Fis 56

UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

TRABALHO DE LICENCIATURA

Oscilações Harmónicas e Fenómenos Ondulatórios no Curso Universitário da Física. Programas Computacionais de Ensino.

Autor: Adélia Perpétua Artur

Supervisor: Prof. Dr. Yuri Rakov

Maputo, Setembro de 2005

DECLARAÇÃO DE HONRA

Declaro por minha honra, que o presente trabalho é resultado da minha investigação com recursos há bibliografias e referências citadas ao longo do trabalho.

Maputo, Agosto 2005
Autora

(Adélia Perpetua Artur)

DEDICATÓRIA

A memória da minha mãe que tão cedo partiu sem dizer adeus.

Ao meu querido pai

Que está sempre presente nessa longa caminhada.

AGRADECIMENTOS

A todos que em mim confiaram e depositaram a esperança e contribuíram para que o presente trabalho se tornasse uma realidade. Do fundo do meu coração digo **muito obrigado**, em especial

- Ao Professor Doutor Yuri Rakov, meu supervisor pela excelente simplicidade, disponibilidade e interesse em orientar e discutir cada passo do presente trabalho.

- O meu obrigado vai para, dr. Naran, pela ajuda na formulação das frases e organização do presente trabalho.

- A todos que foram meus docentes durante os quatro anos de curso, especialmente Dr. Tchernych, Dr. Burden, Dr. Cheia por serem alguns dos meus ideais.

- Aos meus pais e irmãos Artur Joaquim, Celestina Zacarias, Célia, Iolanda, Dulce, Joaquim, Francisco, não me esquecendo da Aninha.

- Aos meus colegas, amigos e a todos funcionários do Departamento de Física em particular a Ruth H. Jaime, Matuel, Célia, Afonso, Orcídia, Anacleto, Camilo, Hilário, Valter, Nelio e ao Alcides.

- Em especial ao meu noivo Ângelo Ambrages Magaia pelo companheirismo, amor, dedicação e pela força para vencer nesta batalha.

- A todos que directamente ou indirectamente estiveram envolvidos na realização deste trabalho.

Agradeço a Deus que me guia e me protege neste caminho da Vida.

ETERNAMENTE GRATA.

RESUMO

O presente trabalho tem como objectivo criar programas computacionais de ensino com finalidade de controlar as soluções de estudantes e demonstrar em dinâmica o comportamento de vários sistemas oscilantes.

O trabalho teve como base a revisão bibliográfica para a obtenção das equações e parâmetros para a simulação computacional, partindo do meio de programação *Delphi 5*, que tem como linguagem de programação o *Pascal*.

Todos os programas têm a mesma estrutura, somente variamos as equações e os parâmetros para a simulação computacional.

Todos os programas têm o controlo das soluções de problemas e podem detectar os erros de cálculos e erros de formato.

ÍNDICE

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO E OBJECTIVOS

1.1 Introdução

O presente trabalho vem dar contributo a concepção do valor da criação de programas computacionais de ensino de modo a simplificar o controle de soluções de estudantes de problemas concretos relacionados com oscilações e fenómenos ondulatórios, demonstrar em dinâmica o comportamento de vários sistemas oscilantes.

Estes programas foram criados no meio de programação do *Delphi 5* onde foi usado como a linguagem básica de programação o *Pascal*. Todos os programas têm mesma estrutura externa que está considerada detalhadamente no Apêndice. Mas cada programa concreto utiliza-se para representar em dinâmica os resultados da solução de um problema fisico concreto.

Para o presente trabalho foi escolhido como tema de estudo as oscilações harmónicas e fenómenos ondulatórios no curso universitário de física, onde dentre vários pontos vamos apresentar a simulação computacional para um oscilador harmónico simples, relação entre movimento harmónico simples e movimento circular uniforme, oscilações amortecidas, frequências próprias, batimentos para um sistema oscilante com dois graus de liberdade e para finalizar vamos considerar equação de onda, cuja as soluções são ondas propagadas.

1.2 Objectivos.

- Fazer a descrição teórica dos vários sistemas oscilantes e fenómenos ondulatórios e preparar as condições dos problemas concretos com as fórmulas das suas soluções.

- Criar programas computacionais de ensino com finalidade de controlar as soluções de estudantes de problemas concretos e demonstrar a dinâmica de sistemas oscilantes e fenómenos ondulatórios.

CAPÍTULO II

OSCILAÇÕES HARMÓNICAS SIMPLES

2.1 Oscilador linear [1].

Consideremos um sistema oscilante simples (Fig. 1).

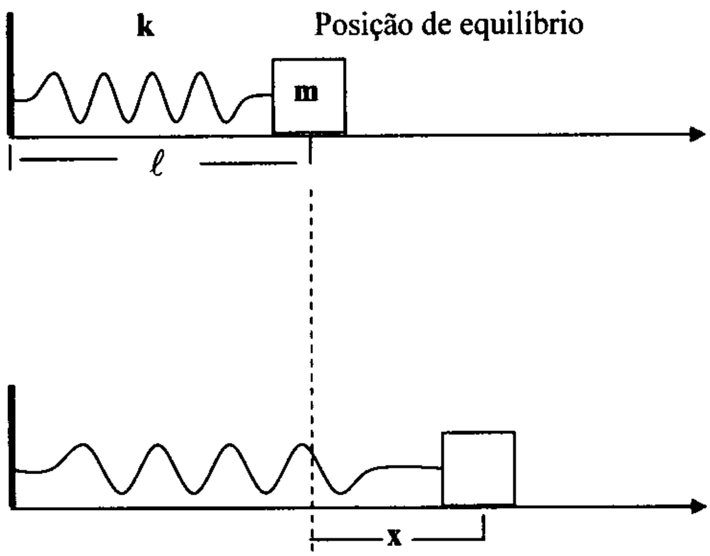


Fig. 1

m - *massa* do corpo.

ℓ - *comprimento* da mola livre.

k - *constante elástica* da mola.

x - *deslocamento* do corpo da posição de equilíbrio.

A força que actua no corpo é dada pela seguinte expressão (Lei de Hook):

$$F_{e\ell} = -kx \tag{1}$$

$F_{e\ell}$ - *força elástica.*

Apliquemos a segunda lei de Newton ao movimento da massa da Fig. 1:

$$m\ddot{x} = -kx \tag{2}$$

ou

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{3}$$

onde foi introduzido:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{4}$$

o que é *frequência cíclica* das oscilações ou simplesmente a *frequência*.

Tal sistema oscilante denomina-se *oscilador linear* ou *oscilador harmónico simples* e realiza *oscilações harmónicas simples.* A equação (3) é equação diferencial linear com coeficientes constantes. Segundo as regras gerais de resolução das equações lineares com coeficientes constantes pomos $x = e^{rt}$ e encontramos para **r** a equação característica:

$$r^2 + \omega^2 = 0$$

A solução geral da equação (3) é:

$$x(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}, \qquad r_{1,2} = \pm i\omega$$

ou

$$x(t) = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}$$

É forma complexa da solução da (3), mas a grandeza física x (t) é grandeza real:

$$x(t) = x^*(t)$$

$$x^*(t) = A_1^* e^{-i\omega t} + A_2^* e^{i\omega t}$$

Então

$$A_2 = A_1^*$$

$$x(t) = A_1 e^{i\omega t} + A_1^* e^{-i\omega t}$$

ou

$$x(t) = (A_1 + A_1^*)\cos\omega t + i(A_1 - A_1^*)\text{sen}\ \omega t$$

Finalmente temos

$$x(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \text{sen}\ \omega t \tag{5}$$

onde

$$C_1 = A_1 + A_1^* \qquad C_2 = i(A_1 - A_1^*)$$

são constantes reais arbitrárias. A fórmula (5) dá a solução procurada da equação (3).
São oscilações harmónicas com a frequência ω e *amplitude*:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \tag{6}$$

Consideremos a solução da equação (3) para as condições iniciais dadas – problema de Cauchy:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$
$$x(0) = x_0 \qquad (7)$$
$$\dot{x}(0) = v_0$$

Aqui x_0 é a posição inicial e v_0 é a velocidade inicial da massa m.

Da fórmulas (5) e (7) temos $x(0) = C_1$ ou

$$C_1 = x_0 \qquad (8)$$

A derivação por tempo da fórmula (5) dá expressão para a velocidade:

$$\dot{x}(t) = \omega C_2 \cos\omega t - \omega C_1 \text{sen}\, \omega t \qquad (9)$$

Então $\dot{x}(0) = \omega C_2$ ou

$$C_2 = \frac{v_0}{\omega} \qquad (10)$$

Da fórmula (6) temos para a amplitude seguinte expressão:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \qquad (11)$$

Resultados obtidos são representados em Tabela 1 e Tabela 2. Esta informação tem que ser utilizada na solução do seguinte problema:

Problema 1

Variante 1 (Programa computacional de ensino OsHarm11.exe).

A constante elástica de uma mola vale **k = 40N/m.** Um corpo de **m = 0,8kg** é prendido a extremidade da mola e afastado **x_0 = 7cm** da posição de equilíbrio, ao longo de uma mesa horizontal lisa. Largando-se o corpo com a velocidade inicial **v_0 = 0,8m/s** ele executará o movimento harmónico simples. Calcular:

a) A frequência das oscilações ω;

b) O período das oscilações T;

c) A amplitude das oscilações A.

Introduzindo no programa OsHarm11.exe resultados correctos da solução deste problema:

$\omega = 7.07 \text{rad/s}, \quad T = 0.889\,\text{s}, \quad A = 0.133\,\text{m}$

pode-se ver em dinâmica o comportamento de coordenada e velocidade de um oscilador linear: Fig.2.

