\beta^1, \dots, \beta^n)$$

Os componentes do vector-funcional  $r$  são denotados por  $r_1, \dots, r_n$ .

Se  $l = l^1, l^2, \dots, l^m : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  é um vector-funcional,  $X = (x_1, \dots, x_n)$  é um vector cujos  $x_i \in D$ , então  $lX$  denota a  $m \times n$ -matriz cujas colunas são valores do vector-funcional  $l$  sobre os componentes de  $X : lX = (l^i x_j)$

**Definição 3.2.2** Diz-se que uma equação é diferencial funcional(EDF) se esta possui a forma

$$\dot{x} = \mathbf{F}x \quad (3.2)$$

onde  $\mathbf{F}$  é um operador definido no espaço  $D$  das funções absolutamente contínuas.

Uma das mais úteis e simples formas que pode tomar a equação (3.2) é a seguinte:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad (3.3)$$

### 3.2.1 Classificação das EDF

A classificação das EDF pode basear-se em vários aspectos tais como: a dependência(efeito) temporal do processo em estudo, a sua linearidade, a posição do argumento, etc.

**Definição 3.2.3** A equação (3.3) diz-se linear se

$$f(t, \phi) = g(t, \phi) + h(t)$$

onde a função  $g(t, \phi)$  é linear em  $\phi$ , ou seja  $g(t, \alpha\phi_1 + \beta\phi_2) = \alpha g(t, \phi_1) + \beta g(t, \phi_2)$

Por sua vez, a equação

$$f(t, \phi) = g(t, \phi) + h(t)$$

será:

1. linear homogênea, se

$$h(t) \equiv 0$$

2. linear não-homogênea, se

$$h(t) \neq 0$$

3. Autônoma, se

$$f(t, \phi) = u(\phi)$$

**Definição 3.2.4** Uma EDF chama-se **integro-diferencial** quando a variável independente  $t$  do segundo membro da  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$  se encontra sob sinal integral. Além da linearidade e da posição da variável independente, podemos classificar as EDF de acordo com o seu efeito temporal, a saber:

- equações com retardamento
  - concentrado;
  - distribuído.
- equações neutras;
- equações pós-efeito.

**Definição 3.2.5** Diz-se que uma EDF é uma equação diferencial com **argumento retardado** se esta tiver uma dependência explícita num estado passado. Possui a seguinte representação geral:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t - \tau)), \quad \tau > 0 \quad (3.4)$$

**Definição 3.2.6** Uma EDF diz-se **equação diferencial neutra** se, para além da sua dependência em um estado passado, tem também uma dependência temporal na taxa de variação do fenómeno em causa, isto é, sua equação representativa tem a forma:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t - \tau), \dot{x}(t - \tau)), \quad \tau > 0 \quad (3.5)$$

**Definição 3.2.7** Chama-se EDF equação diferencial pós-efeito (ou com argumento avançado) à equação do tipo

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t + \tau)), \quad \tau > 0 \quad (3.6)$$

**Definição 3.2.8** Denomina-se EDF **mista** àquela que pode englobar tanto características de uma equação com argumento avançado como as de uma equação com argumento retardado. Entretanto, a EDF mista apresenta a seguinte estrutura

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t - \tau), x(t + \tau)), \quad \tau > 0 \quad (3.7)$$

### 3.2.2 Exemplos de EDF

Em seguida serão apresentados alguns exemplos de EDF que esclareçam a classificação anterior bem como alguns que ficaram historicamente conhecidos devido à sua importância.

**Exemplo 3.2.1** A equação

$$\dot{x}(t) = -x(t - \tau), \quad \tau > 0 \quad (3.8)$$

é um caso de uma equação diferencial linear com argumento retardado.

**Exemplo 3.2.2** A equação

$$\dot{x}(t) = \int_a^b K(t, s, x(s)) ds$$

é uma equação integro-diferencial.

**Exemplo 3.2.3** Tomemos a equação

$$\dot{x}(t) = \alpha \dot{x}(t - \tau) - \beta x(t - \tau), \quad \tau > 0, \alpha \neq 0 \quad (3.9)$$

Esta representa uma EDF neutra.

**Exemplo 3.2.4** Uma das mais simples representantes de uma equação avançada é a seguinte

$$\frac{dy(r)}{dt} = y(r + \tau) \quad (3.10)$$

**Exemplo 3.2.5** Naturalmente, podemos exemplificar uma equação mista através da equação

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t - \tau) - \beta x(t + \tau), \quad \tau > 0, \alpha \neq 0, \beta \neq 0 \quad (3.11)$$

**Exemplo 3.2.6** A equação integro-diferencial

$$\begin{aligned} \dot{N}_1(t) &= [\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) - \int_{-r}^0 F_1(-\theta) N_2(t + \theta) d\theta] N_1(t) \\ \dot{N}_2(t) &= [-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1(t) + \int_{-r}^0 F_2(-\theta) N_1(t + \theta) d\theta] N_2(t) \end{aligned}$$

onde  $N_1$  e  $N_2$  representam, respectivamente, o número de presas e de predadores, foi usada por Volterra para representar o modelo predador-vítima.

### 3.3 Equações lineares e problemas lineares de fronteira

Consideremos a equação do tipo

$$\dot{x} = \mathbf{F}x$$

com o operador  $\mathbf{F}$  definido no espaço  $D$  das funções absolutamente contínuas  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , nomeadamente, as que se podem representar na forma

$$x(t) = \int_a^t z(s) ds + \beta, \quad z \in L, \quad \beta \in \mathbb{R}^n \quad (3.12)$$

onde  $L$  é o espaço das funções somáveis  $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  e, para fixar ideias podemos considerar  $\beta = x(a)$ .

O espaço  $D$  é isomórfico ao produto directo  $L \times \mathbb{R}^n$  e torna-se espaço de Banach com a norma:

$$\|x\|_D = \|z\|_L + \|x(a)\|_{\mathbb{R}^n} \quad (3.13)$$

onde a norma do espaço  $L$  é dada por:

$$\|z\|_L = \int_a^b \|z(s)\|_{\mathbb{R}^n} ds \quad (3.14)$$

Na teoria da equação (3.2), o facto de o espaço  $L$  ser também de Lebesgue é usado apenas para permitir a representação clara dos operadores e algumas de suas propriedades neste espaço. Porém, quando se substitui o espaço  $L$  por um espaço  $B$ , de Banach, na equação (3.2), muitos dos fundamentos da teoria geral de (3.2) permanecem.

A generalização em causa tem em vista a aplicação de alguns teoremas e conhecimentos da Análise bem como a substituição de operadores locais por gerais actuando de  $D \simeq B \times \mathbb{R}^n$  em  $B$ .

O isomorfismo, neste caso,  $\mathcal{J} : L \times \mathbb{R}^n \rightarrow D$  será definido por:

$$x(t) = \int_a^t z(s) ds + \beta, \quad \{z, \beta\} \in L \times \mathbb{R}^n \quad (3.15)$$

Nesse caso

$$(\Lambda z)(t) = \int_a^t z(s) ds, \quad (\mathbf{Y}\beta)(t) = E, \quad \delta x = \dot{x}, \quad r x = x(a)$$

sendo  $E$  a  $n \times n$ -matriz identidade.

A teoria das EDF lineares abstractas baseia-se nos teoremas sobre equações lineares em espaços de Banach. Os teoremas aqui apresentados não serão, na sua maioria demonstrados, podendo a sua demonstração ser encontrada em [15] (Azbelev, Maksimov e Rakhmatullina, "Methods of the contemporaneous theory of functional differential equations"). Para cada teorema enunciado será indicado o correspondente do referido livro [15] entre parêntesis.

**Teorema 3.3.1 (Teorema 1.8)** *O operador linear limitado  $\{\Lambda, \mathbf{Y}\} : B \times \mathbb{R}^n \rightarrow D$  possui um inverso limitado, se e somente se são satisfeitas as condições seguintes:*

1. O operador  $\Lambda : B \rightarrow D$  é noetheriano e  $\text{ind} \Lambda = -n$
2.  $\dim \ker \Lambda = 0$
3. Se  $\lambda^1, \dots, \lambda^n$  é base de  $\ker \Lambda^*$  e  $\lambda = [\lambda^1, \dots, \lambda^n]$ , então  $\det \lambda \mathbf{Y} \neq 0$

**Teorema 3.3.2 (Teorema 1.9)** *O operador linear limitado  $[\delta, \mathbf{r}] : D \rightarrow B \times \mathbb{R}^n$  possui um inverso limitado, se e somente se são satisfeitas as condições seguintes:*

1. O operador  $\delta : D \rightarrow B$  é noetheriano e  $\text{ind} \delta = n$
2.  $\dim \ker \delta = n$
3. se  $x_1, \dots, x_n$  é base de  $\ker \delta$  e  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ , então  $\det r X \neq 0$

**Definição 3.3.1** A equação

$$\mathcal{L}x = f$$

designa-se EDF **linear abstracta** se  $\mathcal{L} : D \rightarrow B$  é um operador linear.  $D$  e  $B$  são espaços de Banach e  $D$  é isomórfico ao produto  $B \times \mathbb{R}^n$  ( $D \simeq B \times \mathbb{R}^n$ ).

O problema

$$(\mathcal{L}x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x}(t) - P(t)x(t) = f(t) \quad x(a) = \alpha, \quad t \in [a, b] \quad (3.16)$$

é chamado **Problema de Cauchy**.

Segundo o exemplo (2.3.4), a equação (3.16) é unicamente resolúvel para qualquer  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  e  $f \in L$  se os elementos da  $n \times n$ -matriz  $P$  forem somáveis.

A solução do problema de Cauchy pode ser representada na forma

$$x(t) = X(t) \int_a^t X^{-1}(s) f(s) ds + X(t) \alpha \quad (3.17)$$

sendo  $X$  a matriz fundamental tal que  $X(a)$  é matriz identidade. A equação (3.17) é denominada **fórmula de Cauchy**.

A fórmula de Cauchy é a base para a investigação na teoria das equações diferenciais ordinárias. Porém, o problema de Cauchy para EDF não é, em geral, resolúvel mas alguns problemas de fronteira podem ser resolúveis. Entretanto, os problemas de fronteira desempenham o mesmo papel nas EDF que o problema de Cauchy nas equações diferenciais ordinárias.

Seja  $l = [l^1, l^2, \dots, l^m] : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  um operador vector-funcional limitado,  $\alpha = \text{col}\{\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^m\} \in \mathbb{R}^m$ .

O sistema

$$\mathcal{L}x = f, \quad lx = \alpha \quad (3.18)$$

é designado **Problema linear de fronteira**.

Para o caso em que  $l = r$ , o sistema (3.18) será chamado **Problema principal de fronteira**.

Assumiremos que  $\mathcal{L} : D \rightarrow B$  é limitado. Podemos aplicar  $\mathcal{L}$  em ambos os membros da equação (3.1).

$$\begin{aligned} \mathcal{L}x &= \mathcal{L}(\Lambda \delta x + Yrx) \\ &= \mathcal{L}\Lambda \delta x + \mathcal{L}Yrx \end{aligned}$$

obtendo a decomposição

$$\mathcal{L}x = Q\delta x + Arx \quad (3.19)$$

onde

$Q = \mathcal{L}\Lambda : B \rightarrow B$  é a **parte principal** de  $\mathcal{L}$ .

$A = \mathcal{L}Y : \mathbb{R}^n \rightarrow B$  é a **parte finita-dimensional** de  $\mathcal{L}$ .

**Teorema 3.3.3** (teorema 2.1) Um operador  $\mathcal{L} : D \rightarrow B$  é noetheriano se, e somente se, a parte principal  $Q : B \rightarrow B$  for noetheriana. Neste caso:

$$\text{ind}\mathcal{L} = \text{ind}Q + n$$

### 3.4 Existência e unicidade de soluções

Nesta secção serão apresentadas algumas condições para a existência e unicidade das soluções. De salientar que os métodos usados para provar a existência são generalizações dos métodos encontrados na teoria das equações diferenciais ordinárias.

Ao vector  $X = (x_1, \dots, x_n)$ , cujos componentes constituem a base para o núcleo de  $\mathcal{L}$ , chamaremos **vector fundamental** da equação  $\mathcal{L}x = 0$  e aos seus componentes  $x_1, \dots, x_n$  **sistema fundamental** de soluções desta equação.

A questão de resolubilidade do problema linear de fronteira

$$\mathcal{L}x = f, \quad lx = \alpha \quad (3.20)$$

quando  $R(\mathcal{L}) = B$  e  $\dim \ker \mathcal{L} = n$  reduz-se à resolubilidade de um sistema linear de equações algébricas com a matriz

$$LX = (l^i x_j), \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n$$

A afirmação anterior é evidente pois a solução geral da equação  $\mathcal{L}x = f$  tem a forma

$$x = \sum_{j=1}^n c_j x_j + v \quad (3.21)$$

onde  $v$  é qualquer solução desta equação e  $c_1, \dots, c_n$  são constantes arbitrárias.

O problema (3.20) é resolúvel se, e somente se, o sistema algébrico

$$\sum_{j=1}^n l^i x_j c_j = \alpha^i - l^i v, \quad i = 1, \dots, m$$

é resolúvel em ordem a  $c_1, \dots, c_n$ .

Neste caso, o problema (3.20) tem solução única  $\forall f \in B, \alpha \in \mathbb{R}^n$  se, e somente se,  $m = n$  e  $\det LX \neq 0$  onde  $\det LX$  é o determinante do problema (3.20).