2.2 Relação entre movimento harmónico simples e movimento circular uniforme [2,3].

Para encontrar a relação entre esses dois movimentos vamos partir da solução da equação (3) dada por

$$x(t) = A_1 e^{i\omega t} + A_1^* e^{-i\omega t} \tag{12}$$

Escrevemos a constante A_1 como:

$$A_1 = \frac{A}{2} e^{i\varphi}$$

Sendo A uma constante real, e tomando em consideração a formula de Euler

$$\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x$$

a expressão (12) transforma-se-a:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \tag{13}$$

onde **A** é *amplitude* das oscilações, φ representa a *fase inicial* das oscilações e $(\omega t + \varphi)$ chama-se a *fase* (*instantânea*) das oscilações.

A expressão (13) demonstra a relação entre movimento harmónico simples e movimento circular uniforme. Amplitude A e fase inicial φ podem ser representadas através das condições iniciais do problema (7) por isso representam (13) na forma seguinte:

$$A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos\varphi\cos\omega t - A\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\omega t \tag{14}$$

Considerando $C_1 = A\cos\varphi$ e $C_2 = -A\text{sen}\varphi$ vamos ter a expressão (5). Então (8) e (10) resultam

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

$$\text{tg}\varphi = -\frac{v_0}{x_0\omega} \tag{15}$$

Resultados obtidos são representados em Tabela 3 e Tabela 4 (No fim do capitulo). Esta informação tem que ser utilizada na solução do seguinte problema:

Problema 2

Variante 1 (Programa computacional de ensino OsHarm21.exe).

A constante elástica de uma mola vale **k = 43N/m.** Um corpo de **m = 0,5kg** é prendido a extremidade da mola e afastado **x_0 = 13cm** da posição de equilíbrio, ao longo de uma mesa horizontal lisa. Largando-se o corpo com a velocidade inicial $\mathbf{v_0 = -0{,}7m/s}$ ele executará o movimento harmónico simples. Calcular:

a) A fase inicial das oscilações φ;

b) O período das oscilações **T**;

c) A amplitude das oscilações **A**.

Introduzindo no programa OsHarm21.exe resultados correctos da solução deste problema:

$\varphi = 30.132^0, \quad T = 0.678\,s, \quad A = 0.15m$

pode-se ver em dinâmica a relação entre movimento harmónico simples e movimento circular uniforme: Fig.3 (No final do capitulo).

2.3 Plano de fase. Trajectória de fase [1,4].

Para a interpretação geométrica dos fenómenos mecânicos se recorre ao conceito de *espaço de fase* nos quadros da Mecânica de Hamilton. A função de Hamilton de um sistema de s graus de liberdade é uma função de s coordenadas generalizadas e de s impulsos generalizados. Então o espaço de fase é um espaço de $2s$ valores de s coordenadas generalizadas e de s impulsos generalizados do sistema mecânica dado. Um ponto deste espaço corresponde a um estado determinado do sistema. No movimento do sistema, o ponto do espaço de fase que o representa descreve uma linha correspondente, denominada de *trajectória de fase.*

Para um oscilador linear $s = 1$ (um grau de liberdade) e o espaço de fase é um *plano de fase.* A função de Hamilton neste caso é:

$$H(p,x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} \tag{16}$$

onde $p(t) = m\dot{x}(t)$ é *impulso generalizado, e* $x(t)$ é *coordenada generalizada.*

Equações de Hamilton têm forma:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{17}$$

e para oscilador linear:

$$\dot{x} = \frac{p}{m} \qquad \dot{p} = -kx \tag{18}$$

Da primeira equação temos a definição do impulso $p = mv$. Seguinte equação é segunda lei de Newton em termos de p e x.

UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

PARESER DO SUPERVISOR

Nome do estudante: Adélia Perpétua Artur

Título do Trabalho de Licenciatura: "Oscilações Harmónicas e Fenómenos Ondulatórios no Curso Universitário da Física. Programas Computacionais de Ensino"

No presente Trabalho de Licenciatura consideram-se oscilações harmónicas e fenómenos ondulatórios no curso universitário da fisica para elaborar os programas computacionais de ensino.

É necessário notar que no mundo agora existem numerosos programas computacionais de ensino mas muitos programas representam os resultados analíticos na forma de gráficos e diagramas, como em manuais. Neste caso não se usam todas as possibilidades de computadores, em particular, representaçáo dinâmica dos resultados. Outros programas de ensino têm o controlo fraco dos resultados obtidos por estudantes, por exemplo, uma escolha dos resultados dados. É importante, também, que se utiliza no cada país sua linguagem ou inglês. E afinal notamos que os programas de ensino de alta qualidade podem ter o alto preço corrente.

Tendo em vista estas razões no presente Trabalho de Licenciatura foi feita uma tentativa de elaborar os programas computacionais de ensino com as seguintes possibilidades:

a) controlo duplo de resultados obtidos por estudantes: controlo do formato e controlo do valor numérico.
b) representação dunâmica dos processos fisicos: oscilações e fenómenos ondulatórios.
c) utilização do português.

Não foi por acaso que no presente Trabalho de Licenciatura consideram-se oscilações harmónicas e fenómenos ondulatórios. Estes processos fisicos encontram-se em Física Experimental, Física Geral, Física Teórica, Engenharia etc., etc. e na vida diária.

No Trabalho de Licenciatura são representados dez problemas fisicos com parâmetros e condições iniciais dados. Cada problema tem a base teórica. Em consideração de oscilador linear e oscilações amortecidas se usa a segunda lei de Newton com a força elástica e força de atrito. A base teórica da introdução de plano de fase e trajectória de fase são função e equações de Hamilton.

Mais uma derivada por tempo

$$\ddot{x} = \frac{\dot{p}}{m}$$

representa a possibilidade de transformar o sistema (18) de duas equações diferenciais lineares à uma equação diferencial de segunda ordem:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

É a equação (3) com a solução (13). Então, a solução do sistema (18) é

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad (19)$$

$$p(t) = -m\omega A \mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$$

Destas equações obteremos:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{p^2}{(m\omega A)^2} = 1 \qquad (20)$$

Se considerarmos os parâmetros:

$$a = A \qquad b = m\omega A \qquad (21)$$

vamos encontrar a equação da elipse dada pela fórmula:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{p}{b}\right)^2 = 1 \qquad (22)$$

onde: a é *semi-eixo grande* da elipse e b é *semi-eixo pequeno* da elipse.

De tal modo, chegamos a conclusão de que a trajectória de fase de um oscilador harmónico simples é uma elipse. O mesmo resultado pode ser obtido com a ajuda da lei de conservação da energia total **E**:

$$H(p, x) = E \qquad (23)$$

Realmente, esta é a forma geral da equação da trajectória de fase de um sistema com a função de Hamilton $H(p, x)$. Para oscilador linear a expressão (23), passa para a forma

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} = E \qquad (24)$$

ou

$$\frac{x^2}{(2E/k)}+\frac{p^2}{2mE}=1 \qquad (25)$$

A comparação com (22) dá

$$a=\sqrt{\frac{2E}{k}} \qquad b=\sqrt{2mE} \qquad (26)$$

onde energia total em termos de condições iniciais é

$$E=\frac{mv_0^2}{2}+\frac{kx_0^2}{2} \qquad (27)$$

Resultados obtidos são representados em Tabela 5 e Tabela 6 (No fim do capitulo). Esta informação tem que ser utilizada na solução do seguinte problema:

Problema 3
Variante 1 (Programa computacional de ensino OsHarm31.exe).

A constante elástica de uma mola vale **k = 45N/m.** Um corpo de **m = 0,6kg** é prendido a extremidade da mola e afastado **x_0 = 15cm** da posição de equilíbrio, ao longo de uma mesa horizontal lisa. Largando-se o corpo com a velocidade inicial **v_0 = 0,7m/s** ele executará o movimento harmónico simples. Calcular:

a) energia total das oscilações E;
b) semi-eixo grande da elipse a;
c) semi-eixo pequeno da elipse b.

Introduzindo no programa OsHarm31.exe resultados correctos da solução deste problema:

$E=0.653J.,\quad a=0.17m,\quad b=0.885kg\cdot m/s$

pode-se ver as trajectórias de fase no plano de fase: Fig. 4 (No fim do capitulo).

2.4 Oscilações amortecidas [1,5,6].

Oscilações amortecidas realizam-se em sistemas oscilantes com a perda da energia. Em sistemas mecânicos o amortecimento vem sendo originado principalmente pelo atrito.

Para encontrar a equação diferencial de oscilações amortecidas tomaremos em consideração a força de atrito F_{atr} que actua sobre o sistema que realiza pequenas oscilações unidimensionais.

$$F_{atr}=-\alpha\dot{x} \qquad (28)$$

onde o *coeficiente de resistência* α é positivo e o sinal negativo indica, que a força actua no sentido oposto à velocidade. Então a equação (2) transforma-se na forma

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x}\,. \tag{29}$$

Dividindo por **m** esta expressão, temos:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{\alpha}{m}\dot{x} \tag{30}$$

ou

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{31}$$

onde

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad \lambda = \frac{\alpha}{2m} \tag{32}$$

Aqui

ω_0 *- frequência das oscilações livres do sistema na ausência de atrito.*

λ *- coeficiente de amortecimento.*

Segundo as regras gerais de resolução de equações lineares com coeficiente constante pomos $x = Ae^{rt}$ e encontraremos para r a equação característica:

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0 \tag{33}$$

Sendo assim as suas raízes são

$$r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{(\lambda^2 - \omega_0^2)} \tag{34}$$

Dai a solução geral da equação (31) é

$$x(t) = A_1 e^{-\lambda t + \sqrt{(\lambda^2 - \omega_0^2)}t} + A_2 e^{-\lambda t - \sqrt{(\lambda^2 - \omega_0^2)}t} \tag{35}$$

onde A_1 e A_2 são constantes arbitrarias.

Considerarmos o caso $\lambda < \omega_0$. Então

$$\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} = i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}\right) \tag{36}$$

onde

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \tag{37}$$

Na (36) a expressão entre parênteses é exactamente a solução da equação (3).

Então usando (13) temos

$$x(t) = A_0 e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi) \tag{38}$$

Esta fórmula representa as *oscilações amortecidas.* onde:

A_0 - *amplitude inicial das oscilações amortecidas.*

ω - *frequência cíclica (convencional) das oscilações amortecidas.*

Então

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \tag{39}$$

é o *período (convencional)* das oscilações amortecidas.