**Teorema 3.4.1** [15] *O problema principal de fronteira*

$$\mathcal{L}x = f, \quad rx = \alpha \quad (3.22)$$

é unicamente resolúvel se, e somente se, a parte principal  $Q : B \rightarrow B$  de  $\mathcal{L}$  tiver um inverso limitado  $Q^{-1} : B \rightarrow B$ .

A solução  $x$  de (3.22) terá a representação

$$x = \Lambda Q^{-1} f + (Y - \Lambda Q^{-1} A) \alpha \quad (3.23)$$

**Demonstração.**[15] Se  $Q$  é invertível então, usando a decomposição

$$\mathcal{L}x = Q\delta x + Arx$$

reescrevemos a equação (3.22) na forma

$$Q\delta x + Arx = f, \quad rx = \alpha$$



Passaremos a ter

$$Q\delta x = f - Arx, \quad rx = \alpha$$

$$Q\delta x = f - A\alpha$$

$$\delta x = Q^{-1}f - Q^{-1}A\alpha$$

Aplicando  $\Lambda$  a esta equação, teremos

$$\Lambda\delta x = \Lambda Q^{-1}f - \Lambda Q^{-1}A\alpha$$

Visto que  $\Lambda\delta = I - Yr$

$$(I - Yr)x = \Lambda Q^{-1}f - \Lambda Q^{-1}A\alpha$$

$$Ix - Yrx = \Lambda Q^{-1}f - \Lambda Q^{-1}A\alpha$$

$$x - Y\alpha = \Lambda Q^{-1}f - \Lambda Q^{-1}A\alpha$$

resultando em

$$x = \Lambda Q^{-1}f + (Y - \Lambda Q^{-1}A)\alpha$$

Porém, se  $Q$  não é invertível e  $y$  não é uma solução não-trivial da equação  $Qy = 0$ , o sistema homogêneo

$$\mathcal{L}x = 0, \quad rx = 0$$

terá uma solução não-trivial  $x$ , por exemplo  $x = \Lambda y$ ■

Facilmente podemos verificar que o vector  $X = Y - \Lambda Q^{-1}A$  é fundamental e  $rX = E$ .

**Teorema 3.4.2** (teorema 2.5) *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1.  $R(\mathcal{L}) = B$
2.  $\dim \ker \mathcal{L} = n$
3. Existe um vector funcional linear  $l : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  para o qual a equação (3.18) é resolúvel para cada  $f \in B$ .  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ .

### 3.5 Operador de Green

Seja

$$\mathcal{L}x = f, \quad lx = \alpha \tag{3.24}$$

onde  $m = n$ , sendo  $m$  o número de condições de fronteira. Se este problema for unicamente resolúvel e  $[\mathcal{L}, l]^{-1} = \{G, X\}$ , então a solução  $x$  do problema (3.24) terá a representação

$$x = Gf + X\alpha$$

onde  $G : B \rightarrow D$  é chamado **operador de Green** para o problema (3.24).  $X = (x_1, \dots, x_n)$  é o vector fundamental para a equação  $\mathcal{L}x = 0$  e  $lX = E$ .

Note-se que  $\Lambda$  é o operador de Green para o problema  $\delta x = f$ ,  $rx = \alpha$ .

**Teorema 3.5.1** (teorema 3.1) *O operador linear limitado  $G : B \rightarrow D$  é de Green para o problema de fronteira (3.24) se, e somente se:*

1.  $G$  é noetheriano,  $\text{ind } G = -n$
2.  $\ker G = \{0\}$

**Teorema 3.5.2** (teorema 3.2) *Seja o problema (3.24) unicamente resolúvel e  $G$  o operador de Green para o referido problema. Seja ainda  $U = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $u_i \in D$ ,  $U = E$ . Então o vector*

$$X = U - GLU$$

*é fundamental para a equação  $\mathcal{L}x = 0$ .*

## Capítulo 4

# Construção aproximada do resolvente para equações integrais no espaço $L^n$

Neste capítulo propõe-se um método para a determinação, com precisão garantida, da solução aproximada da equação integral do tipo

$$(\mathbf{Q}z)(t) \equiv z(t) - \int_0^t K(t, s)z(s)ds = f(t), \quad t \in [0, T] \quad (4.1)$$

O operador linear  $\mathbf{K} : L^n \rightarrow L^n$  define-se pela igualdade seguinte:

$$(\mathbf{K}z)(t) = \int_0^t K(t, s)z(s)ds$$

O método aqui exposto terá como sustento o método das resolventes descrito na secção (2.4), referente às equações integrais.

Com o auxílio da aproximação do núcleo  $K(t, s)$ , substitui-se a equação (4.1) pela equação:

$$(\hat{\mathbf{Q}}z)(t) \equiv z(t) - \int_0^t \hat{K}(t, s)z(s)ds = f(t), \quad t \in [0, T] \quad (4.2)$$

onde  $\hat{K}(t, s)$  é o núcleo degenerado definido por:

$$\hat{K}(t, s) = \sum_{i=1}^N \chi_{[t_i, t_{i+1}]}(t) \sum_{j=1}^i K_{ij} \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(s)$$

onde  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N < t_{N+1} = T$ .

$$\chi_{[a, b]}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [a, b]; \\ 0, & t \notin [a, b]. \end{cases} \quad (4.3)$$

e  $K_{ij}$  é uma matriz constante de dimensão  $n \times n$ .

Para o sistema (4.2), o-resolvente  $\hat{R}(t, s)$  do núcleo degenerado  $\hat{K}(t, s)$  pode ser construído de uma forma explícita[1].

### 4.1 Construção do resolvente $\tilde{R}(t, s)$ do núcleo $\tilde{K}(t, s)$

Vamos dividir o segmento  $[0, T]$  em  $N + 1$  partes iguais com o auxílio dos pontos  $t_i, i = 0, \dots, N + 1$  tais que

$$t_1 < \dots < t_N, \quad t_0 = 0, \quad t_{N+1} = T$$

e designemos  $t_{i+1} - t_i = h, \quad i = 0, \dots, N$ .

Em cada quadrado

$$\square_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} (t_i, t_{i+1}) \times (t_{j-1}, t_j) \quad i = 1, \dots, N \quad j = 1, \dots, i$$

substituímos a matriz de  $K(t, s)$  por uma  $n \times n$ -matriz constante  $K_{ij}$  e supomos que as  $n \times n$ -matrizes  $\Delta K_{ij}$  são conhecidas tais que:

$$\|K(t, s) - K_{ij}\| \leq \Delta K_{ij} \quad (t, s) \in \square_{i,j} \quad i = 1, \dots, N \quad j = 1, \dots, i \quad (4.4)$$

onde, para a matriz  $A = \{a^{ij}\}$ , o símbolo  $\|A\|$  significa matriz  $\{\|a^{ij}\|\}$ . Finalmente o sistema (4.2) toma a forma

$$z(t) - \sum_{i=1}^N \lambda_{[t_i, t_{i+1}]}(t) \int_0^t \left( \sum_{j=1}^i K_{ij} \lambda_{[t_{j-1}, t_j]}(s) \right) z(s) ds = f(t) \quad (4.5)$$

Iniciemos a construção do resolvente  $\tilde{R}(t, s)$  do núcleo  $\tilde{K}(t, s)$

Seja

$$q_i(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^i K_{ij} \lambda_{[t_{j-1}, t_j]}(s) \quad (4.6)$$

O sistema (4.5) deverá tomar a forma:

$$z(t) - \sum_{i=1}^N \lambda_{[t_i, t_{i+1}]}(t) \int_0^t q_i(s) z(s) ds = f(t) \quad (4.7)$$

Designando no sistema (4.7)

$$\Lambda_i \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{t_i} q_i(s) z(s) ds, \quad i = 1, \dots, N$$

Resulta, então

$$z(t) - \sum_{i=1}^N \lambda_{[t_i, t_{i+1}]}(t) \Lambda_i = f(t) \quad (4.8)$$

Calculemos, então  $\Lambda_i, i = 1, \dots, N$

Seja  $i = 1$ . Então

$$\Lambda_1 = \int_0^{t_1} q_1(s) z(s) ds = \int_0^{t_1} \sum_{j=1}^1 K_{1j} \lambda_{[t_{j-1}, t_j]}(s) \left[ f(s) + \sum_{k=1}^N \lambda_{[t_k, t_{k+1}]}(s) \Lambda_k \right] ds =$$

$$= \int_0^{t_1} \sum_{j=1}^1 K_{1j} \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(s) f(s) ds = \int_0^{t_1} K_{11} \chi_{[t_0, t_1]}(s) f(s) ds$$

Seja  $i = 2$ .

$$\begin{aligned} \Lambda_2 &= \int_0^{t_2} q_2(s) z(s) ds = \int_0^{t_2} \sum_{j=1}^2 K_{2j} \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(s) \left[ f(s) + \sum_{k=1}^N \chi_{[t_k, t_{k+1}]}(s) \Lambda_k \right] ds \\ &= \int_0^{t_2} \sum_{j=1}^2 K_{2j} \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(s) f(s) ds + \int_0^{t_2} \sum_{j=1}^2 K_{2j} \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(s) \sum_{k=1}^N \chi_{[t_k, t_{k+1}]}(s) \Lambda_k ds \\ &= \int_0^{t_2} \sum_{j=1}^2 K_{2j} \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(s) f(s) ds + \int_0^{t_1} \sum_{j=1}^2 K_{2j} \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(s) \sum_{k=1}^N \chi_{[t_k, t_{k+1}]}(s) \Lambda_k ds + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^2 K_{2j} \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(s) \sum_{k=1}^N \chi_{[t_k, t_{k+1}]}(s) \Lambda_k ds = \\ &= \int_0^{t_2} \sum_{j=1}^2 K_{2j} \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(s) f(s) ds + \int_{t_1}^{t_2} K_{22} \chi_{[t_1, t_2]}(s) \chi_{[t_1, t_2]}(s) \Lambda_1 ds \\ &= \int_0^{t_2} \sum_{j=1}^2 K_{2j} \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(s) f(s) ds + K_{22} \Lambda_1 \Big|_{t_1}^{t_2} = \int_0^{t_2} \sum_{j=1}^2 K_{2j} \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(s) f(s) ds + h K_{22} \Lambda_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_i &= \int_0^{t_i} q_i(s) z(s) ds = \int_0^{t_i} \sum_{j=1}^i K_{ij} \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(s) \left[ f(s) + \sum_{k=1}^N \chi_{[t_k, t_{k+1}]}(s) \Lambda_k \right] ds \\ &= \int_0^{t_i} \sum_{j=1}^i K_{ij} \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(s) f(s) ds + \int_0^{t_i} \sum_{j=1}^i K_{ij} \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(s) \sum_{k=1}^N \chi_{[t_k, t_{k+1}]}(s) \Lambda_k ds \\ &= \int_0^{t_i} \sum_{j=1}^i K_{ij} \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(s) f(s) ds + \int_0^{t_1} \sum_{j=1}^1 K_{2j} \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(s) \sum_{k=1}^N \chi_{[t_k, t_{k+1}]}(s) \Lambda_k ds + \dots + \\ &+ \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sum_{j=1}^i K_{ij} \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(s) \sum_{k=1}^N \chi_{[t_k, t_{k+1}]}(s) \Lambda_k ds = \\ &= \int_0^{t_i} \sum_{j=1}^1 K_{ij} \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(s) f(s) ds + 0 + \dots + \int_{t_{i-1}}^{t_i} K_{ii} \chi_{[t_{i-1}, t_i]}(s) \chi_{[t_{i-1}, t_i]}(s) \Lambda_{i-1} ds \\ &= \int_0^{t_i} \sum_{j=1}^1 K_{ij} \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(s) f(s) ds + \dots + K_{ii} \Lambda_{i-1} \Big|_{t_{i-1}}^{t_i} = \end{aligned}$$

$$= \int_0^{t_i} \sum_{j=1}^1 K_{2j} \chi_{[t_{j-1}, t_j]}(s) f(s) ds + \dots + h K_{ii} \Lambda_{i-1}, \quad i = 1, \dots, N$$

Portanto

$$\Lambda_i = h K_{i2} \Lambda_1 + h K_{i3} \Lambda_2 + \dots + h K_{ii} \Lambda_{i-1} + \int_0^{t_i} \left[ \sum_{k=1}^i K_{ik} \chi_{[t_{k-1}, t_k]}(s) \right] f(s) ds, \quad i = 1, \dots, N$$

Obtemos, por conseguinte, o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_1 = \int_0^{t_1} \left[ \sum_{k=1}^1 K_{1k} \chi_{[t_{k-1}, t_k]}(s) \right] f(s) ds \\ -h K_{22} \Lambda_1 + \Lambda_2 = \int_0^{t_2} \left[ \sum_{k=1}^2 K_{2k} \chi_{[t_{k-1}, t_k]}(s) \right] f(s) ds \\ -h K_{32} \Lambda_1 - h K_{33} \Lambda_2 + \Lambda_3 = \int_0^{t_3} \left[ \sum_{k=1}^3 K_{3k} \chi_{[t_{k-1}, t_k]}(s) \right] f(s) ds \\ \dots \dots \dots \\ -h K_{N2} \Lambda_1 - h K_{N3} \Lambda_2 - \dots + \Lambda_N = \int_0^{t_N} \left[ \sum_{k=1}^N K_{Nk} \chi_{[t_{k-1}, t_k]}(s) \right] f(s) ds \end{array} \right. \quad (4.9)$$