Por definição A_0 é a amplitude das oscilações livres (11):

$$A_0 = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \tag{40}$$

Para oscilações amortecidas utiliza-se

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t} \tag{41}$$

que se chama *ao valor instantâneo da amplitude (amplitude das oscilações amortecidas).*

O intervalo de tempo

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \tag{42}$$

no decorrer do qual a amplitude das oscilações amortecidas diminuir **e** vezes, tem o nome de *tempo de relaxação.* Uma característica importante de oscilações amortecidas é *decremento logarítmico de amortecimento.* É a grandeza adimencional δ cujo valor é definido por

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} \tag{43}$$

De (41), (42) e (43) temos que

$$\delta = \lambda T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N} \tag{44}$$

onde **N** é o numero de oscilações durante o qual a amplitude diminui e vezes.

A relação entre a frequência cíclica das oscilações amortecidas e o decremento logarítmico de amortecimento exprime-se com a fórmula:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \left(\frac{\delta}{2\pi}\right)^2} \tag{45}$$

Resultados obtidos são representados em Tabela 7 e Tabela 8. Esta informação tem que ser utilizada na solução do seguinte problema:

Problema 4

Variante 1 (Programa computacional de ensino OsHarm41.exe).

A constante elástica de uma mola vale **k = 40N/m.** Um corpo de **m = 0,8kg** é prendido a extremidade da mola e afastado $\mathbf{x_0}$ **= 17cm** da posição de equilíbrio, ao longo de uma mesa horizontal lisa. Largando-se o corpo com a velocidade inicial $\mathbf{v_0}$ **= 0** ele executará as oscilações amortecidas. Se o coeficiente de resistência $\alpha = 0{,}5\mathrm{kg/s}$ calcular:

a) frequência das oscilações amortecidas ω;

b) amplitude inicial das oscilações amortecidas A_0;

c) decremento logarítmico de amortecimento δ.

Introduzindo no programa OsHarm41.exe resultados correctos da solução deste problema:

$\omega = 7.06\mathrm{rad/s}$, $A_0 = 0.17\mathrm{m}$, $\delta = 0.278$

pode-se ver em dinâmica a trajectória de fase e o comportamento da coordenada das oscilações amortecidas: Fig.5. (No fim deste capitulo)

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \left(\frac{\delta}{2\pi}\right)^2} \qquad (45)$$

Resultados obtidos são representados em Tabela 7 e Tabela 8. Esta informação tem que ser utilizada na solução do seguinte problema:

Problema 4
Variante 1 (Programa computacional de ensino OsHarm41.exe).

A constante elástica de uma mola vale **k = 40N/m.** Um corpo de **m = 0,8kg** é prendido a extremidade da mola e afastado **x_0 = 17cm** da posição de equilíbrio, ao longo de uma mesa horizontal. Largando-se o corpo com a velocidade inicial **v_0 = 0** ele executará as oscilações amortecidas. Se o coeficiente de resistência $\alpha = 0{,}5\text{kg}/\text{s}$ calcular:

a) frequência das oscilações amortecidas ω;

b) amplitude inicial das oscilações amortecidas A_0;

c) decremento logarítmico de amortecimento δ.

Introduzindo no programa OsHarm41.exe resultados correctos da solução deste problema:

$$\omega = 7.06\text{rad}/\text{s}, \quad A_0 = 0.17\text{m}, \quad \delta = 0.278$$

pode-se ver em dinâmica a trajectória de fase e o comportamento da coordenada das oscilações amortecidas: Fig.5. (No fim deste capitulo)

2.5 Tabelas e gráficos.

Tabela 1

Problema de Couchy	Solução
$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ $x(0) = x_0$ $\dot{x}(0) = v_0$	$x(t) = x_0 \cos \omega t + \left(\dfrac{v_0}{\omega}\right) \text{sen}\ \omega t$ $\dot{x}(t) = v_0 \cos \omega t - \omega x_0 \text{sen}\ \omega t$

Tabela 2

Constantes e parâmetros
m - *massa* do corpo.
k - *constante elástica* da mola.
$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ - *frequência* das oscilações
$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ - *período* das oscilações
$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{v_0}{\omega}\right)^2}$ - *amplitude* das oscilações

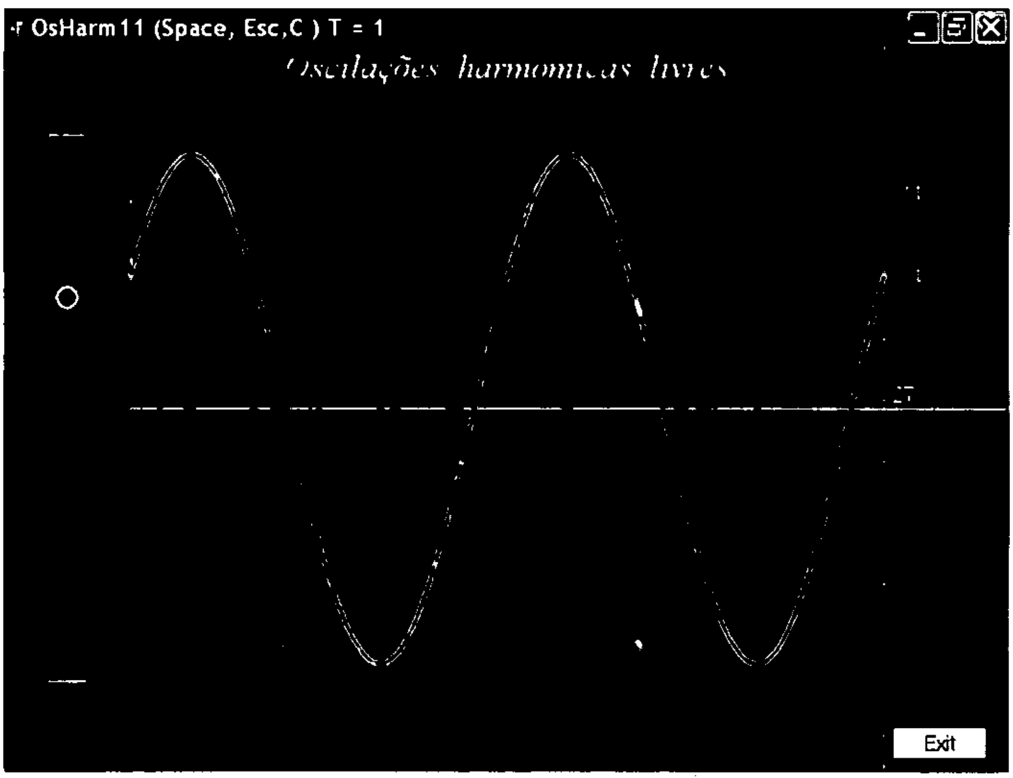


Fig. 2

Tabela 3

Problema de Couchy	Solução
$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ $x(0) = x_0$ $\dot{x}(0) = v_0$	$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ $\dot{x}(t) = -\omega A \mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$

Tabela 4

Constantes e parâmetros
m - *massa* do corpo
k - *constante elástica* da mola
$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ - *frequência* das oscilações
$\mathrm{tg}\varphi = -\dfrac{v_0}{x_0\omega}$ - *fase inicial* das oscilações
$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ - *período* das oscilações
$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{v_0}{\omega}\right)^2}$ - *amplitude* das oscilações

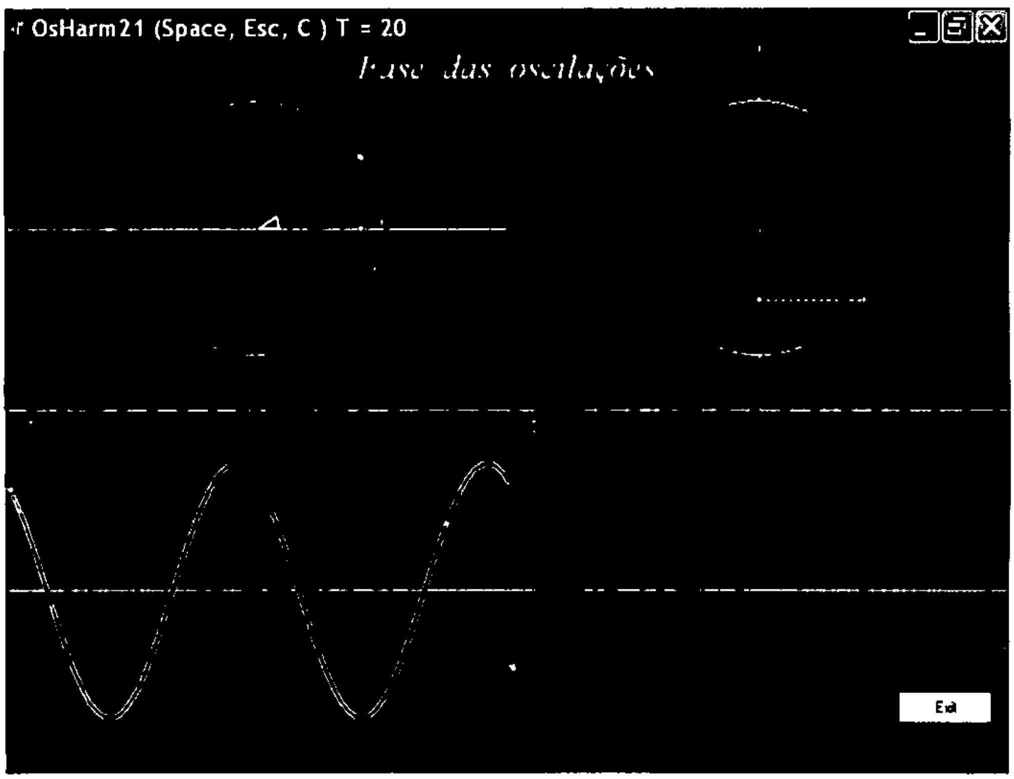


Fig. 3

Tabela 5

Problema de Couchy	Solução
$\dot{x} = \dfrac{p}{m} \quad , \quad \dot{p} = -kx$ $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ $x(0) = x_0$ $\dot{x}(0) = v_0$	$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ $p(t) = -m\omega A \mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$

Tabela 6

Constantes e parâmetros
m - *massa* do corpo
k - *constante elástica* da mola
$E = \dfrac{mv_0^2}{2} + \dfrac{kx_0^2}{2}$ - *energia total* das oscilações
$a = \sqrt{\dfrac{2E}{k}}$ - *semi-eixo grande* da elipse.
$b = \sqrt{2mE}$ - *semi-eixo pequeno* da elipse.