Para escrevermos o sistema obtido na forma compacta, introduzamos os seguintes símbolos:

$$H = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -h K_{22} & E & 0 & \dots & \dots \\ -h K_{32} & -h K_{33} & E & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -h K_{N2} & -h K_{N3} & -h K_{N4} & \dots & E \end{pmatrix} \quad e \quad H^{-1} = \{B_{ij}\}_{i,j=1,\dots,N}$$

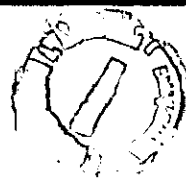
$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \vdots \\ \Lambda_N \end{pmatrix} \quad e \quad \beta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_N \end{pmatrix}, \quad \theta_i = \int_0^{t_i} \sum_{k=1}^i \chi_{[t_{k-1}, t_k]}(s) f(s) ds, \quad i = 1, \dots, N$$

Seja também  $F = \begin{pmatrix} K_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ K_{21} & K_{22} & 0 & \dots & 0 \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & K_{N3} & \dots & K_{NN} \end{pmatrix}$

$$\tilde{K}(t, s) = K_{ij} \quad (t, s) \in \square_{i,j} \quad i = 1, \dots, N \quad j = 1, \dots, i$$

Consequentemente, o sistema (4.9) tomará a forma

$$H\Lambda = F\beta \quad (4.10)$$



resultando, deste modo, em

$$\Lambda = H^{-1}F\beta \quad (4.11)$$

Vamos substituir os  $\Lambda_i, i = 1, \dots, N$  na equação (4.7) resultando em:

$$z(t) = \sum_{i=1}^N \chi_{[t_i, t_{i+1})}(t) \int_0^t \left[ \sum_{k=1}^i \sum_{j=k}^i B_{ij} K_{jk} \chi_{[t_{k-1}, t_k]}(s) \right] f(s) ds + f(t) \quad (4.12)$$

Definamos o operador  $\tilde{\mathbf{R}} : L^n \rightarrow L^n$  por

$$(\tilde{\mathbf{R}}f)(t) = \int_0^t \tilde{R}(t, s) f(s) ds$$

sendo

$$\tilde{R}(t, s) = \sum_{i=1}^N \chi_{[t_i, t_{i+1})}(t) \sum_{k=1}^i R_{ik} \chi_{[t_{k-1}, t_k]}(s) \quad (4.13)$$

onde

$$R_{ik} = \sum_{j=k}^i B_{ij} K_{jk}$$

A equação (4.12) terá a forma

$$z(t) = \int_0^t \tilde{R}(t, s) f(s) ds + f(t) \quad (4.14)$$

Por analogia à equação (2.29),  $\tilde{R}(t, s)$  será, precisamente, o **núcleo resolvente** para a equação integral

$$(\tilde{\mathbf{Q}}z)(t) = z(t) - \int_0^t \tilde{K}(t, s) z(s) ds = f(t), \quad t \in [0, T] \quad (4.15)$$

## 4.2 Avaliação do erro

Vamos avaliar o erro cometido na aproximação do resolvente ao se substituir o núcleo  $K(t, s)$  pelo respectivo núcleo degenerado aproximado  $\tilde{K}(t, s)$ .

Seja  $\Delta\mathbf{K} : L^n \rightarrow L^n$  o operador integral definido por:

$$(\Delta\mathbf{K}z)(t) = \int_0^t \Delta K(t, s) z(s) ds$$

onde

$$\Delta K(t, s) = K(t, s) - \tilde{K}(t, s)$$

Vamos supor que

$$\delta \stackrel{\text{def}}{=} \|\Delta K(I - \tilde{K})^{-1}\|_{L^n - L^n} = \|\Delta K(I + \tilde{R})\|_{L^n - L^n} < 1$$

Com base no teorema (2.2.11) sobre o operador inverso, obtemos a seguinte avaliação

$$\|(I - K)^{-1} - (I - \tilde{K})^{-1}\|_{L^n - L^n} = \|R - \tilde{R}\|_{L^n - L^n} \leq \frac{\delta}{1 - \delta} \|I + \tilde{R}\|_{L^n - L^n}$$

ou simplesmente

$$\|R - \tilde{R}\|_{L^n - L^n} \leq \frac{\delta}{1 - \delta} \|I + \tilde{R}\|_{L^n - L^n} \tag{4.16}$$

Portanto, a avaliação efectiva do segundo membro da desigualdade (4.16) pode ser obtida da seguinte forma:

Para  $\|\Delta K\|_{L^n - L^n}$ , teremos

$$\|\Delta K\|_{L^n - L^n} \leq \text{vrai sup}_{s \in [0, T]} \int_0^T \|\Delta K(t, s)\| dt \tag{4.17}$$

Sendo assim, designando

$$\square_{i-1, i} = \{(t, s) \in [0, T] \times [0, T] : t_{i-1} \leq s \leq t \leq t_i\}, i = 1, \dots, N + 1$$

Supomos, também, que são conhecidas as  $n \times n$ -matrizes  $\Delta K_{i-1, i}, i = 1, \dots, N + 1$ . Daqui, teremos que

$$\|K(t, s)\| \leq \Delta K_{i-1, i}(t, s) \in \square_{i-1, i}, i = 1, \dots, N + 1$$

Por conseguinte, da equação (4.4) e (4.17), segue que

$$\|\Delta K\|_{L^n - L^n} \leq \max_{k=1, \dots, N+1} \left( \sum_{i=k}^{N+1} h \|\Delta K_{i-1, i}\| \right) \leq h \max_{k=1, \dots, N+1} \left( \sum_{i=k}^{N+1} \|\Delta K_{i-1, i}\| \right) \tag{4.18}$$

Para a avaliação de  $\delta$ , notamos que o operador

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \Delta K(I + \tilde{R})$$

tem a representação

$$(\Delta z)(t) = \int_0^t \Delta(t, s) z(s) ds$$

onde

$$\Delta(t, s) = \Delta K(t, s) + \int_s^t \Delta K(t, \tau) \tilde{R}(\tau, s) d\tau \tag{4.19}$$



Designemos, ainda,  $\tilde{r}_{jk}$  a matriz de dimensão  $n \times n$  com elementos não negativos, tal que

$$|\tilde{R}(\tau, s)| \leq \tilde{r}_{i-1,k}(\tau, s) \in \square_{i-1,k}, \quad i = 1, \dots, N+1 \quad k = 1, \dots, i \quad (4.20)$$

De (4.20) e de (4.19) implica

$$|\Delta(t, s)| \leq \Delta K_{i-1,k} + h \sum_{j=k}^{i-1} \Delta K_{i-1,j} \tilde{r}_{j,k}(t, s) \in \square_{i-1,k} \quad i = 1, \dots, N+1 \quad k = 1, \dots, i$$

Por último tem lugar a desigualdade

$$\|\Delta\|_{L^n-L^n} \leq h \max_{k=1, \dots, N+1} \left( \sum_{i=k}^{N+1} \left\| \Delta K_{i-1,k} + h \sum_{j=k}^{i-1} \Delta K_{i-1,j} \tilde{r}_{i,j} \right\| \right)$$

Note-se que

$$\|\tilde{R}\|_{L^n-L^n} \leq h \max_{k=1, \dots, N+1} \left( \sum_{i=k}^{N+1} \tilde{r}_{i-1,k} \right) \quad (4.21)$$

## Capítulo 5

# Matriz de Cauchy. Construção com precisão garantida

Neste capítulo descrevemos um algoritmo de construção da matriz de Cauchy com precisão garantida e o método de avaliação da exactidão da aproximação obtida.

### 5.1 Equações com argumento desviado

Consideremos o problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - \sum_{i=1}^k P_i(t)x[h_i(t)] &= v(t), \quad t \in [0, T] \\ x(\xi) &= \varphi(\xi), \quad \xi < 0 \\ x(0) &= \alpha \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde:

- As colunas da matriz  $P_i : [0, T] \rightarrow R^{n \times n}$  e  $v : [0, T] \rightarrow R^n$  pertencem a  $L^n$ .
- Os retardamentos  $h_i : [0, T] \rightarrow R$  são funções mensuráveis.
- $\varphi$  é uma função definida de modo que a função

$$f(t) = v(t) + \sum_{i=1}^k P_i(t)\varphi^{h_i}(t), \quad \text{onde } \varphi^{h_i}(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } h_i(t) \in [0, T]; \\ \varphi[h_i(t)], & \text{se } h_i(t) < 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

pertença a  $L^n$ .

A função  $\varphi$  é denominada **função inicial** ou **pré-história** e tem como finalidade a determinação de  $x$  para os valores de  $t$  não pertencentes a  $[0, T]$ .

Usando a notação do operador de superposição

$$(\mathbf{S}_h x)(t) = \begin{cases} x[h(t)], & h(t) \in [0, T]; \\ 0, & h(t) < 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

$$\varphi^h(t) = \begin{cases} 0, & h(t) \in [0, T]; \\ \varphi[h(t)], & h(t) < 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

reescrevemos a equação (5.1) na forma operacional

$$(\mathcal{L}x)(t) = f(t), \quad t \in [a, b] \quad (5.5)$$

onde  $\mathcal{L} : D^n \rightarrow L^n$  é um operador linear limitado que actua do espaço  $D^n$  das funções absolutamente contínuas  $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  para o espaço  $L^n$  das funções somáveis  $z : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Portanto, (5.1) toma a forma

$$(\mathcal{L}x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x}(t) - \sum_{i=1}^k P_i(t)(\mathbf{S}_{h_i}x)(t) = f(t)$$

onde  $f(t) = v(t) + \sum_{i=1}^k P_i(t)\varphi^{h_i}(t)$ .

O operador  $\mathbf{S}_h : D^n \rightarrow L^n$  tem a representação

$$(\mathbf{S}_{h_i}x)(t) = \int_0^t \lambda_{h_i}(t, s)\dot{x}(s)ds + \lambda_{h_i}(t, 0)x(0)$$

onde  $\lambda_{h_i}(t, s)$ - função característica do conjunto  $\{(t, s) \in [0, T] \times [0, T] : 0 \leq s \leq h_i(t) \leq T, \quad i = 1, \dots, k\}$

O valor do operador de superposição  $\mathbf{S}_h$  sobre a função  $x$  será, algumas vezes, designado  $x_h$ .

A matriz de Cauchy  $C(t, s)$  do sistema (5.1) permite escrever a solução do problema (5.1) na forma

$$x(t) = C(t, 0)\alpha + \int_0^t C(t, s) \sum_{i=1}^k P_i(t)\varphi^{h_i}(s)ds + \int_0^t C(t, s)v(s)ds, \quad t \in [0, T]$$

O sistema (5.1), graças ao isomorfismo dos espaços  $D^n$  e  $L^n \times \mathbb{R}^n$  que é estabelecido por

$$x(t) = \int_0^t \dot{x}(s)ds + x(0)$$

tem a representação

$$(\mathcal{L}x)(t) = (\mathbf{Q}\dot{x})(t) - A(t)x(0) \quad (5.6)$$

onde  $\mathbf{Q} : L^n \rightarrow L^n$  é um operador linear, produto do operador  $\mathcal{L}$  e do operador integral

$$(\mathbf{Q}y)(\cdot) = \mathcal{L}\left(\int_0^{(\cdot)} y(s)ds\right)$$

$$\mathbf{A} = \mathcal{L}E$$

$\mathbf{Q}$  é a **parte principal** do operador  $\mathcal{L}$ .

O sistema (5.1) tomará a forma

$$\dot{x}(t) - \int_0^T K(t, s)\dot{x}(s)ds = g(t) \quad (5.7)$$

onde

$$K(t, s) = \mathcal{E}(t, s) \sum_{i=1}^k \chi_{h_i}(t, s) P_i(t)$$

$$g(t) = c(t) + \sum_{i=1}^k P_i(t)\varphi^{h_i}(t) + \sum_{i=1}^k \chi_{h_i}(t, s) P_i(t)x(0), \quad g \in L^n$$

$\mathcal{E}(t, s) \stackrel{\text{def}}{=} \chi_{[0, t]}(s)$ -função característica do conjunto  $[a, b]$ .

Assim, para o sistema (5.1), a parte principal  $\mathbf{Q}$  tem a forma  $\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{K}$ , onde o operador  $\mathbf{K}$  é definido por

$$(\mathbf{K}z)(t) = \int_0^T \mathcal{E}(t, s) \sum_{i=1}^k \chi_{h_i}(t, s) P_i(t)z(s)ds \quad (5.8)$$

Nestas condições, a equação (5.5) terá como casos especiais as seguintes classes de equações:

1. Equação Diferencial com **retardamento concentrado**

$$\begin{cases} \dot{x}(t) - \sum_{i=1}^k P_i(t)x[h_i(t)] = g(t), & t \in [0, T]; & x(0) = \alpha \\ x(\xi) = \varphi(\xi), & \xi \notin [0, T]. \end{cases} \quad (5.9)$$

onde:  $h_i(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$  ( $h_i(t) \leq t$ ),  $i = 1, \dots, k$  são funções mensuráveis  
 $g(t) + \sum_{i=1}^k P_i(t)\varphi^{h_i}(t) = f(t)$ ,  $f \in L^n$ .