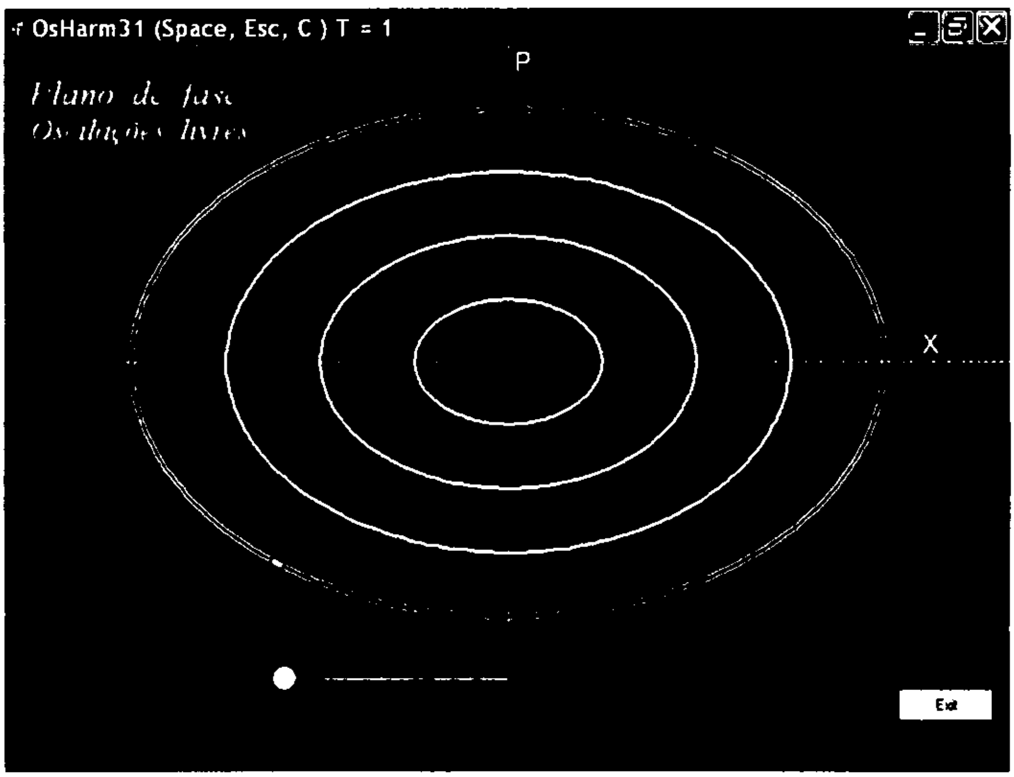


Fig. 4

Tabela 7

Problema de Couchy	Solução
$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$	$x(t) = A_0 e^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi)$
$x(0) = x_0$	$v(t) = -\lambda x(t) - \omega A_0 \mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$
$\dot{x}(0) = v_0$	$p(t) = m x(t)$

Tabela 8

Constantes e parâmetros
k - *constante elástica* da mola.
α - *coeficiente de resistência*
$\lambda = \dfrac{\alpha}{2m}$ - *coeficiente de amortecimento*
$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ - *frequência cíclica* das oscilações livres
$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ - *frequência cíclica (convencional) das oscilações amortecidas*
$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ - *período (convencional) das oscilações amortecidas*
$A_0 = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$ - *amplitude inicial das oscilações amortecidas*
$\delta = \lambda T$ - *decremento logarítmico de amortecimento*

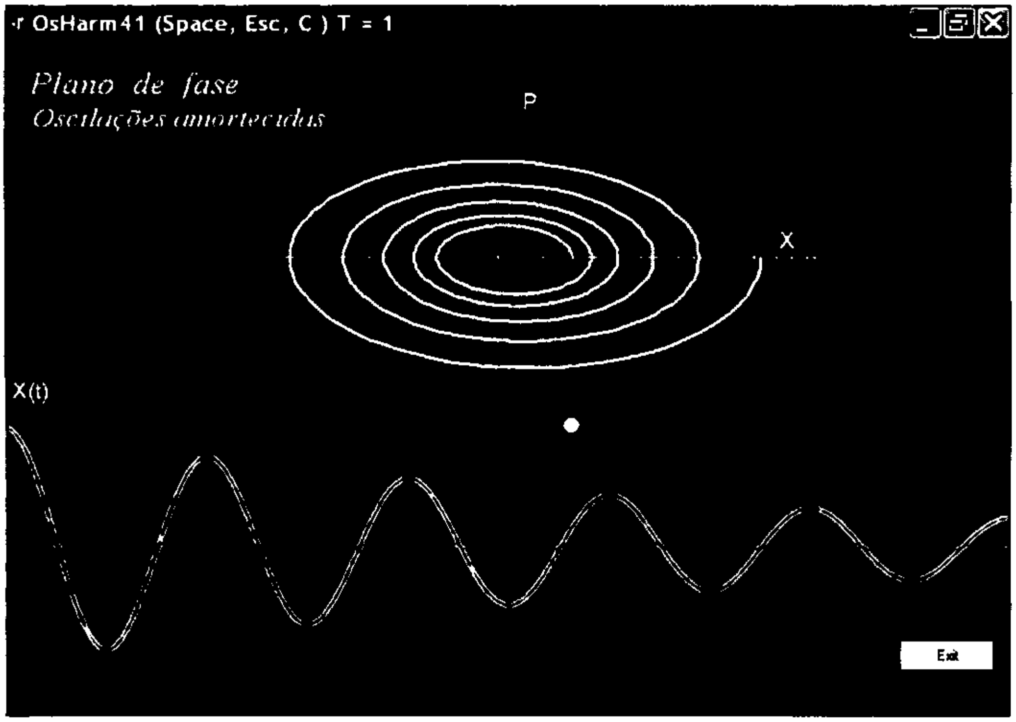


Fig. 5

CAPÍTULO III

OSCILAÇÕES HARMÓNICAS do SISTEMA de DOIS GRAUS de LIBERDADE

3.1 Frequências próprias. Plano configuracional [1,4].

Consideremos o sistema oscilante com duas massas iguais:

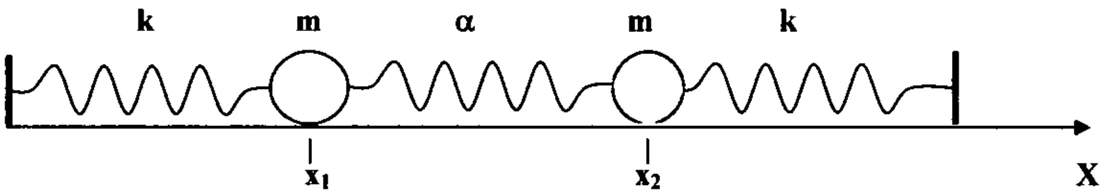


Fig. 1

Aqui:

m - *massa* do corpo.

k, α - *constantes elásticas* das molas.

x_1, x_2 - *deslocamentos* dos corpos das posições de equilíbrio.

A função de Lagrange deste sistema é

$$L = \frac{m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)}{2} - \frac{k(x_1^2 + x_2^2)}{2} - \frac{\alpha(x_2 - x_1)^2}{2} \tag{1}$$

As equações de Lagrange têm forma seguinte:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0$$

de onde temos as equações de movimento:

$$m\ddot{x}_1 + kx_1 = \alpha(x_2 - x_1) \tag{2}$$

$$m\ddot{x}_2 + kx_2 = \alpha(x_1 - x_2)$$

Consideremos as soluções destas equações para as condições iniciais seguintes:

$$x_1(0) = x_{10} \qquad \dot{x}_1(0) = v_{10}$$

$$x_2(0) = x_{20} \qquad \dot{x}_2(0) = v_{20}$$

Em lugar do sistema (2) podemos ter seguinte sistema

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + k(x_1 + x_2) = 0 \tag{3}$$

$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + k(x_1 - x_2) = -2\alpha(x_1 - x_2)$$

ou

$$(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + \omega_1^2(x_1 + x_2) = 0 \tag{4}$$

$$(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + \omega_2^2(x_1 - x_2) = 0$$

onde

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{5}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2\alpha}{m}} \tag{6}$$

Então as soluções de equações (4) têm forma conhecida

$$x_1 + x_2 = C_1 \cos\omega_1 t + C_2 \mathrm{sen}\ \omega_1 t$$

$$x_1 - x_2 = C_3 \cos\omega_2 t + C_4 \mathrm{sen}\ \omega_2 t$$

de onde

$$x_1(t) = C_1 \cos\omega_1 t + C_2 \mathrm{sen}\ \omega_1 t + C_3 \cos\omega_2 t + C_4 \mathrm{sen}\ \omega_2 t \tag{7}$$

$$x_2(t) = C_1 \cos\omega_1 t + C_2 \mathrm{sen}\ \omega_1 t - C_3 \cos\omega_2 t - C_4 \mathrm{sen}\ \omega_2 t \tag{8}$$

Aqui:

$$C_1 = \frac{x_{10} + x_{20}}{2} \qquad C_2 = \frac{v_{10} + v_{20}}{2\omega_1}$$

$$C_3 = \frac{x_{10} - x_{20}}{2} \qquad C_4 = \frac{v_{10} - v_{20}}{2\omega_2} \tag{9}$$

Energia total do sistema é

$$E = \frac{m(v_{10}^2 + v_{20}^2)}{2} + \frac{k(x_{10}^2 + x_{20}^2)}{2} + \frac{\alpha(x_{10} - x_{20})^2}{2} \tag{10}$$

Resultados obtidos são representados em Tabela 1 e Tabela 2. Esta informação tem que ser utilizada na solução do seguinte problema:

Problema 5
Variante 1 (Programa computacional de ensino OsHarm51.exe).