O núcleo  $K(t, s)$  da equação (4.11) toma a forma

$$K(t, s) = \sum_{i=1}^k \chi_{h_i}(t, s) P_i(t) \quad (5.10)$$

onde  $\chi_{h_i}(t, s)$ - função característica do conjunto

$$\{(t, s) \in [0, T] : 0 \leq s \leq h_i(t) \leq T\}$$

2. Equação Diferencial com **retardamento distribuído**

$$\dot{x}(t) - \int_0^t d_s \tau(t, s)x(s) = f(t), \quad t \in [0, T] \quad (5.11)$$

onde os elementos  $\tau^{ij}(t, s)$  da matriz  $\tau(t, s)$  são mensuráveis no conjunto  $0 \leq s \leq t \leq T$ :  $\tau^{ij}(\cdot, s) \in L^1$  para cada  $s \in [0, T]$ ;

$$\text{Var}_{s \in [0, T]} [\tau^{ij}(t, s)] = p^{ij}(t), \quad p^{ij}(t) \in L^1$$

$$\text{e } \tau(t, t) = 0$$

O operador

$$(\mathbf{Q}z)(t) = z(t) - \int_0^t K(t, s)z(s)ds \quad (5.12)$$

$\mathbf{Q} : L^n \rightarrow L^n$  é invertível e o seu inverso  $\mathbf{Q}^{-1}$  tem a forma

$$(\mathbf{Q}^{-1}z)(t) = z(t) + \int_0^t R(t, s)z(s)ds \quad (5.13)$$

onde  $R(t, s)$  é o **núcleo resolvente** para  $K(t, s)$ .

A invertibilidade do operador  $\mathbf{Q}$  constitui o critério de resolubilidade do problema de Cauchy

$$\mathcal{L}x = f, \quad x(0) = \alpha \quad (5.14)$$

para qualquer  $f \in L^n$  e  $\alpha \in \mathbb{R}^n$

Conforme vimos, a solução do problema de Cauchy pode ser representada da seguinte forma:

$$x(t) = C(t, 0)\alpha + \int_0^t C(t, s)f(s)ds \quad (5.15)$$

sendo a função  $C(t, s)$  a matriz de Cauchy para o sistema em causa.

Uma propriedade característica da matriz de Cauchy é que a derivada da solução define-se por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= C'_t(t, 0)\alpha + \int_0^t C'_t(t, s)f(s)ds + C(t, t)f(t) \\ &= C'_t(t, 0)\alpha + \int_0^t C'_t(t, s)f(s)ds + f(t) \end{aligned}$$

Como foi demonstrado em [2]:

$$C(t, s) = E + \int_s^t C'_t(t, s)dt, \quad 0 \leq s \leq t \leq T \quad (5.16)$$

$$C'_t(t, s) = R(t, s), \quad 0 \leq s \leq t \leq T \quad (5.17)$$

sendo  $E$  - matriz identidade

$R(t,s)$  - núcleo resolvente correspondente ao núcleo  $K(t,s)$  do operador  $\mathbf{K} : L^n \rightarrow L^n$  definido por:

$$(\mathbf{K}z)(t) = \int_0^t K(t,s)z(s)ds \quad (5.18)$$

O núcleo  $K(t,s)$  é dado por:

$$K(t,s) = \sum_{i=1}^k \lambda_{b_i}(t,s)P_i(t) \quad (5.19)$$

Da igualdade (5.16) e das relações (2.27) e (2.28) obtém-se

$$C'_i(t,s) = \int_s^t C'_i(t,\tau)K(\tau,s)d\tau + K(t,s), \quad 0 \leq s \leq t \leq T \quad (5.20)$$

As relações (5.16), (5.17) e (5.19) constituem a base para o método que propomos sobre a construção da matriz de Cauchy com precisão garantida.

A matriz de cauchy desempenha um papel muito importante na investigação da resolubilidade de problemas de fronteira, problemas sobre soluções periódicas assim como na avaliação da exactidão das soluções aproximadas.

**Exemplo 5.1.1** Um dos métodos tradicionais mais usados na obtenção da exactidão das soluções aproximadas é baseado na utilização das **desigualdades integrais**. Entretanto, este método frequentemente, não conduz a um resultado satisfatório. De facto, consideremos o problema de Cauchy para equações diferenciais ordinárias

$$\mathcal{L}x \equiv \dot{x}(t) - P(t)x(t) = f(t), \quad t \in [0, T] \quad (5.21)$$

$$x(0) = \alpha \quad (5.22)$$

onde as colunas da matriz  $P$  pertencem a  $L^n$ .

Para a solução  $x(t)$  deste problema temos a equação

$$\dot{x}(t) = P(t) \int_0^t \dot{x}(s)ds + P(t)\alpha + f(t), \quad t \in [0, T] \quad (5.23)$$

Se  $\tilde{x}$  é solução aproximada do problema (5.21)-(5.22), com  $\tilde{x}(0) = \alpha$ , então

$$\dot{\tilde{x}}(t) = P(t) \int_0^t \dot{\tilde{x}}(s)ds + P(t)\alpha + f(t) - g(t), \quad t \in [0, T]$$

onde  $g(t)$  é a correspondente diferença  $\mathcal{L}x - \mathcal{L}\tilde{x}$ :

Seja

$$\dot{x}(t) - \dot{\tilde{x}}(t) = z(t)$$

Para  $z(t)$  temos

$$z(t) = \int_0^t P(t)z(s)ds + g(t)$$

O método tradicional de avaliação de  $z(t)$  é baseado na desigualdade integral

$$|z(t)| \leq \int_0^t \|P(t)\| |z(s)| ds + |g(t)| \quad (5.24)$$

de onde, com base no lema de Gonalu-Bellman, tem-se

$$|z(t)| \leq \|P(t)\| \int_0^t \exp\left(\int_s^t \|P(\tau)\| d\tau\right) |g(s)| ds + |g(t)|, \quad t \in [0, T] \quad (5.25)$$

A presença do factor exponencial no ramo direito da desigualdade (5.25) conduz ao erro: mesmo quando  $g(t)$  é extremamente pequeno a parte direita da desigualdade (5.25) pode tornar-se extremamente grande, o que poderá conduzir a uma avaliação incorrecta.

**Exemplo 5.1.2** Nós propomos e usaremos outro procedimento, cuja ideia central consiste na utilização da matriz de Cauchy para a investigação das questões mencionadas. Para a materialização deste método propomos um algoritmo de construção do aproximante  $\tilde{C}(t, s)$  da matriz de Cauchy  $C(t, s)$  com precisão garantida, tal que

$$\|C - \tilde{C}\| \leq \Delta_C$$

onde  $\Delta_C = \text{const}$  e  $C, \tilde{C} : L^n \rightarrow L^\infty$  são operadores lineares de Volterra, definidos por

$$(Cf)(t) = \int_0^t C(t, s)f(s)ds, \quad (\tilde{C}f)(t) = \int_0^t \tilde{C}(t, s)f(s)ds$$

Se  $\tilde{x}$  é solução aproximada do problema de Cauchy

$$\mathcal{L}x = f, \quad x(0) = \alpha$$

substituindo-a na equação obtemos

$$\mathcal{L}\tilde{x} = f - g, \quad \tilde{x}(0) = \alpha$$

onde  $g(t)$  é a diferença  $\mathcal{L}x - \mathcal{L}\tilde{x}$ .

A diferença  $x - \tilde{x}$  tem a representação [2](Maksimov(1977) pag. 601-606 )

$$\begin{aligned} x - \tilde{x} &= \int_0^t C(t, s)g(s)ds = \int_0^t [\tilde{C}(t, s) + \Delta C(t, s)] g(s)ds \\ &= \int_0^t \tilde{C}(t, s)g(s)ds + \int_0^t \Delta C(t, s)g(s)ds \end{aligned}$$

onde

$\tilde{C}(t, s)$  - aproximação da matriz de Cauchy (construída);

$\Delta C(t, s) = C(t, s) - \tilde{C}(t, s)$  - erro da aproximação.

A avaliação  $x - \tilde{x}$  dá

$$|x(t) - \tilde{x}(t)| \leq \int_0^t \|\tilde{C}(t, s)\| |g(s)| ds + \Delta_C \int_0^t |g(s)| ds \quad (5.26)$$

onde  $\Delta_C = \text{const}$  e  $\|\Delta C(t, s)\| \leq \Delta_C$

Daqui conclui-se que por mais pequeno que seja  $g(t)$  não há necessidade de ter  $\Delta C(t, s)$  extremamente pequeno. O método proposto é efectivo até quando  $\Delta C(t, s)$  é comparável a  $\tilde{C}(t, s)$ .

## 5.2 Matriz de Cauchy. Construção aproximada e avaliação do erro

Neste parágrafo, descrevemos o algoritmo para a construção da matriz de Cauchy com precisão garantida e o método de avaliação da precisão. O aproximante da matriz de Cauchy pode ser obtido seguindo os seguintes passos:

1. Construção do núcleo  $\tilde{K}(t, s)$  (aproximação parcialmente linear do núcleo  $K(t, s)$ );
2. Construção do núcleo resolvente aproximado  $\tilde{R}(t, s)$  do núcleo  $\tilde{K}(t, s)$ ;
3. Verificação da veracidade da desigualdade

$$\delta \stackrel{\text{def}}{=} \|\Delta K(I + \tilde{R})\|_{L^n - L^n} < 1 \quad (5.27)$$

onde

$$I : Ix = x$$

$$(\Delta K z)(t) = \int_0^t [K(t, s) - \tilde{K}(t, s)] z(s) ds$$

$$(\tilde{R}z)(t) = \int_0^t \tilde{R}(t, s) z(s) ds$$

4. Construção da aproximação  $\tilde{C}(t, s)$
5. Avaliação do erro da aproximação  $\tilde{C}(t, s)$ .

### Etapa 1

O núcleo aproximado  $\tilde{K}(t, s)$  será buscado na forma degenerada

$$\tilde{K}(t, s) = \sum_{i=1}^N \lambda_{[t_i, t_{i+1}]}(t) \sum_{j=1}^i K_{ij} \lambda_{[t_{j-1}, t_j]}(s)$$



sendo  $K_{ij}$  uma matriz constante construída conforme é descrito no capítulo 4.

**Etapa 2**

O núcleo resolvente aproximado  $\tilde{R}(t, s)$  será construído aplicando o método das resolventes que visa a busca da solução da equação

$$(\mathbf{Q}\dot{x})(t) \equiv \dot{x}(t) - \int_0^t K(t, s)\dot{x}(s)ds = f(t) \tag{5.28}$$

na forma

$$\dot{x}(t) = \int_0^t \tilde{R}(t, s)f(s)ds + f(t) \tag{5.29}$$

No caso em que  $n = 1$ , a equação (5.28) é escalar pois as funções  $K(t, s)$ ,  $\dot{x}(t)$  e  $f(t)$  são escalares.

**Etapa 3**

Para a verificação da desigualdade

$$\delta \stackrel{def}{=} \|\Delta K(I + \tilde{R})\|_{L^n-L^n} < 1$$

temos que achar a norma, usando a relação

$$\|\Delta\|_{L^n-L^n} \leq h \max_{k=1, \dots, N+1} \left( \sum_{i=k}^{N+1} \|\Delta K_{i-1, k} + h \sum_{j=k}^{i-1} \Delta K_{i-1, j} \tilde{r}_{i, j}\| \right)$$

onde  $\Delta \stackrel{def}{=} \Delta K(I + \tilde{R})$  e supõem-se conhecidos os valores de  $\Delta K_{ij}$  e  $\tilde{r}_{i, j}$ .

**Etapa 4**

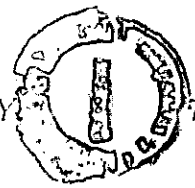
Usando a relação  $C'_t(t, s) = R(t, s)$ ,  $0 \leq s \leq t \leq T$ , definamos  $\tilde{C}'_t(t, s) \stackrel{def}{=} \tilde{R}(t, s)$ . Obtemos, de acordo com a equação (5.16)

$$\tilde{C}(t, s) = E + \int_s^t \tilde{R}(\tau, s)d\tau$$

onde

$$\tilde{R}(t, s) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^i \sum_{j=k}^i \lambda_{[t, t_{i+1}]} B_{ij} K_{ij} \lambda_{[t_{k-1}, t_k]}(s)$$

e os valores de  $B_{ij}$  são intermédios no método das resolventes.



### Etapa 5

De modo a proceder à avaliação do erro da aproximação da matriz de Cauchy, enunciaremos os teoremas sobre a avaliação do erro de aproximação da matriz de Cauchy para o caso  $n = 1$  e para  $n$  qualquer.

Para  $n = 1$  é válido o seguinte teorema:

**Teorema 5.2.1** *Seja*

$$\delta \stackrel{\text{def}}{=} \|\Delta K(I + \tilde{R})\|_{L^1[0,T]-L^1[0,T]} < 1$$

*Então cumpre-se a seguinte desigualdade*

$$|C(t, s) - \tilde{C}(t, s)| \leq \frac{\delta}{1 - \delta} \|I + \tilde{R}\|_{L^1[0,T]-L^1[0,T]} \quad (5.30)$$

**Demonstração.** Sendo  $\delta < 1$ , então com base no teorema (2.2.11) sobre o operador inverso teremos:

$$\|R(t, s) - \tilde{R}(t, s)\|_{L^1[0,T]-L^1[0,T]} \leq \frac{\delta}{1 - \delta} \|I + \tilde{R}\|_{L^1[0,T]-L^1[0,T]} \quad (5.31)$$

Pelo teorema (1.13) ([3], pag. 107) temos

$$\|R(t, s) - \tilde{R}(t, s)\|_{L^1[0,T]-L^1[0,T]} = \text{vrai sup}_{s \in [0,T]} \int_0^T |R(t, s) - \tilde{R}(t, s)| dt \quad (5.32)$$

Das fórmulas

$$C(t, s) = E + \int_s^t C'(t, s) d\tau, \quad 0 \leq s \leq t \leq T$$

$$C'(t, s) = R(t, s), \quad 0 \leq s \leq t \leq T$$

$$(\mathbf{K}z)(t) = \int_0^T \varepsilon(t, s) \sum_{i=1}^k \chi_{b_i}(t, s) P_i(t) z(s) ds \quad e$$

$$\tilde{C}'(t, s) = \tilde{R}(t, s)$$

temos

$$\begin{aligned} |C(t, s) - \tilde{C}(t, s)| &= \left| E + \int_s^t C'_\tau(\tau, s) d\tau - E - \int_s^t \tilde{C}'_\tau(\tau, s) d\tau \right| \\ &\leq \int_s^t |C'_\tau(\tau, s) - \tilde{C}'_\tau(\tau, s)| d\tau \leq \int_0^T |C'_\tau(\tau, s) - \tilde{C}'_\tau(\tau, s)| d\tau \\ &= \int_0^T |R(\tau, s) - \tilde{R}(\tau, s)| d\tau \end{aligned}$$

ou seja

$$|C(t, s) - \tilde{C}(t, s)| \leq \int_0^T |R(\tau, s) - \tilde{R}(\tau, s)| d\tau, \quad \forall t, s \in [0, T] \quad (5.33)$$

Da desigualdade (5.33) obtemos

$$|C(t, s) - \tilde{C}(t, s)| \leq \text{vrai sup}_{s \in [0, T]} \int_0^T |R(\tau, s) - \tilde{R}(\tau, s)| d\tau \quad (5.34)$$

A parte direita da desigualdade (5.34) define a norma do operador  $(R - \tilde{R}) : L^1[0, T] \rightarrow L^1[0, T]$ . Das relações (5.31) e (5.34) segue

$$|C(t, s) - \tilde{C}(t, s)| \leq \frac{\delta}{1 - \delta} \|I + \tilde{R}\|_{L^1[0, T] \rightarrow L^1[0, T]}, \quad 0 \leq s \leq t \leq T \quad \blacksquare$$

Consideremos o caso geral, isto é, para  $n$  qualquer. Este caso reduz-se para o caso  $n = 1$  ([4], pag 108-112) do seguinte modo:

Seja  $z_i(t) = \dot{x}_i(t)$ , então teremos a equação

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix} = \int_0^T \begin{pmatrix} K_{11}(t, s) & \dots & K_{1n}(t, s) \\ \vdots & & \vdots \\ K_{n1}(t, s) & \dots & K_{nn}(t, s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

onde as funções são mensuráveis e  $K_{ij}(t, s)$  e

$$|K_{ij}(t, s)| \leq \mu, \quad \mu \in L[0, T]$$

As funções  $g_i(t)$  e  $\dot{x}(t)$  são somáveis.

A equação (5.35) pode ser reduzida ao caso escalar através da introdução das seguintes funções :

$$Z(t) = z_i(t - (i - 1)T), \quad t \in [(i - 1)T, iT], \quad i = 1, \dots, n$$

$$F(t) = f_i(t - (i - 1)T), \quad t \in [(i - 1)T, iT], \quad i = 1, \dots, n$$

$$\mathcal{K}(t, s) = K_{ij}(t - (i - 1)T, s - (j - 1)T), \quad t \in [(i - 1)T, iT], \quad j \in [(j - 1)T, jT], \quad i, j = 1, \dots, n$$

Portanto, o intervalo de definição passa a ser  $[0, nT]$ , passando a equação (5.35) a ter a forma escalar:

$$Z(t) - \int_0^t \mathcal{K}(t, s) Z(s) ds = F(t), \quad t \in [0, nT] \quad (5.36)$$

O operador  $\tilde{R} : L^1[0, nT] \rightarrow L^1[0, nT]$  é definido por

$$(\tilde{R}.F) = \int_0^t \tilde{R}(t, s) F(s) ds$$

I. A norma de um elemento  $L^1[0, nT]$  será definida do seguinte modo:  
 Seja  $z : [0, nT] \rightarrow \mathbb{R}^1$ . Então

$$\|z\|_{L^1[0, nT]} = \int_0^{nT} |z(t)| dt = \int_0^{nT} \left| \sum_{i=1}^n \chi_{[(i-1)T, iT]}(t) z_i(t - (i-1)T) \right| dt = \quad (5.37)$$

$$= \int_0^{nT} \sum_{i=1}^n \chi_{[(i-1)T, iT]}(t) |z_i(t - (i-1)T)| dt = \quad (5.38)$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_0^T |z_i(t)| dt = \sum_{i=1}^n \|z_i\|_{L^1} \quad (5.39)$$

$$= \sum_{i=1}^n \|z_i\|_{L^1} \quad (5.40)$$

II. A norma do operador em  $L^1[0, nT]$  é definida do seguinte modo:  
 É sabido que

$$\|K\|_{L^1[0, T] \rightarrow L^1[0, T]} = \text{vrai sup}_{s \in [0, T]} \int_0^T |K(t, s)| dt$$

Assim, se  $K : L^1[0, nT] \rightarrow L^1[0, nT]$ , então

$$\begin{aligned} \|K\|_{L^1[0, nT] \rightarrow L^1[0, nT]} &= \text{vrai sup}_{s \in [0, nT]} \int_0^{nT} |K(t, s)| dt \\ &= \text{vrai sup}_{s \in [0, nT]} \sum_{i=1}^n \int_{(i-1)T}^{iT} \left| \sum_{j=1}^n \chi_{[(i-1)T, iT]}(s) K_{ij}(t - (i-1)T, s - ((j-1)T)) \right| dt \\ &= \max_{1 \leq j \leq n} \text{vrai sup}_{s \in [0, T]} \sum_{i=1}^n \int_0^T |K_{ij}(t, s)| dt \end{aligned}$$

Deste modo

$$\|K\|_{L^1[0, nT] \rightarrow L^1[0, nT]} = \max_{1 \leq j \leq n} \text{vrai sup}_{s \in [0, T]} \sum_{i=1}^n \int_0^T |K_{ij}(t, s)| dt \quad (5.41)$$

**Teorema 5.2.2** *Seja*

$$\delta \stackrel{\text{def}}{=} \|\Delta K(I + \tilde{R})\|_{L^1[0, nT] \rightarrow L^1[0, nT]} < 1$$

Então

$$\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |c_{ij}(t, s) - \tilde{c}_{ij}(t, s)| \leq \frac{\delta}{1 - \delta} [1 + \max_{1 \leq j \leq n} (\text{vrai sup}_{s \in [0, nT]} \sum_{i=1}^n \int_0^T |\tilde{r}_{ij}(t, s)| dt)], \quad 0 \leq s \leq t \leq T$$

Demonstração. Seja  $\delta < 1$

Então, pelo teorema (2.2.11) sobre o operador inverso temos:

$$\begin{aligned} \|R(t, s) - \tilde{R}(t, s)\| &\leq \frac{\delta}{1 - \delta} \|I + \tilde{R}\|_{L^1[0, nT] \rightarrow L^1[0, nT]} \leq \\ &\leq \frac{\delta}{1 - \delta} (\|I\|_{L^1[0, nT] \rightarrow L^1[0, nT]} + \|\tilde{R}\|_{L^1[0, nT] \rightarrow L^1[0, nT]}) \end{aligned}$$

de onde tem-se

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq j \leq n} (\text{vrai sup}_{s \in [0, T]} \sum_{i=1}^n \int_0^T |r_{ij}(t, s) - \tilde{r}_{ij}(t, s)| dt) &\leq \\ &\leq \frac{\delta}{1 - \delta} (1 + \max_{1 \leq j \leq n} (\text{vrai sup}_{s \in [0, T]} \sum_{i=1}^n \int_0^T |\tilde{r}_{ij}(t, s)|)) \end{aligned} \quad (5.42)$$

Teremos, então

$$\sum_{i=1}^n |c_{ij}(t, s) - \tilde{c}_{ij}(t, s)| \leq \sum_{i=1}^n \int_0^T |r_{ij}(t, s) - \tilde{r}_{ij}(t, s)| dt \quad (5.43)$$

Da última desigualdade obtém-se

$$\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |c_{ij}(t, s) - \tilde{c}_{ij}(t, s)| \leq \max_{1 \leq j \leq n} \text{vrai sup}_{s \in [0, T]} \sum_{i=1}^n \int_0^T |r_{ij}(t, s) - \tilde{r}_{ij}(t, s)| dt = \|R - \tilde{R}\|_{L^1[0, nT] \rightarrow L^1[0, nT]} \quad (5.44)$$

De (5.42) e (5.44) temos

$$\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |c_{ij}(t, s) - \tilde{c}_{ij}(t, s)| \leq \frac{\delta}{1 - \delta} (1 + \max_{1 \leq j \leq n} (\text{vrai sup}_{s \in [0, T]} \sum_{i=1}^n \int_0^T |\tilde{r}_{ij}(t, s)|)) \blacksquare \quad (5.45)$$

### 5.3 Programa para a construção aproximada da matriz de Cauchy

O programa a seguir implementa o algoritmo proposto para a construção aproximada da matriz de Cauchy, bem como a avaliação do erro da aproximação obtida.

#### Requisitos do programa

- Mínimo de 136 MB de HD para instalar o Maple 8 ou uma versão mais avançada;
- Mínimo de 128MB de memória RAM;

A primeira parte do programa constitui a secção de entrada de dados. São introduzidos os valores de  $N$ ,  $n$ ,  $P$  e dos retardamentos  $h_i(t)$ . Segue a secção do processamento onde são calculados os diversos valores intermédios tais como  $K$  e  $\tilde{R}$ .

#### Início do programa

Introduza os valores de  $n$ (inteiro),  $N$ (inteiro) e  $T$ (real e positivo) seguidos de ponto e virgula

```
> n:=
> t:='t';s:='s';

> N:=

> T:=
```

Se  $n$  for igual a 1, introduza a função  $P$  na forma  $P:=t->'funcao(t)'$  (Ex:  $P:=t->3*t$ ;) )

```
> P:=t->
> P:=Matrix(n);f:=Matrix(n,1);
```

Se  $n$  for maior que 1, introduza os elementos da **matriz P** na forma  $P[i,j]:= 'funcao'$ : (Ex:  $P[1,2]:=3*t$ ;) )

Os valores dos índices  $i$  e  $j$  variam de 1 a  $n$ . Podem ser inseridos varios elementos na mesma linha

```
> P:=t->unapply(P,t);
```

Introduza os elementos da função  $f$  na forma  $f[j,1]:= 'funcao'$ : (Ex:  $f[4,1]:=3*t$ ;) )

Os valores dos índices  $i$  e  $j$  variam de 1 a  $n$ . Se  $n$  for igual a 1, teremos a função  $f:=t \rightarrow 'funcao(t)'$ ;

```
> if n=1 then f:=t->          else
> if n>1 then
> f:=t->unapply(f,t);end if; end if;
```

Introduza o retardamento  $h(t)$

```
> h:=t->

> chi:=(t,s)->piecewise(0<=s and s<=h(t)
> and h(t)<=t and
> t<=value(T),1,0);

> hs:=T/(N+1);          ti:=i->i*hs;
```

Metodos auxiliares

```
> modulo:=proc(M) A:=Matrix(n); for i from
> 1 to n do for j from 1 to n do if n=1 then
> M1[1,1]:=A[1,1];A[1,1]:=abs(M1[1,1]); else
> A[i,j]:=abs(M[i,j]);end if;end do;end do;
> if n=1 then return
> A[1,1];else return A;end if; end proc;
> comparaMatrizes:=proc(M,Q)
> b:=boolean;b:=false;
> for i from 1 to n do
> for j from 1 to n do b:=evalb(M[i,j]<=Q[i,j]); if not b then
> return evalf(b) end if; end do; end do; return evalb(true); end
> proc;
> K:=unapply(chi(t,s)*P(t),(t,s));

> with(LinearAlgebra):
> delta_K:=Matrix(N); Kij:=Matrix(N);
> maximizarK:=proc(ki,kj::integer,step::float) global delta_K;
> maxstep:=trunc(hs/step); if n=1 then
> delta_K[ki,kj]:=0; else delta_K[ki,kj]:=Matrix(n); end if;
> min:=K(ti(ki),ti(kj-1)); maxi:=K(ti(ki),ti(kj-1)); for i1 from 1
> to maxstep do t:=ti(ki)+i1*step;
> for j1 from 1 to maxstep do s:=ti(kj)+i1*step; actual:=K(t,s);
> for i from 1 to n do for j from 1 to n do
> if n=1 then if actual<min then min:=actual end if; if actual>maxi
> then maxi:=actual end if; end if; if n>1 then if
> actual[i,j]<min[i,j] then min[i,j]:=actual[i,j]; end if; if
> actual[i,j]>maxi[i,j] then maxi[i,j]:=actual[i,j]; end if; end if;
> end do; end do; end do; end do; if n=1 then
> delta_K[ki,kj]:=abs(min-maxi)/2; else
> delta_K[ki,kj]:=modulo(min-maxi)/2; end if; return .5*maxi+.5*min;
> end
> proc;
> acharKij:=proc() global Kij;
```

```

> for i from 1 to N do for j from 1 to i do
> Kij[i,j]:=maximizarK(i,j,0.1); end do; end do;
> return Kij; end proc;

> acharKij();

> eta:=(i,t)->piecewise(i*T/(N+1)<=t and (i+1)*T/(N+1)>=t,1,0);
> H:=Matrix(N,N);B:=Matrix(N,N); B_AUX:=Matrix(N,N);
> for j from 1 to N do
> for i from j to N do
> if i=j then
> H[i,j]:=Matrix(n,shape=identity); if n>1 then
> B[i,j]:=H[i,j]; end if;
> else if j>i then H[i,j]:=0;
> else
> H[i,j]:=-hs*Kij[i,j+1]; end
> if
> end if
> end do; end do;
> if n=1 then B:=MatrixInverse(H); else if n>1 then
> B_AUX:=H;
> for k from 1 to N-1 do
> for
> i from k+1 to N do
> for j from 1 to k do
> B[i,j]:=-B_AUX[i,k].B[k,j]+B[i,j]
> end do;
> end do;
> end do; end if;
> end if;
> R:=Matrix(N,N);r_ap:=Matrix(N,N);if n=1
> then R_ap:=0;C_aprox:=0;C_ap:=0; else
> R_ap:=Matrix(n,n);C_aprox:=Matrix(n,n);C_ap:=Matrix(n,n);end
> if;j:='j';k:='k';

> for i from 1 to N do for k from 1 to i do
> R[i,k]:=sum('B[i,j].Kij[j,k]', 'j'=k..i); end do;end do;

> R_ap:=(t,s)->sum('eta(i,t)*sum('R[i,u]*eta(u-1,s)', 'u'=1..i)', 'i'=1..
> N); print(R);