No sistema oscilante representado na Fig.1 são dados: **m = 0,5kg, k = 32N/m, α = 12N/m.**

Se $x_{10} = x_{20} = 0$, $v_{10} = 0{,}8 m/s$, $v_{20} = 0$, calcular:

a) frequência própria 1: ω_1;

b) frequência própria 2: ω_2;

c) Energia total: E.

Introduzindo no programa OsHarm51.exe resultados correctos da solução deste problema

$\omega_1 = 8 rad/s$, $\omega_2 = 10.6 rad/s$, $E = 0.16 J$

pode-se ver em dinâmica a Fig.2 (fim do capitulo)

3.2 Coordenadas normais. Figuras de Lissajuos [1,2,4].

A superposição de movimentos harmónicos perpendiculares dá as figuras de Lissajuos.

Para construir as figuras de Lissajuos vamos introduzir as coordenadas novas q_1 e q_2:

$$x_1 = q_1 + q_2 \tag{11}$$

$$x_2 = q_1 - q_2 \tag{12}$$

Substituímos as coordenadas na função de Lagrange (1) e obtemos

$$L = m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - kq_1^2 - (k + 2\alpha)q_2^2 \tag{13}$$

Podemos ver que em coordenadas q_1 e q_2 a função de Lagrange tem *a forma diagonal*

por isso as equações de movimento são separadas:

$$m\ddot{q}_1 + kq_1 = 0 \tag{14}$$

$$m\ddot{q}_2 + (k + 2\alpha)q_2 = 0 \tag{15}$$

ou

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = 0 \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{16}$$

$$\ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = 0 \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2\alpha}{m}} \tag{17}$$

Soluções têm formas seguintes:

$$q_1(t) = C_1 \cos\omega_1 t + C_2 \mathrm{sen}\, \omega_1 t \tag{18}$$

$$q_2(t) = C_3 \cos \omega_2 t + C_4 \operatorname{sen} \omega_2 t \tag{19}$$

onde

$$C_1 = \frac{x_{10} + x_{20}}{2} \qquad C_2 = \frac{v_{10} + v_{20}}{2\omega_1}$$

$$C_3 = \frac{x_{10} - x_{20}}{2} \qquad C_4 = \frac{v_{10} - v_{20}}{2\omega_2}$$

Coordenadas $q_1(t)$ e $q_2(t)$ são *coordenadas normais* e representam as oscilações harmónicas simples. Resultados obtidos são representados em Tabela 3 e Tabela 4. Esta informação tem que ser utilizada na solução do seguinte problema:

Problema 6
Variante 1 (Programa computacional de ensino OsHarm61.exe).

No sistema oscilante representado na Fig.1 são dados: **m = 0,5kg, k = 32N/m, α = 10N/m.**

Se $x_{10} = 13\text{cm}$, $x_{20} = -7\text{cm}$, $v_{10} = -0{,}3\text{m/s}$, $v_{20} = 0{,}5\text{m/s}$, calcular:

a) frequência própria 1: ω_1;

b) frequência própria 2: ω_2;

c) energia total: E.

Introduzindo no programa OsHarm61.exe resultados correctos da solução deste problema:

$\omega_1 = 8\text{rad/s}$, $\omega_2 = 10.2\text{rad/s}$, $E = 0.634\text{J}$

pode-se ver em dinâmica a Fig.3 (fim do capitulo):

3.3 Batimentos [1].

Se entende como batimentos ao movimento em que a amplitude das oscilações não fica constante, porem cresce e diminui periodicamente. No instante em que a amplitude do primeiro sistema antige seu máximo, a amplitude do segundo sistema é nula e vice-versa.

Para $\alpha << k$ (*ligação débil*) teremos:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2\alpha}{m}} \approx \sqrt{\frac{k}{m}} + \frac{\alpha}{m\sqrt{\frac{k}{m}}} \tag{20}$$

ou usando (5)

$$\omega_2 = \omega_1 + \frac{\alpha}{m\omega_1} \tag{21}$$

$$\omega_2 = \omega_1 + \varepsilon \tag{22}$$

onde $\varepsilon = \dfrac{\alpha}{m\omega_1}$ *é a frequência do batimento* [1]

De (7), (8) e (22) temos:

$$x_1(t) = (C_1 + C_3\cos\varepsilon t)\cos\omega_1 t + (C_2 - C_4\text{sen }\varepsilon t)\text{sen }\omega_1 t \tag{23}$$

$$x_2(t) = (C_1 - C_3\cos\varepsilon t)\cos\omega_1 t + (C_2 + C_4\text{sen }\varepsilon t)\text{sen }\omega_1 t \tag{24}$$

Sejam $v_{10} = 0$, $v_{20} = 0$, então $C_2 = 0$, $C_4 = 0$, então:

$$x_1(t) = A_1\cos\omega_1 t$$

$$x_2(t) = A_2\cos\omega_1 t$$

onde

$$A_1 = (C_1 + C_3\cos\varepsilon t)$$

$$A_2 = (C_1 - C_3\cos\varepsilon t)$$

Este exemplo demonstra que a superposição de duas oscilações de frequências vizinhas, tem o carácter de batimento de frequência $\varepsilon = \omega_2 - \omega_1$; no instante em que a amplitude da coordenada $x_1(t)$ se passa por seu máximo, a amplitude da coordenada $x_2(t)$ passa por seu mínimo e inversamente. Resultados obtidos são representados em Tabela 5 e Tabela 6. Esta informação tem que ser utilizada na solução do seguinte problema:

Problema 7
Variante 1 (Programa computacional de ensino OsHarm71.exe).

No sistema oscilante representado na Fig.1 são dados: **m = 0,5kg, k = 32N/m, α = 5N/m.**

Se $x_{10} = x_{20} = 0$, $v_{10} = 0$, $v_{20} = 0{,}8\text{m/s}$, calcular:

a) frequência própria **1**: ω_1;

b) frequência própria **2**: ω_2;

c) frequência do batimento: ε.

Introduzindo no programa OsHarm71.exe resultados correctos da solução deste problema:

$\omega_1 = 8\text{rad/s}$, $\omega_2 = 9.17\text{rad/s}$, $\varepsilon = 1.25\text{rad/s}$

pode-se ver em dinâmica a Fig. 4 (fim do capitulo):

3.4 Tabelas e gráficos.

Tabela 1

Problema de Couchy	Solução
$m\ddot{x}_1 + kx_1 = \alpha(x_2 - x_1)$ $m\ddot{x}_2 + kx_2 = \alpha(x_1 - x_2)$ $x_1(0) = x_{10}$ $x_2(0) = x_{20}$ $\dot{x}_1(0) = v_{10}$ $\dot{x}_2(0) = v_{20}$	$x_1(t) = C_1 \cos\omega_1 t + C_2 \mathrm{sen}\,\omega_1 t + C_3 \cos\omega_2 t + C_4 \mathrm{sen}\,\omega_2 t$ $x_2(t) = C_1 \cos\omega_1 t + C_2 \mathrm{sen}\,\omega_1 t - C_3 \cos\omega_2 t - C_4 \mathrm{sen}\,\omega_2 t$ $C_1 = \dfrac{x_{10} + x_{20}}{2}$ $\quad C_2 = \dfrac{v_{10} + v_{20}}{2\omega_1}$ $C_3 = \dfrac{x_{10} - x_{20}}{2}$ $\quad C_4 = \dfrac{v_{10} - v_{20}}{2\omega_2}$

Tabela 2

Constantes e parâmetros
m - *massa* do corpo
k, α - *constantes elásticas.*
$\omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ - *frequência própria 1*
$\omega_2 = \sqrt{\dfrac{k + 2\alpha}{m}}$ - *frequência própria 2*
$E = \dfrac{m(v_{10}^2 + v_{20}^2)}{2} + \dfrac{k(x_{10}^2 + x_{20}^2)}{2} + \dfrac{\alpha(x_{10} - x_{20})^2}{2}$ - *energia total*