```



```

> normMatriz:=proc(M,dim)      maxi:=0;
> for j from 1 to dim do
> soma:=sum('abs(M[i,j])', 'i'=1..dim);
> if maxi<soma then maxi:=soma;end if; end do;
> return
> maxi; end proc;
> achar_Norma:=proc()      j:='j'; i:='i';
> norma:=Matrix(N); soma:= Matrix(N);
> from 1 to N do for i from k+1 to N+1 do
> soma[i-1,k]:=delta_K[i-1,k]+hs*sum('delta_K[i-1,j].modulo(R[j,k])', 'j'
> =k..i-1); if n>1 then norma[i-1,k]:=normMatriz(soma[i-1,k],n);
> end ;
> end do; end do; if n=1 then
> return hs*normMatriz(soma,N);else return
> hs*normMatriz(norma,N);end
> if; end proc ;
> normaOP:=achar_Norma();

> acharNormaR:=proc() soma:=Matrix(N);
> for k from 1 to N do for i from k to
> N do soma[i,k]:=normMatriz(R[i,k],n); end do; end do; return
> hs*normMatriz(soma,N); end proc;

> if normaOP< 1 then
> if n=1 then
> C_aprox:=(t,s)->1+int(R_ap(tau,s),tau=s..t);
> Delta_Cauchy:=normaOP/(1-normaOP)*(1+normMatriz(modulo(R),N));else
> if n>1 then
> C_aprox:=(t,s)->Matrix(n,shape=identity)+int(R_ap(tau,s),tau=s..t);
> Delta_Cauchy:=normaOP/(1-normaOP)*(1+acharNormaR()); end if; end
> if;

> if normaOP>=1 then print("A norma do
> operador DeltaK é maior que 1. Nao há ponto fixo");
> end if;

> K_aprox:=(t,s)->sum('eta(i,t)*sum('Kij[i,j]*eta(j-1,s)', 'j'=1..i)', 'i
> '=1..N);

```

## 5.4 Exemplos de construção aproximada da Matriz de Cauchy

Apresentam-se, em seguida, alguns exemplos de construção aproximada da matriz de Cauchy.

Os resultados usados nos exemplos foram obtidos a partir do programa criado após a inserção da matriz  $P$ , da função  $f$  e dos retardamentos  $h$ . Estes resultados podem ser vistos nos anexos

1, 2 e 3. Nos anexos foram incluídas apenas as seções de introdução e saída de dados, tendo sido omitida a restante parte correspondente ao processamento.

**Exemplo 5.4.1** Usando o algoritmo proposto achemos a matriz de Cauchy aproximada para o problema:

$$\dot{x}(t) - P(t)x_h(t) = 1, \quad t \in [0, 5]$$

$$x(0) = 0$$

$$\text{onde } x_h(t) = \begin{cases} x[h(t)], & h(t) \in [0, 5]; \\ 0, & h(t) \notin [0, 5]. \end{cases}$$

$$P(t) = \chi_1(t) - 2\chi_2(t) - 2\chi_3(t) + 3\chi_4(t) - \chi_6(t) - \chi_7(t) + 4\chi_8(t) + 4\chi_9(t)$$

$$h(t) = 0.4\chi_1(t) + 0.9\chi_2(t) + 0.1\chi_3(t) + 0.7\chi_4(t) - \chi_5(t) + 0.2\chi_6(t) + \chi_7(t) + 2\chi_9(t)$$

### Resolução:

Vamos dividir o segmento  $[0, 5]$  em 11 partes iguais, considerando que  $\Delta_h \leq 10^{-4}$ . Sendo assim, teremos  $N = 10$ . Os resultados que se seguem podem ser vistos no anexo 1.

Usando a fórmula (4.18) podemos determinar

$$\|\Delta K\| \leq \frac{95}{22}$$

Para avaliarmos  $\|I + \tilde{R}\|_{L^n-L^n}$  fazemos a seguinte comparação:

$$\|I + \tilde{R}\|_{L^n-L^n} \leq \|I\|_{L^n-L^n} + \|\tilde{R}\|_{L^n-L^n}$$

Usando a fórmula (4.21) teremos

$$\|I + \tilde{R}\|_{L^1-L^1} \leq 1 + 0 = 1$$

Agora podemos achar

$$\delta = \|\Delta K\|_{L^1-L^1} \|I + \tilde{R}\|_{L^1-L^1} = \frac{95}{22} \times 1 = \frac{95}{22}$$

que é um valor muito superior a 1. Neste caso, não é possível obter a aproximação da matriz de Cauchy. Portanto, não prosseguimos com o nosso algoritmo.

Se aumentarmos o número de divisões para 51, teremos  $N = 50$ , obtendo, segundo os resultados que podem ser vistos nas últimas linhas do anexo 2:

$$\|\Delta K\| \leq 0 \text{ resultando então em } \|\Delta K\| = 0$$

Neste caso, teremos

$$\|I + \tilde{R}\|_{L^1-L^1} \leq 1 + 0 = 1$$

$$\|\Delta K(I + \tilde{R})\| = 0 \times (0 + 1) = 0$$

O erro da matriz de Cauchy terá a aproximação

$$\|C - \tilde{C}\|_{L^1-L^1} \leq \frac{\delta}{1-\delta} \|I + \tilde{R}\| = \frac{0}{1-0} \times (1+0) = 0$$

O que significa que não há diferença entre a aproximação obtida e o resultado real da matriz de Cauchy. Neste caso, usando a fórmula

$$\tilde{C}(t, s) = E + \int_s^t \tilde{R}(t, s) dt$$

teremos, para o caso  $n = 1$ :

$$\tilde{C}(t, s) = 1 + \int_s^t 0 dt = 1 \quad (5.46)$$

**Exemplo 5.4.2** Usando o algoritmo proposto, achemos a matriz de Cauchy aproximada do problema de Cauchy

$$\dot{x}(t) - P(t)x_h(t) = f(t), \quad t \in [0, 5]$$

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

onde

$$P(t) = \{P_{ij}(t)\}_{i,j=1,2} \quad x_h(t) = \text{col}(x_{h_1}^1(t), x_{h_2}^2(t))$$

$$P_{11}(t) = 0.1\chi_1(t) - 0.2\chi_2(t) - 0.2\chi_3(t) + 0.03\chi_4(t) + 0.3\chi_5(t) - 0.01\chi_6(t) - \chi_7(t) + 0.4\chi_8(t) + 0.4\chi_9(t)$$

$$P_{12}(t) = -0.01\chi_6(t) - 0.2\chi_1(t) + 0.4\chi_2(t) - 0.3\chi_3(t) + 0.05\chi_4(t) - 0.01\chi_5(t) + 0.2\chi_8(t) + 0.4\chi_9(t)$$

$$P_{21}(t) = 0.2\chi_0(t) - 0.5\chi_1(t) + 0.3\chi_4(t) - 0.7\chi_5(t) + 0.02\chi_6(t) + 0.08\chi_7(t) - 0.34\chi_8(t) - 0.4\chi_9(t)$$

$$P_{22}(t) = 0.1\chi_0(t) - 0.4\chi_1(t) - 0.06\chi_2(t) + 0.2\chi_3(t) + 0.03\chi_4(t) + 0.4\chi_5(t) + 0.5\chi_6(t) - 0.5\chi_7(t) - 0.6\chi_8(t) - 0.7\chi_9(t)$$

$$h_1(t) = 0.4\chi_1(t) + 0.9\chi_2(t) + 0.1\chi_3(t) + 0.7\chi_4(t) - \chi_5(t) + 0.2\chi_6(t) + \chi_7(t) + 2\chi_8(t) + 2\chi_9(t)$$

$$h_2(t) = 0.4\chi_1(t) + 0.9\chi_2(t) + 0.1\chi_3(t) + 0.7\chi_4(t) - \chi_5(t) + 0.2\chi_6(t) + \chi_7(t) + 2\chi_8(t) + 2\chi_9(t)$$

$$\chi_i = \chi_{[0.5i, 0.5(i+1)]}(t), \quad i = 0..9$$

$$f_1(t) = 1$$

$$f_2(t) = -1$$

**Resolução:**

Vamos dividir o segmento  $[0, 5]$  em 3 partes iguais, considerando que  $\Delta_n \leq 10^{-4}$ . Sendo assim, teremos  $N = 2$ . Usando a fórmula (4.18) determinamos

$$\|\Delta K\| \leq 0.225000000$$

Usando a fórmula (4.21) teremos

$$\|I + \tilde{R}\|_{L^1-L^1} \leq 1 + 0.125000000 = 1.125000000$$

Agora podemos achar

$$\delta = \|\Delta K\|_{L^1-L^1} \|I + \tilde{R}\|_{L^1-L^1} = 0.225000000 \times 1.125000000 = 0.253125000 < 1$$

O erro da matriz de Cauchy terá a aproximação

$$\|C - \tilde{C}\|_{L^1-L^1} \leq \frac{\delta}{1 - \delta} \|I + \tilde{R}\| = \frac{0.253125000}{1 - 0.253125000} \times (1 + 0.125000000) = 0.3812761506$$

A matriz de Cauchy aproximada foi obtida com base na fórmula (5.46) que, para  $n = 2$  tomará a forma

$$\tilde{C}(t, s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \int_s^t \tilde{R}(t, s) dt$$

O resultado dessa matriz é apresentado no anexo 3.

## Conclusões e recomendações

- O método usado para a construção da matriz de Cauchy possui uma precisão muito aceitável para diversos problemas da actualidade que envolvem equações diferenciais funcionais lineares com retardamento;
- Quanto maior for o número de divisões do segmento  $[0, T]$  maior será a precisão obtida para a matriz de Cauchy e, conseqüentemente, mais refinada será a solução obtida;
- Recomenda-se que o programa aqui desenvolvido seja melhorado de modo a reduzir a sua complexidade temporal e a oferecer um interface amigável;
- Recomenda-se, também, o uso de uma ferramenta que permita a computação para um número maior de divisões do intervalo do domínio de definição da EDF com menor alocação de memória possível;



## Bibliografia

- [1] V.P. Maksimov, J.S.P. Munembe. *On the question of enclosing solutions of linear differential systems.*
- [2] V.P. Maksimov. *Sobre a fórmula de Cauchy para equações diferenciais funcionais.* Equações Diferenciais, 1977. T13. Nº 4
- [3] P.P. Zabreiko e outros. *Equações integrais.* Nauka, 1968.
- [4] C.E. Mixlin. *Lições sobre Equações lineares.* Moscovo. Nauka, 1959.
- [5] B.Z. Vulikh. *Intoduction to Functional Analysis for Scientists and Technologists.* (Vvedeniye v funktsional'nyi analiz). Fizmatgiz, Moscovo, 1958. Traduzido para inglês por Pergamon Press, 1963.
- [6] D.H. Griffel. *Applied Functional Analysis.* Halsted Press, London, 1985
- [7] V. Hutson and J. Pym. *Applications of functional analysis and operator theory.* 1980
- [8] A. N. Kolmogorov, C. V. Fomin. *Elements of the theory of functional analysis.* 1999
- [9] L.V. Kantorov, G.P. Akilov. *Functional Analysis in normed spaces.* Pergamon Press, Russia, 1964.
- [10] Ronald Larsen. *Functional Analysis - An introduction.* Marcel Dekker, inc. New York, 1973.
- [11] E.T. Copson. *Metric Spaces.* Cambridge University Press, 1968.
- [12] Kôsaku Yosida. *Functional Analysis.* Springer-verlag, Berlin, 1965
- [13] J. Hale. *Functional Differential Equations.* Springer Verlag, New York, 1971
- [14] Alves, José Ferreira. *Análise Funcional.* Universidade do Porto, 2002
- [15] N. V. Azbelev, V.P. Maksimov, L.F. Rakhmatullina. *Methods of the contemporaneous theory of functional differential equations*
- [16] M.L. Krasnov, A.I. Kisilov, G.I. Makarenko. *Ecuaciones integrales.* tercera edicion. Editora Mir, Moscovo, 1982
- [17] B. S. Dobronets. *On some two-sided methods for solving system of ordinary differential equations.* // Interval computatios. 1992. Nº1(3) - pp. 6 – 19

- [18] S. K. Goudimov. *Ordinary differential equations with constant coefficient*. American Mathematical Society, 1997.- 282 p.
- [19] R. E. Moor. *Interval Analysis*. Prentice-Hall, 1996.
- [20] E. W. Kaucher, W. L. Miranker. *Self-Validating Numerics for function space problems*. In: Reliability in computing, R. R. Moor, eds 1988 pp. 404-425
- [21] R. J. Lohner. *Enclosing the solution of ordinary initial and boundary value problems*. In: Computer Arithmetic: Scientific computation and programming languages. E. W. Kaucher, U. W. Kulish and C. Ulrich, ed., Stuttgart, 1987
- [22] M. Plum. *Computer-assisted existence proofs for two-point boundary value problems*. // Computing, 1991, v. 46
- [23] M. Plum. *Verified existence and inclusion results for two-point boundary value problems*. In: Contributions to computer arithmetic and self-validating numerical methods. C. Ulrich, eds., IMACS, 1990

# Índice alfabético

- álgebra de conjuntos. 7
- anel, 6
- aproximações sucessivas. 42
- bola
  - aberta, 9
  - fechada, 9
- Cauchy
  - problema de , 51
  - fórmula de, 51
  - Matriz de, 65
- Conjunto
  - aberto, 9
  - fechado, 9
- conjunto
  - medível, 19
- desigualdade
  - de Cauchy-Schwarz, 10
  - triangular, 8
- distância, 7
- equação
  - de Fredholm, 40
  - de Volterra, 40
  - diferencial funcional, 45
    - linear, 47
    - retardada, 48
  - integral, 39
- espaço
  - Base de um, 15
  - de Banach, 18
  - de funções somáveis, 19
  - dimensão de um, 15
  - dos operadores lineares, 29
  - euclidiano, 17
  - métrico, 7
    - completo, 9
    - medível, 18
    - norma de um, 17
    - normado, 17
    - topológico, 7
    - vectorial, 13
- função
  - absolutamente contínua, 23
  - de variação limitada, 21
  - somável, 23
- funcional
  - contínuo, 25
  - funcional linear, 25
- integral de Riemann-Stieltjes, 21
- isomorfismo, 50
- Lipschitz, 38
- medida
  - de Dirac, 19
  - inferior , 19
  - superior , 19
- Núcleo
  - resolvente, 65
- operador
  - de contração, 34
- Operadores
  - de Green, 53
  - contínuos, 26
  - invertíveis, 32
  - limitados, 28
  - lineares, 26
  - locais, 26
  - norma de, 29
  - Operações sobre, 29



ponto

fixo, 34

problema

de fronteira, 51

Resolvente, 42, 55

semi-anel, 7

soma integral, 21

subespaço, 15

gerado, 16

próprio, 15

sucessão

fundamental, 8

limite de, 8

vector fundamental, 52

vectores

linearmente

dependentes, 15

independentes, 15

ANEXOS

## Anexo 1

Introduza os valores de n(inteiro). N(inteiro) e T(real e positivo) seguidos de ponto e virgula

```
> n:=1;
> t:='t';s:='s';
```

```
n := 1
t := t
s := s
```

```
> N:=10;
```

```
N := 10
```

```
> T:=5;
```

```
T := 5
```

```
> chi1:=(i,t)->piecewise(T*i/10<=t and t<=T*(i+1)/10,1,0);
> vector1:=(a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,t)->a*chi1(0,t)+b*chi1(1,t)+c*chi1(2,t)
> +d*chi1(3,t)+e*chi1(4,t)+f*chi1(5,t)+g*chi1(6,t)+h*chi1(7,t)+i*chi1(8,
> t)+j*chi1(9,t);
```

$$\chi_1 := (i, t) \rightarrow \text{piecewise}\left(\frac{1}{10} T i \leq t \text{ and } t \leq \frac{1}{10} T (i+1), 1, 0\right)$$

$$\text{vector1} := (a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, t) \rightarrow a \chi_1(0, t) + b \chi_1(1, t) + c \chi_1(2, t) + d \chi_1(3, t) + e \chi_1(4, t) + f \chi_1(5, t) + g \chi_1(6, t) + h \chi_1(7, t) + i \chi_1(8, t) + j \chi_1(9, t)$$

Se n for igual a 1, introduza a funcao P na forma P:=`funcao(t)`: (Ex: P:=3\*t;)

```
> if n=1 then P:=t->vector1(0,1,-2,-2,3,3,-1,-1,4,4,t); end if;
P := t → vector1(0, 1, -2, -2, 3, 3, -1, -1, 4, 4, t)
```

Introduza os elementos da funcao f na forma f[j,1]:=`funcao`: (Ex: f[4,1]:=3\*t;)

Os valores dos indices i e j variam de 1 a n.

```
> if n=1 then f:= 1; end if;
```

```
f := 1
```

Introduza o retardamento h(t)

```
> if n>1 then
> h:=t->vector1(0,.4,.9,.1,.7,-1,.2,1,0,2,t); else
> h:=t->vector1(0,.4,.9,.1,.7,-1,.2,1,0,2,t);end if;
```

$$h := t \rightarrow \text{vector1}(0, 0.4, 0.9, 0.1, 0.7, -1, 0.2, 1, 0, 2, t)$$

O resultado do processamento é o seguinte:

“A norma do operador DeltaK E maior que 1. Nao ha ponto fixo”  
Sendo assim, o programa não prossegue.

## Anexo 2

Introduza os valores de  $n$ (inteiro),  $N$ (inteiro) e  $T$ (real e positivo) seguidos de ponto e virgula

```
> n:=1;
> t:='t';s:='s';
```

```
n := 1
t := t
s := s
```

```
> N:=50;
```

```
N := 50
```

```
> T:=5;
```

```
T := 5
```

```
> chi1:=(i,t)->piecewise(T*i/10<=t and t<=T*(i+1)/10,1,0);
> vector1:=(a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,t)->a*chi1(0,t)+b*chi1(1,t)+c*chi1(2,t)
> +d*chi1(3,t)+e*chi1(4,t)+f*chi1(5,t)+g*chi1(6,t)+h*chi1(7,t)+i*chi1(8,
> t)+j*chi1(9,t);
```

$$\chi_1 := (i, t) \rightarrow \text{piecewise}\left(\frac{1}{10}T i \leq t \text{ and } t \leq \frac{1}{10}T(i+1), 1, 0\right)$$

$$\text{vector1} := (a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, t) \rightarrow a\chi_1(0, t) + b\chi_1(1, t) + c\chi_1(2, t) + d\chi_1(3, t) + e\chi_1(4, t) + f\chi_1(5, t) + g\chi_1(6, t) + h\chi_1(7, t) + i\chi_1(8, t) + j\chi_1(9, t)$$

Se  $n$  for igual a 1, introduza a funcao  $P$  na forma  $P:=$ 'funcao( $t$ )' (Ex:  $P:=3*t$ );

```
> if n=1 then P:=t->vector1(0,1,-2,-2,3,3,-1,-1,4,4,t); end if;
P := t -> vector1(0, 1, -2, -2, 3, 3, -1, -1, 4, 4, t)
```

Introduza os elementos da funcao  $f$  na forma  $f[j,1]:=$ 'funcao': (Ex:  $f[4,1]:=3*t$ );

Os valores dos indices  $i$  e  $j$  variam de 1 a  $n$ .

```
> if n=1 then f:= 1; end if;
```

```
f := 1
```

Introduza o retardamento  $h(t)$

```
> if n>1 then
> h:=t->vector1(0,.4,.9,.1,.7,-1,.2,1,0,2,t); else
> h:=t->vector1(0,.4,.9,.1,.7,-1,.2,1,0,2,t);end if;
```

$$h := t \rightarrow \text{vector1}(0, 0.4, 0.9, 0.1, 0.7, -1, 0.2, 1, 0, 2, t)$$

## Resultados

*norma\_DeltaK* := 0

*normR* := 0

*C\_aproxim* := 1.

### Anexo 3

Introduza os valores de n(inteiro), N(inteiro) e T(real e positivo) seguidos de ponto e virgula

```
> n:=2;
> t:='t';s:='s';
```

```
n := 2
t := t
s := s
```

```
> N:=3;
```

```
N := 3
```

```
> T:=5;
```

```
T := 5
```

```
> chi1:=(i,t)->piecewise(T*i/10<=t and t<=T*(i+1)/10,1,0);
> vector1:=(a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,t)->a*chi1(0,t)+b*chi1(1,t)+c*chi1(2,t)
> +d*chi1(3,t)+e*chi1(4,t)+f*chi1(5,t)+g*chi1(6,t)+h*chi1(7,t)+i*chi1(8,
> t)+j*chi1(9,t);
```

$$\chi_1 := (i, t) \rightarrow \text{piecewise}\left(\frac{1}{10}T i \leq t \text{ and } t \leq \frac{1}{10}T(i+1), 1, 0\right)$$

$$\text{vector1} := (a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, t) \rightarrow a\chi_1(0, t) + b\chi_1(1, t) + c\chi_1(2, t) + d\chi_1(3, t) + e\chi_1(4, t) + f\chi_1(5, t) + g\chi_1(6, t) + h\chi_1(7, t) + i\chi_1(8, t) + j\chi_1(9, t)$$

Se n for maior que 1. Introduza os elementos da **matriz P** na forma P[i,j]:='funcao': (Ex: P[1,2]:=3\*t:)

Os valores dos indices i e j variam de 1 a n. Podem ser inseridos varios elementos na mesma linha

```
> if n>1 then
> P:=t->Matrix(n, [[vector1(0, .1, -.02, -.2, .03, .3, -.01, -1, .4, .4, t), vector1
> (-.01, -.2, .4, -.3, .05, -.01, 0, 0, .2, .4, t)], [vector1(.2, -.5, 0, 0, .3, -.7, .02
> , .08, -.034, -.4, t), vector1(.1, -.4, -.06, .2, .03, .4, .5, -.5, -.6, -.7, t)]]);
> end if;
```

$$P := t \rightarrow \text{Matrix}(n, [[\text{vector1}(0, 0.1, -0.02, -0.2, 0.03, 0.3, -0.01, -1, 0.4, 0.4, t), \text{vector1}(-0.01, -0.2, 0.4, -0.3, 0.05, -0.01, 0, 0, 0.2, 0.4, t)], [\text{vector1}(0.2, -0.5, 0, 0, 0.3, -0.7, 0.02, 0.08, -0.034, -0.4, t), \text{vector1}(0.1, -0.4, -0.06, 0.2, 0.03, 0.4, 0.5, -0.5, -0.6, -0.7, t)]])$$

Introduza os elementos da funcao f na forma f[j,1]:='funcao': (Ex: f[4,1]:=3\*t:)

```
> if n=1 then f:= 1; else f:=t->Matrix(n, [[1],[1]]);end if;
Os valores dos indices i e j variam de 1 a n.
```

Introduza o retardamento h(t)

Introduza o retardamento  $h(t)$

```
> if n>1 then  
> h:=t->vector1(0,.4,.9,.1,.7,-1,.2,1,0,2,t); else  
> h:=t->vector1(0,.4,.9,.1,.7,-1,.2,1,0,2,t);end if;  
       $h := t \rightarrow \text{vector1}(0, 0.4, 0.9, 0.1, 0.7, -1, 0.2, 1, 0, 2, t)$ 
```

### Resultados

$\text{norma\_DeltaK} := 0.2250000000$

$\text{normaR} := 0.125000000000$

O resultado da matriz de Cauchy aproximada encontra-se na página a seguir.