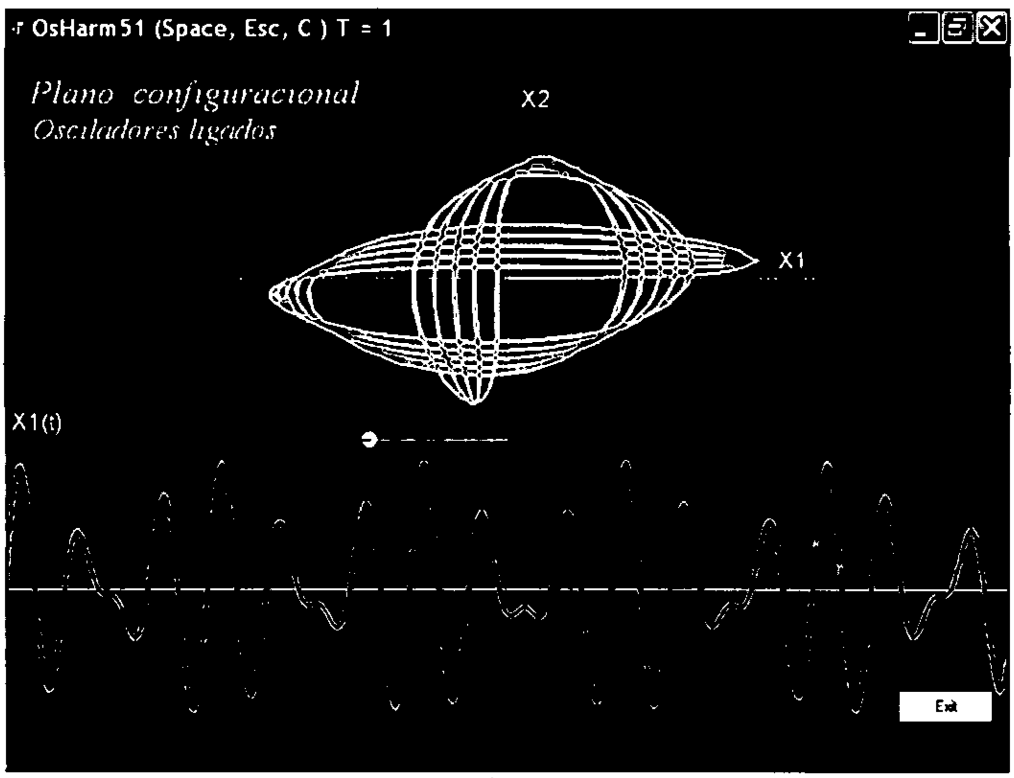


Fig. 2

Tabela 3

Problema de Couchy	Solução
$m\ddot{q}_1 + kq_1 = 0$ $m\ddot{q}_2 + (k+2\alpha)q_2 = 0$ $q_1(0) + q_2(0) = x_{10}$ $q_1(0) - q_2(0) = x_{20}$ $\dot{q}_1(0) + \dot{q}_2(0) = v_{10}$ $\dot{q}_1(0) - \dot{q}_2(0) = v_{20}$	$q_1(t) = C_1 \cos\omega_1 t + C_2 \operatorname{sen}\omega_1 t$ $q_2(t) = C_3 \cos\omega_2 t + C_4 \operatorname{sen}\omega_2 t$ $C_1 = \frac{x_{10} + x_{20}}{2}$ $C_2 = \frac{v_{10} + v_{20}}{2\omega_1}$ $C_3 = \frac{x_{10} - x_{20}}{2}$ $C_4 = \frac{v_{10} - v_{20}}{2\omega_2}$

Tabela 4

Constantes e parâmetros
m - *massa* dos corpos
k, α - *constantes elásticas.*
$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ - *frequência própria* do primeiro corpo
$\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2\alpha}{m}}$ - *frequência própria* do segundo corpo
$E = \frac{m(v_{10}^2 + v_{20}^2)}{2} + \frac{k(x_{10}^2 + x_{20}^2)}{2} + \frac{\alpha(x_{10} - x_{20})^2}{2}$ - *energia total*

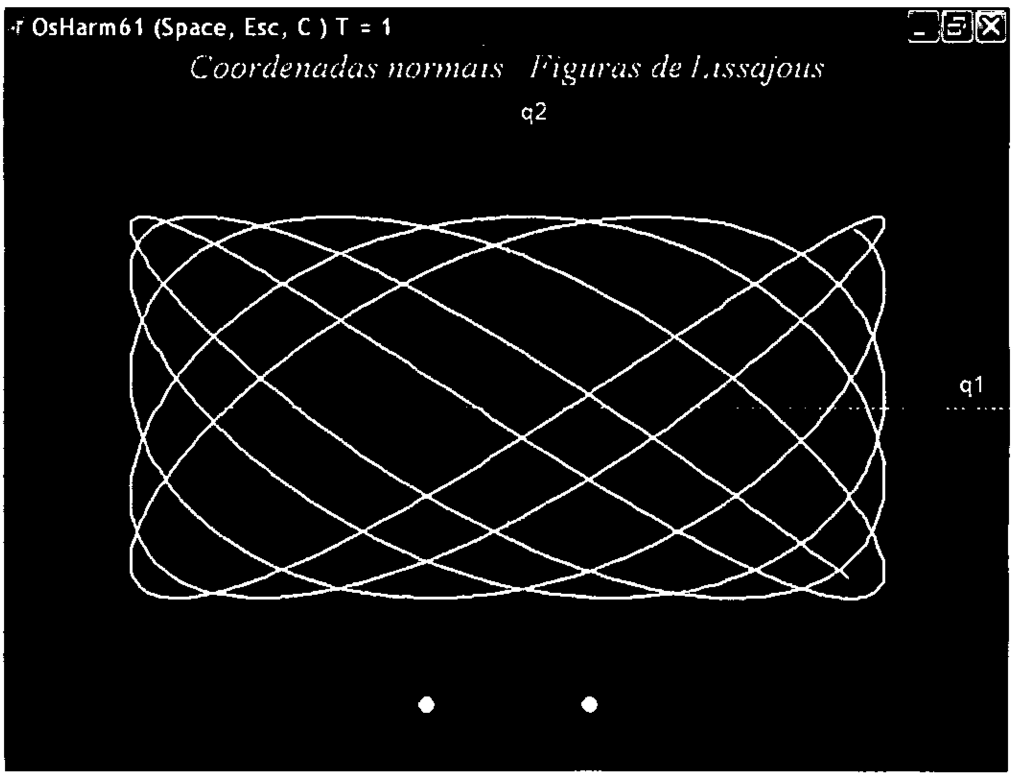


Fig. 3

Tabela 5

Problema de Couchy	Solução
$m\ddot{x}_1 + kx_1 = \alpha(x_2 - x_1)$	$x_1(t) = (C_1 + C_3\cos\varepsilon t)\cos\omega_1 t + (C_2 - C_4 \operatorname{sen}\varepsilon t)\operatorname{sen}\omega_1 t$
$m\ddot{x}_2 + kx_2 = \alpha(x_1 - x_2)$	$x_2(t) = (C_1 - C_3\cos\varepsilon t)\cos\omega_1 t + (C_2 + C_4 \operatorname{sen}\varepsilon t)\operatorname{sen}\omega_1 t$
$x_1(0) = x_{10}$ $x_2(0) = x_{20}$	$C_1 = \dfrac{x_{10} + x_{20}}{2} \qquad C_2 = \dfrac{v_{10} + v_{20}}{2\omega_1}$
$\dot{x}_1(0) = v_{10}$ $\dot{x}_2(0) = v_{20}$	$C_3 = \dfrac{x_{10} - x_{20}}{2} \qquad C_4 = \dfrac{v_{10} - v_{20}}{2\omega_2}$
	$\omega_2 = \omega_1 + \varepsilon \qquad (\varepsilon \ll \omega_1)$

Tabela 6

Constantes e parâmetros
k, α - *constantes elásticas.*
$\omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ - *frequência própria 1*
$\omega_2 = \sqrt{\dfrac{k + 2\alpha}{m}}$ - *frequência própria 2*
$\omega_2 = \omega_1 + \varepsilon$
$\varepsilon = \dfrac{\alpha}{m\omega_1}$ - *frequência do batimento*

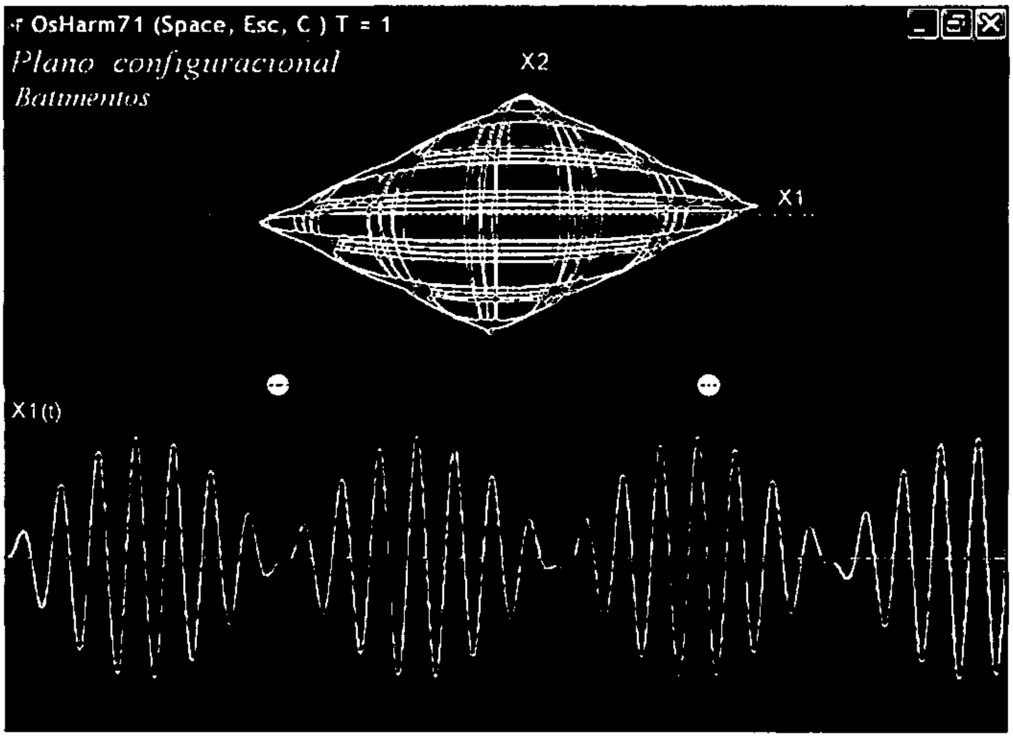


Fig. 4

CAPITULO IV

EQUAÇÃO DE ONDA. FORMULA DE d'ALEMBERT

4.1 Equação de onda [7].

Para estabelecer a forma da equação de onda podemos considerar as oscilações de uma corda distendida. Corda em física entende-se como sendo um fio flexível e elástico e as tensões que aparecem na corda num movimento arbitrário de tempo são dirigidos segundo a tangente ao seu perfil (Fig.1). Ao movimento de uma corda entende-se como pequenas vibrações transversais dadas por $|U(x,t)| << \ell$, onde $U(x,t)$ é o deslocamento transversal do ponto x da corda no instante t, ℓ é o comprimento da corda. Para encontrar a equação do movimento da corda vamos determinar a lei de movimento de cada um dos pontos em função do tempo.