$C_{\text{aproxim}} :=$

$$\begin{aligned}
 & 3.750000000 \left( \begin{cases} 1. & \frac{5}{2} - s \leq 0 \text{ and } s - \frac{15}{4} \leq 0 \\ 0. & \text{otherwise} \end{cases} \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix} \text{Heaviside}(s - 3.750000000) + \left( \begin{cases} 0., t \leq 1.250000000 \\ -1.250000000 \begin{bmatrix} -0.01000000000 & 0.2000000000 \\ 0. & -0.03000000000 \end{bmatrix} \text{Heaviside}(s) \\ + \begin{bmatrix} -0.01000000000 & 0.2000000000 \\ 0. & -0.03000000000 \end{bmatrix} \text{Heaviside}(s) t \\ + 1.250000000 \begin{bmatrix} -0.01000000000 & 0.2000000000 \\ 0. & -0.03000000000 \end{bmatrix} \text{Heaviside}(s - 1.250000000) \\ - 1. \begin{bmatrix} -0.01000000000 & 0.2000000000 \\ 0. & -0.03000000000 \end{bmatrix} \text{Heaviside}(s - 1.250000000) t, t < 2.500000000 \\ 1.250000000 \left( \begin{cases} 1. & -s \leq 0 \text{ and } s - \frac{5}{4} \leq 0 \\ 0. & \text{otherwise} \end{cases} \begin{bmatrix} -0.01000000000 & 0.2000000000 \\ 0. & -0.03000000000 \end{bmatrix}, \right. \\ t = 2.500000000 \\ 1.250000000 \begin{bmatrix} -0.01000000000 & 0.2000000000 \\ 0. & -0.03000000000 \end{bmatrix} \text{Heaviside}(s) \\ - 1.250000000 \begin{bmatrix} -0.01000000000 & 0.2000000000 \\ 0. & -0.03000000000 \end{bmatrix} \text{Heaviside}(s - 1.250000000) \\ + \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix} \text{Heaviside}(s) t - 2.500000000 \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix} \text{Heaviside}(s) \\ - 1. \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix} \text{Heaviside}(s - 2.500000000) t + 2.500000000 \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix} \text{Heaviside}(s - 2.500000000) \\ , t < 3.750000000 \\ 1.250000000 \left( \begin{cases} 1. & -s \leq 0 \text{ and } s - \frac{5}{4} \leq 0 \\ 0. & \text{otherwise} \end{cases} \begin{bmatrix} -0.01000000000 & 0.2000000000 \\ 0. & -0.03000000000 \end{bmatrix} \right. \\ + 1.250000000 \left( \begin{cases} 1. & -s \leq 0 \text{ and } s - \frac{5}{4} \leq 0 \\ 0. & \text{otherwise} \end{cases} \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix} \right. \\ + 1.250000000 \left( \begin{cases} 1. & \frac{5}{4} - s \leq 0 \text{ and } s - \frac{5}{2} \leq 0 \\ 0. & \text{otherwise} \end{cases} \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix}, t = 3.750000000 \\ 1.250000000 \begin{bmatrix} -0.01000000000 & 0.2000000000 \\ 0. & -0.03000000000 \end{bmatrix} \text{Heaviside}(s)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -1.250000000 \begin{bmatrix} -0.0100000000 & 0.2000000000 \\ 0. & -0.0300000000 \end{bmatrix} \text{Heaviside}(s - 1.250000000) \\
& + 1.250000000 \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix} \text{Heaviside}(s) - 1.250000000 \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix} \text{Heaviside}(s - 1.250000000) \\
& + 1.250000000 \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix} \text{Heaviside}(s - 1.250000000) \\
& - 1.250000000 \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix} \text{Heaviside}(s - 2.500000000) \\
& + \begin{bmatrix} -0.5000000000 & 0. \\ 0.0400000000 & -0.2500000000 \end{bmatrix} \text{Heaviside}(s) t \\
& - 3.750000000 \begin{bmatrix} -0.5000000000 & 0. \\ 0.0400000000 & -0.2500000000 \end{bmatrix} \text{Heaviside}(s) \\
& - 1. \begin{bmatrix} -0.5000000000 & 0. \\ 0.0400000000 & -0.2500000000 \end{bmatrix} \text{Heaviside}(s - 1.250000000) t \\
& + 3.750000000 \begin{bmatrix} -0.5000000000 & 0. \\ 0.0400000000 & -0.2500000000 \end{bmatrix} \text{Heaviside}(s - 1.250000000) \\
& + \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix} \text{Heaviside}(s - 1.250000000) t - 3.750000000 \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix} \text{Heaviside}(s - 1.250000000) \\
& - 1. \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix} \text{Heaviside}(s - 2.500000000) t + 3.750000000 \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix} \text{Heaviside}(s - 2.500000000) \\
& + \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix} \text{Heaviside}(s - 2.500000000) t - 3.750000000 \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix} \text{Heaviside}(s - 2.500000000) \\
& - 1. \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix} \text{Heaviside}(s - 3.750000000) t + 3.750000000 \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix} \text{Heaviside}(s - 3.750000000) \\
& , t < 5.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 1.250000000 \left( \begin{cases} 1. & -s \leq 0 \text{ and } s - \frac{5}{4} \leq 0 \\ 0. & \text{otherwise} \end{cases} \right) \begin{bmatrix} -0.0100000000 & 0.2000000000 \\ 0. & -0.0300000000 \end{bmatrix} \\
& + 1.250000000 \left( \begin{cases} 1. & -s \leq 0 \text{ and } s - \frac{5}{4} \leq 0 \\ 0. & \text{otherwise} \end{cases} \right) \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix} \\
& + 1.250000000 \left( \begin{cases} 1. & \frac{5}{4} - s \leq 0 \text{ and } s - \frac{5}{2} \leq 0 \\ 0. & \text{otherwise} \end{cases} \right) \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix} \\
& + 1.250000000 \left( \begin{cases} 1. & -s \leq 0 \text{ and } s - \frac{5}{4} \leq 0 \\ 0. & \text{otherwise} \end{cases} \right) \begin{bmatrix} -0.5000000000 & 0. \\ 0.0400000000 & -0.2500000000 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$+ 1.250000000 \left( \begin{cases} 1. & \frac{5}{4} - s \leq 0 \text{ and } s - \frac{5}{2} \leq 0 \\ 0. & \text{otherwise} \end{cases} \right) \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix}$$

$$+ 1.250000000 \left( \begin{cases} 1. & \frac{5}{2} - s \leq 0 \text{ and } s - \frac{15}{4} \leq 0 \\ 0. & \text{otherwise} \end{cases} \right) \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix}, t = 5.$$

$$1.250000000 \left( \begin{cases} 1. & -s \leq 0 \text{ and } s - \frac{5}{4} \leq 0 \\ 0. & \text{otherwise} \end{cases} \right)$$

$$\begin{bmatrix} -0.0100000000000000002 & 0.200000000000000010 \\ 0. & -0.0299999999999999990 \end{bmatrix}$$

$$+ 1.250000000 \left( \begin{cases} 1. & -s \leq 0 \text{ and } s - \frac{5}{4} \leq 0 \\ 0. & \text{otherwise} \end{cases} \right) \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix}$$

$$+ 1.250000000 \left( \begin{cases} 1. & \frac{5}{4} - s \leq 0 \text{ and } s - \frac{5}{2} \leq 0 \\ 0. & \text{otherwise} \end{cases} \right) \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix} + 1.250000000$$

$$\left( \begin{cases} 1. & -s \leq 0 \text{ and } s - \frac{5}{4} \leq 0 \\ 0. & \text{otherwise} \end{cases} \right) \begin{bmatrix} -0.500000000000000000 & 0. \\ 0.0400000000000000010 & -0.250000000000000000 \end{bmatrix}$$

$$+ 1.250000000 \left( \begin{cases} 1. & \frac{5}{4} - s \leq 0 \text{ and } s - \frac{5}{2} \leq 0 \\ 0. & \text{otherwise} \end{cases} \right) \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix}$$

$$+ 1.250000000 \left( \begin{cases} 1. & \frac{5}{2} - s \leq 0 \text{ and } s - \frac{15}{4} \leq 0 \\ 0. & \text{otherwise} \end{cases} \right) \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix}, 5. < t \right) + 1.250000000$$

$$\left( \begin{cases} 1. & -s \leq 0 \text{ and } s - \frac{5}{4} \leq 0 \\ 0. & \text{otherwise} \end{cases} \right) \begin{bmatrix} -0.0100000000000000002 & 0.200000000000000010 \\ 0. & -0.0299999999999999990 \end{bmatrix}$$

$$\text{Heaviside}(s - 1.250000000) - 2.500000000 \left( \begin{cases} 1. & -s \leq 0 \text{ and } s - \frac{5}{4} \leq 0 \\ 0. & \text{otherwise} \end{cases} \right)$$

$$\begin{bmatrix} -0.0100000000000000002 & 0.200000000000000010 \\ 0. & -0.0299999999999999990 \end{bmatrix} \text{Heaviside}(s - 2.500000000)$$

$$- 5. \left( \begin{cases} 1. & \frac{5}{4} - s \leq 0 \text{ and } s - \frac{5}{2} \leq 0 \\ 0. & \text{otherwise} \end{cases} \right) \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix} \text{Heaviside}(s - 5.)$$

$$\begin{aligned}
& -3.750000000 \left( \begin{cases} 1. & \frac{5}{4} - s \leq 0 \text{ and } s - \frac{5}{2} \leq 0 \\ 0. & \text{otherwise} \end{cases} \right) \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix} \text{Heaviside}(s - 3.750000000) + \\
& 3.750000000 \left( \begin{cases} 1. & -s \leq 0 \text{ and } s - \frac{5}{4} \leq 0 \\ 0. & \text{otherwise} \end{cases} \right) \\
& \begin{bmatrix} -0.5000000000000000000 & 0. \\ 0.0400000000000000010 & -0.2500000000000000000 \end{bmatrix} \text{Heaviside}(s - 3.750000000) \\
& -3.750000000 \left( \begin{cases} 1. & -s \leq 0 \text{ and } s - \frac{5}{4} \leq 0 \\ 0. & \text{otherwise} \end{cases} \right) \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix} \text{Heaviside}(s - 3.750000000) \\
& + 2.500000000 \left( \begin{cases} 1. & -s \leq 0 \text{ and } s - \frac{5}{4} \leq 0 \\ 0. & \text{otherwise} \end{cases} \right) \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix} \text{Heaviside}(s - 2.500000000) \\
& -5. \left( \begin{cases} 1. & \frac{5}{2} - s \leq 0 \text{ and } s - \frac{15}{4} \leq 0 \\ 0. & \text{otherwise} \end{cases} \right) \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix} \text{Heaviside}(s - 5.) \\
& + 1. \left( \begin{cases} 1. & \frac{5}{4} - s \leq 0 \text{ and } s - \frac{5}{2} \leq 0 \\ 0. & \text{otherwise} \end{cases} \right) \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix} s \text{Heaviside}(s - 3.750000000) \\
& + 3.750000000 \left( \begin{cases} 1. & \frac{5}{4} - s \leq 0 \text{ and } s - \frac{5}{2} \leq 0 \\ 0. & \text{otherwise} \end{cases} \right) \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix} \text{Heaviside}(s - 3.750000000) \\
& + 2.500000000 \left( \begin{cases} 1. & \frac{5}{4} - s \leq 0 \text{ and } s - \frac{5}{2} \leq 0 \\ 0. & \text{otherwise} \end{cases} \right) \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix} \text{Heaviside}(s - 2.500000000) \\
& + 1. \left( \begin{cases} 1. & \frac{5}{4} - s \leq 0 \text{ and } s - \frac{5}{2} \leq 0 \\ 0. & \text{otherwise} \end{cases} \right) \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix} s \text{Heaviside}(s - 5.) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 1. \\
& \left( \begin{cases} 1. & -s \leq 0 \text{ and } s - \frac{5}{4} \leq 0 \\ 0. & \text{otherwise} \end{cases} \right) \begin{bmatrix} -0.5000000000000000000 & 0. \\ 0.0400000000000000010 & -0.2500000000000000000 \end{bmatrix} s \\
& \text{Heaviside}(s - 3.750000000) \\
& - 1. \left( \begin{cases} 1. & -s \leq 0 \text{ and } s - \frac{5}{4} \leq 0 \\ 0. & \text{otherwise} \end{cases} \right) \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix} s \text{Heaviside}(s - 2.500000000) + 1.
\end{aligned}$$

$$\left( \begin{array}{l} 1. \\ 0. \end{array} \begin{array}{l} -s \leq 0 \text{ and } s - \frac{5}{4} \leq 0 \\ \text{otherwise} \end{array} \right) \begin{bmatrix} -0.500000000000000000 & 0. \\ 0.0400000000000000010 & -0.250000000000000000 \end{bmatrix} s$$

$$\text{Heaviside}(s - 5.) - 1. \left( \begin{array}{l} 1. \\ 0. \end{array} \begin{array}{l} \frac{5}{4} - s \leq 0 \text{ and } s - \frac{5}{2} \leq 0 \\ \text{otherwise} \end{array} \right) \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix} s \text{Heaviside}(s - 2.500000000)$$

$$+ 1. \left( \begin{array}{l} 1. \\ 0. \end{array} \begin{array}{l} -s \leq 0 \text{ and } s - \frac{5}{4} \leq 0 \\ \text{otherwise} \end{array} \right) \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix} s \text{Heaviside}(s - 3.750000000) + 1.$$

$$\left( \begin{array}{l} 1. \\ 0. \end{array} \begin{array}{l} -s \leq 0 \text{ and } s - \frac{5}{4} \leq 0 \\ \text{otherwise} \end{array} \right) \begin{bmatrix} -0.0100000000000000002 & 0.200000000000000010 \\ 0. & -0.0299999999999999990 \end{bmatrix} s$$

$$\text{Heaviside}(s - 2.500000000)$$

$$- 1. \left( \begin{array}{l} 1. \\ 0. \end{array} \begin{array}{l} \frac{5}{2} - s \leq 0 \text{ and } s - \frac{15}{4} \leq 0 \\ \text{otherwise} \end{array} \right) \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix} s \text{Heaviside}(s - 3.750000000)$$

$$+ 1. \left( \begin{array}{l} 1. \\ 0. \end{array} \begin{array}{l} \frac{5}{2} - s \leq 0 \text{ and } s - \frac{15}{4} \leq 0 \\ \text{otherwise} \end{array} \right) \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix} s \text{Heaviside}(s - 5.) - 5.$$

$$\left( \begin{array}{l} 1. \\ 0. \end{array} \begin{array}{l} -s \leq 0 \text{ and } s - \frac{5}{4} \leq 0 \\ \text{otherwise} \end{array} \right) \begin{bmatrix} -0.500000000000000000 & 0. \\ 0.0400000000000000010 & -0.250000000000000000 \end{bmatrix}$$

$$\text{Heaviside}(s - 5.) - 1. \left( \begin{array}{l} 1. \\ 0. \end{array} \begin{array}{l} \frac{5}{4} - s \leq 0 \text{ and } s - \frac{5}{2} \leq 0 \\ \text{otherwise} \end{array} \right) \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0. \end{bmatrix} s \text{Heaviside}(s - 3.750000000)$$

$$- 1. \left( \begin{array}{l} 1. \\ 0. \end{array} \begin{array}{l} -s \leq 0 \text{ and } s - \frac{5}{4} \leq 0 \\ \text{otherwise} \end{array} \right) \begin{bmatrix} -0.0100000000000000002 & 0.200000000000000010 \\ 0. & -0.0299999999999999990 \end{bmatrix} s$$

$$\text{Heaviside}(s - 1.250000000)$$

>  
>