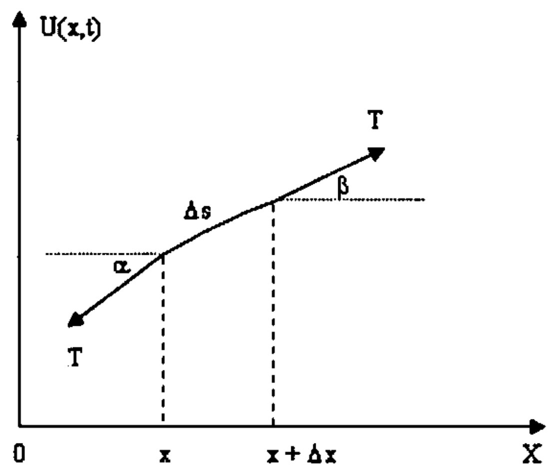


Fig.1

Características básicas da corda são:

T - *tensão* da corda.

ρ - *densidade linear* da corda.

Segundo a segunda lei de Newton dada por:

$$F = m \cdot a \tag{1}$$

$a = U_{tt}(x,t)$ é a aceleração do ponto x da corda no instante t. Então:

$$F = m \cdot U_{tt}(x,t) \tag{2}$$

onde $m = \rho\Delta s$. Tendo em vista que $\Delta x \to 0$ temos $\Delta s = \Delta x$ o que implica:

$$F = \rho\Delta x U_{tt}(x,t) \tag{3}$$

Da figura 1:

$$F = T\text{sen}\beta - T\text{sen}\alpha = T(\text{sen}\beta - \text{sen}\alpha) \tag{4}$$

onde α e β são ângulos pequenos. Por isso:

$$\text{sen}\alpha \approx \text{tg}\alpha \ , \ \text{sen}\beta \approx \text{tg}\beta \tag{5}$$

Mas

$$\text{tg}\alpha = \frac{\partial U}{\partial x} = U_x(x,t) \tag{6}$$

$$\text{tg}\beta = \frac{\partial U}{\partial x} = U_x(x+\Delta x,t) \tag{7}$$

Então de (4), (6) e (7) temos

$$F = T(\text{tg}\beta - \text{tg}\alpha) = T[U_x(x+\Delta x) - U_x(x,t)] \tag{8}$$

Consideremos (8) em (3):

$$T[U_x(x+\Delta x,t) - U_x(x,t)] = \rho\Delta x U_{tt}(x,t) \tag{9}$$

sendo assim

$$T\frac{[U_x(x+\Delta x,t) - U_x(x,t)]}{\Delta x} = \rho U_{tt}(x,t) \tag{10}$$

No limite $\Delta x \to 0$ temos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{U_x(x+\Delta x,t) - U_x(x,t)}{\Delta x} = \frac{\partial}{\partial x} U_x(x,t) = U_{xx}(x,t) \tag{11}$$

Então de (11) e (10) obteremos:

$$TU_{xx} = \rho U_{tt}$$

$$U_{tt} = \frac{T}{\rho} U_{xx} \tag{12}$$

Consideremos $a^2 = \frac{T}{\rho}$, dai chegamos a *equação de onda* dada por:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} \tag{13}$$

4.2 Formula de d'Alambert [7].

Para a fórmula de d'Alambert vamos tomar em consideração uma corda infinita distendida. Para tal partimos da equação de onda com as suas respectivas condições iniciais.

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}\ , \qquad (-\infty < x < \infty, t > 0)\ , \qquad a^2 = \frac{T}{\rho} \tag{14}$$

$$U(x,0) = f(x)$$

$$U_t(x,0) = g(x)$$

Procuremos a solução tomando em consideração a troca das variáveis:

$$(x,t) \to (\xi,\eta)$$

$$U(x,t) \to U(\xi,\eta)$$

Consideremos:

$$\xi = x + at \tag{15}$$

$$\eta = x - at$$

Tomemos em consideração a primeira e a segunda derivada de $U(x,t)$:

$$U_t = \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = a\left(\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \eta}\right)$$

$$U_{tt} = \frac{\partial U_t}{\partial t} = \frac{\partial U_t}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial U_t}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = a\left(\frac{\partial U_t}{\partial \xi} - \frac{\partial U_t}{\partial \eta}\right)$$

$$U_{tt} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 2a^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \tag{16}$$

$$U_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \tag{17}$$

Consideremos (16) e (17) em (14):

$$a^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - 2a^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + a^2\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + 2a^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + a^2\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \tag{18}$$

Em (18) vamos simplificar os termos semelhantes dai:

$$4a^2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \tag{19}$$

Então:

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right) = 0 \tag{20}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = P(\xi)$$

Então integrando a expressão (20) em função a ξ e considerando η como parâmetro vamos obter:

$$U(\xi,\eta) = \int P(\xi)d\xi + \psi(\eta) \tag{21}$$

Sendo assim, se $\int P(\xi)d\xi = \varphi(\xi)$ de (21) resulta:

$$U(\xi,\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta) \tag{22}$$

$$U_t(\xi,\eta) = \frac{d\varphi}{d\xi}\frac{d\xi}{dt} + \frac{d\psi}{d\eta}\frac{d\eta}{dt} = a\frac{d\varphi}{d\xi} - a\frac{d\psi}{d\eta} \tag{23}$$

Se $t = 0$

$$U(x,0) = \varphi(x) + \psi(x) = f(x) \tag{24}$$

$$U_t(x,0) = a\left(\frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\psi}{dx}\right) = g(x) \tag{25}$$

Então

$$\varphi(x) + \psi(x) = f(x) \tag{28}$$

$$a\left(\frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\psi}{dx}\right) = g(x) \tag{29}$$

Integrando (29) temos

$$\varphi(x) - \psi(x) = \frac{1}{2a}\int_0^x g(\tau)d\tau + c \tag{30}$$

De (28) e (30) decorre:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x g(\tau)d\tau + \frac{c}{2} \tag{31}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x g(\tau)d\tau + \frac{c}{2}$$

Tomando em conta a troca de variáveis:

$$x \to \xi\ ,\ \varphi(\xi) = \frac{1}{2}f(\xi) + \frac{1}{2a}\int_0^\xi g(\tau)d\tau + \frac{c}{2} \tag{32}$$

$$x \to \eta\ ,\ \ \psi(\eta) = \frac{1}{2} f(\eta) - \frac{1}{2a}\int_0^{\eta} g(\tau)d\tau - \frac{c}{2} \tag{33}$$

vamos substituir (32) e (33) em (22). Dai e decorre:

$$U(\xi,\eta) = \frac{f(\xi)+f(\eta)}{2} + \frac{1}{2a}\int_0^{\xi} g(\tau)d\tau - \frac{1}{2a}\int_0^{\eta} g(\tau)d\tau \tag{34}$$

Visto que

$$-\int_0^{\eta} g(\tau)d\tau = \int_{\eta}^{0} g(\tau)d\tau$$

temos:

$$\int_0^{\xi} g(\tau)d\tau + \int_{\eta}^{0} g(\tau)d\tau = \int_{\eta}^{\xi} g(\tau)d\tau \tag{35}$$

Então:

$$U(\xi,t) = \frac{f(\xi)+g(\eta)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{\eta}^{\xi} g(\tau)d\tau \tag{36}$$

Para finalizar vamos usar (15) em (36) donde decorre a fórmula de d'Alembert.

$$U(x,t) = \frac{f(x+at)+f(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(\tau)d\tau \tag{37}$$

Dado por terminado o parágrafo consideramos problemas seguintes.

4.3 Ondas solitárias.

Vamos resolver o problema de Couchy para ondas solitárias.

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} \quad (-\infty < x < \infty, t > 0)$$

$$U(x,0) = A\exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2\right\} \tag{38}$$

$$U_t(x,0) = 0$$

Consideremos

$$f(x+at) = A\exp\left\{-\left(\frac{x+at}{\sigma}\right)^2\right\} \tag{39}$$

$$f(x-at) = A\exp\left\{-\left(\frac{x-at}{\sigma}\right)^2\right\} \qquad (40)$$

De seguida vamos considerar (39) e (40) na formula (37) logo

$$U(x,t) = \frac{A}{2}\exp\left\{-\left(\frac{x+at}{\sigma}\right)^2\right\} + \frac{A}{2}\exp\left\{-\left(\frac{x-at}{\sigma}\right)^2\right\} \qquad (41)$$

Resultados obtidos são representados em Tabela 1 e Tabela 2 (fim do capitulo). Esta informação tem que ser utilizada na solução do seguinte problema:

Problema 1

Variante 1 (Programa computacional de ensino FenOnd11.exe).

Uma corda homogénea infinita tem seguintes parâmetros: tensão **T = 270 N**, densidade volumétrica ρ_v **= 7,8 g/cm³** e secção transversal **S = 7,510⁻³cm²**.

No instante inicial **t = 0** a corda está em repouso e tem o perfil

U (x,0) = A exp{-(x/σ)²}, onde **A** e **σ** são constantes. Determinar:

a) densidade linear de massa ρ;
b) velocidade de onda **a**;
c) posição de x_1 do máximo da onda reflectida no instante $\mathbf{t_1 = 2s}$.

Introduzindo no programa FenOnd11.exe resultados correctos da solução deste problema:

$\rho = 5{,}8510^{-3}\,kg/m, \quad a = 215 m/s, \quad x_1 = -430 m$

pode-se ver em dinâmica o movimento das ondas solitárias:

Fig.2 – distribuição inicial (38).

Fig.3 – ondas incidente (40), reflectida (39) e resultante (41).

4.4 Ondas harmónicas.

Partindo da equação de onda vamos encontrar a formula de d'Alembert para ondas harmónicas.

Para este fim consideremos

$$\begin{aligned} &U_{tt} = a^2 U_{xx} \qquad (-\infty < x < \infty, t > 0) \\ &U(x,0) = A\,sen(kx) \qquad (42) \\ &U_t(x,0) = V\cos(kx) \end{aligned}$$

Então

$$f(x+at) = A\,sen(kx+at) \qquad (43)$$

$$f(x-at)=A\exp\left\{-\left(\frac{x-at}{\sigma}\right)^2\right\} \quad (40)$$

De seguida vamos considerar (39) e (40) na formula (37) logo

$$U(x,t)=\frac{A}{2}\exp\left\{-\left(\frac{x+at}{\sigma}\right)^2\right\}+\frac{A}{2}\exp\left\{-\left(\frac{x-at}{\sigma}\right)^2\right\} \quad (41)$$

Resultados obtidos são representados em Tabela 1 e Tabela 2 (fim do capitulo). Esta informação tem que ser utilizada na solução do seguinte problema:

Problema 1

Variante 1 (Programa computacional de ensino FenOnd11.exe).

Uma corda homogénea infinita tem seguintes parâmetros: tensão **T = 270 N**, densidade volumétrica ρ_v **= 7,8 g/cm³** e secção transversal **S = 7,510⁻³cm².**

No instante inicial **t = 0** a corda está em repouso e tem o perfil

U (x,0) = A exp{-(x/σ)²}, onde **A** e **σ** são constantes. Determinar:

a) densidade linear de massa ρ;
b) velocidade de onda **a**;
c) posição do máximo da onda reflectida no instante t_1 **= 2s:** x_1.

Introduzindo no programa FenOnd11.exe resultados correctos da solução deste problema:

$$\rho=5{,}8510^{-3}\,kg/m, \quad a=215m/s, \quad x_1=-430m$$

pode-se ver em dinâmica o movimento das ondas solitárias:

Fig.2 – distribuição inicial (38).

Fig.3 – ondas incidente (40), reflectida (39) e resultante (41).

4.4 Ondas harmónicas.

Partindo da equação de onda vamos encontrar a formula de d'Alembert para ondas harmónicas. Para este fim consideremos

$$\begin{aligned} &U_{tt}=a^2U_{xx} \qquad (-\infty<x<\infty, t>0)\\ &U(x,0)=A\mathrm{sen}(kx)\\ &U_t(x,0)=V\cos(kx)\end{aligned} \quad (42)$$

Então

$$f(x+at)=A\mathrm{sen}(kx+at) \quad (43)$$

$$f(x-at) = A\mathrm{sen}(kx - at) \tag{44}$$

De seguida vamos considerar (43) e (44) em (37) logo

$$U(x,t) = \frac{A\mathrm{senk}(x+at) + A\mathrm{senk}(x-at)}{2} + \frac{V}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\cos kx dx$$

$$U(x,t) = \frac{A\mathrm{senk}(x+at) + A\mathrm{senk}(x-at)}{2} + \frac{V}{2ka}\left[\mathrm{senk}(x+at) - \mathrm{senk}(x-at)\right]$$

Designamos

$$A_i = \frac{1}{2}\left(A - \frac{V}{ka}\right) \tag{45}$$

$$A_r = \frac{1}{2}\left(A + \frac{V}{ka}\right) \tag{46}$$

Então a solução para a fórmula de d'Alembert para ondas harmónicas é

$$U(x,t) = A_r\mathrm{senk}(x+at) + A_i\mathrm{senk}(x-at). \tag{47}$$

Resultados obtidos são representados em Tabela 3 e Tabela 4. Esta informação tem que ser utilizada na solução do seguinte problema:

Problema 2
Variante 1 (Programa computacional de ensino FenOnd21.exe).

Uma corda homogénea infinita tem seguintes parâmetros: tensão **T = 320 N,** densidade linear de massa **$\rho = 3{,}6 10^{-3}$kg/m.** Se as condições iniciais de problemas de Cauchy são: **U (x,0) = Asen (kx),** **U_t(x,0) = Vcos(kx),** onde **A = 2m, V = 143m/s, k = 0,6m^{-1}**, determinar:

a) velocidade de onda **a**;
b) amplitude da onda incidente **A_i** ;
c) amplitude da onda reflectida **A_r**.

Introduzindo no programa FenOnd21.exe resultados correctos da solução deste problema:

$$a = 298\,m/s, \quad A_i = 0{,}6m, \quad A_r = 1{,}4m$$

pode-se ver em dinâmica o movimento das ondas harmónicas:

Fig. 4 – distribuição inicial (42).

Fig. 5 – ondas incidente, reflectida e resultante (45), (46), (47).

UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE

FACULDADE DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FISICA

FICHA DE CANDIDATURA A DEFESA DO T. LICENCIATURA

NOME DO ESTUDANTE *ADELIA PERPETUA ARTUR*

DATA DE NASCIMENTO 27 de Outubro 1978

NACIONALIDADE **Moçambicana** ....

BI (PASSAPORTE) (DIRE) Nº........................VALIDADE..............................

ANO DE INGRESSO NA UEM **2001** ....CURSO....*FÍSICA*

ANO DE CONCLUSÃO DA PARTE CURRICULAR **2005** ....

PARECER DA BIBLIOTECA DO DEPARTAMENTO....TEM SITUAÇÃO REGULARIZADA — [illegible]

PARECER DO REGISTO ACADEMICO....Terminou a parte escolar em 2005

PARECER DA DIRECÇÃO DO CURSO....A ESTUDANTE ESTÁ DEVIDAMENTE AUTORIZADA A REALIZAR A DEFESA DO T.L.

UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE
FAC. DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
28.09.05

MAPUTO, AOS 27 DE SETEMBRO DE 2005

4.5 Onda estacionária.

Partindo da equação de onda vamos resolver o problema de Couchy para uma onda estacionária.

Consideremos

$$
\begin{aligned}
&U_{tt} = a^2 U_{xx} \qquad (-\infty < x < \infty, t > 0)\\
&U(x,0) = A\mathrm{sen}(kx) \qquad (48)\\
&U_t(x,0) = 0
\end{aligned}
$$

Então

$$f(x+at) = A\mathrm{sen}(kx+at) \qquad (49)$$

$$f(x-at) = A\mathrm{sen}(kx-at) \qquad (50)$$

Consideremos (49) e (50) em (37) logo

$$U(x,t) = \frac{A}{2}[\mathrm{sen}\, k(x+at) + \mathrm{sen}\, k(x-at)] \qquad (51)$$

Se $\omega = ka$ e $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ então:

$$U(x,t) = A\mathrm{sen}(kx)\cos(\omega t) \qquad (52)$$

Esta é a expressão para uma *onda estacionária.*
Resultados obtidos são representados em Tabela 5 e Tabela 6 (final do capitulo). Esta informação tem que ser utilizada na solução do seguinte problema:
Problema 3
Variante 1 (Programa computacional de ensino FenOnd31.exe).

Uma corda homogénea infinita tem seguintes parâmetros: tensão **T = 370 N,** densidade linear de massa **ρ = 2,3·10⁻³kg/m.** No instante inicial **t = 0** a corda está em repouso e tem o perfil **U (x,0) = Asen (kx),** onde **k = 0,57m⁻¹,** **A = const**. Determinar:

a) velocidade de onda **a**;
b) frequência cíclica da onda **ω**;
c) comprimento de onda **λ**.

Introduzindo no programa FenOnd21.exe resultados correctos da solução deste problema:

$$a = 401\,\mathrm{m/s}, \quad \omega = 229\,\mathrm{rad/s}, \quad \lambda = 11\,\mathrm{m}$$

pode-se ver em dinâmica uma onda estacionária:

Fig.6 – distribuição inicial (48).

4.6 Tabelas e gráficos.

Tabela 1

Problema de Couchy	Solução
$U_{tt} = a^2 U_{xx}$ $U(x,0) = A\exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2\right\}$ $U_t(x,0) = 0$	$U(x,t) = \frac{A}{2}\exp\left\{-\left(\frac{x+at}{\sigma}\right)^2\right\} + \frac{A}{2}\exp\left\{-\left(\frac{x-at}{\sigma}\right)^2\right\}$

Tabela 2

Constantes e parâmetros
T - *tensão* da corda
S - *secção transversal* da corda
ρ_V - *densidade volumétrica* da corda
$\rho = \rho_V S$ - *densidade linear* da corda
$a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ - *velocidade* de onda
$x_1 = -at_1$ - *posição do máximo* da onda reflectida no instante t_1

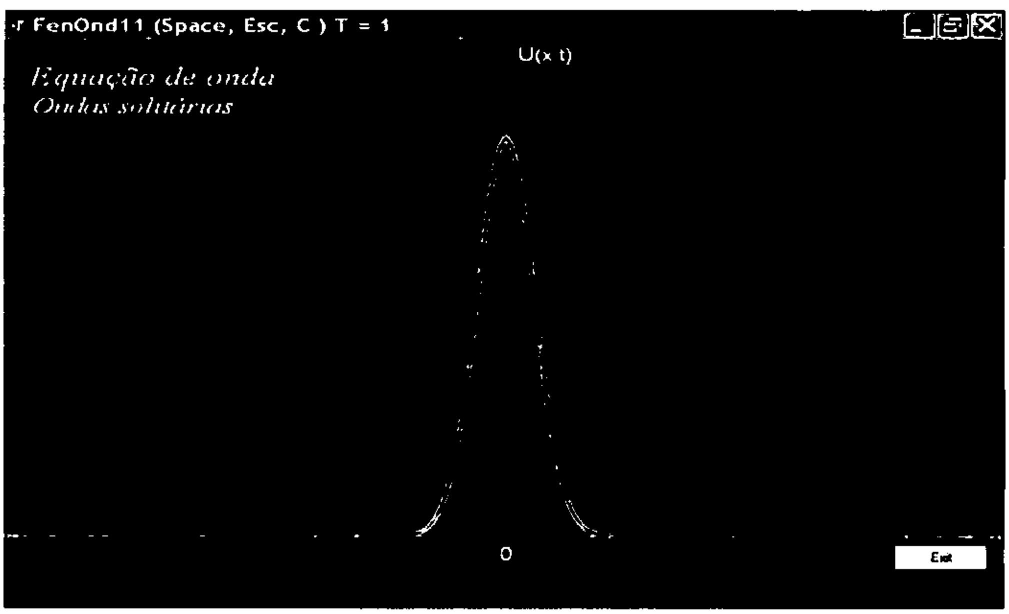


Fig.2

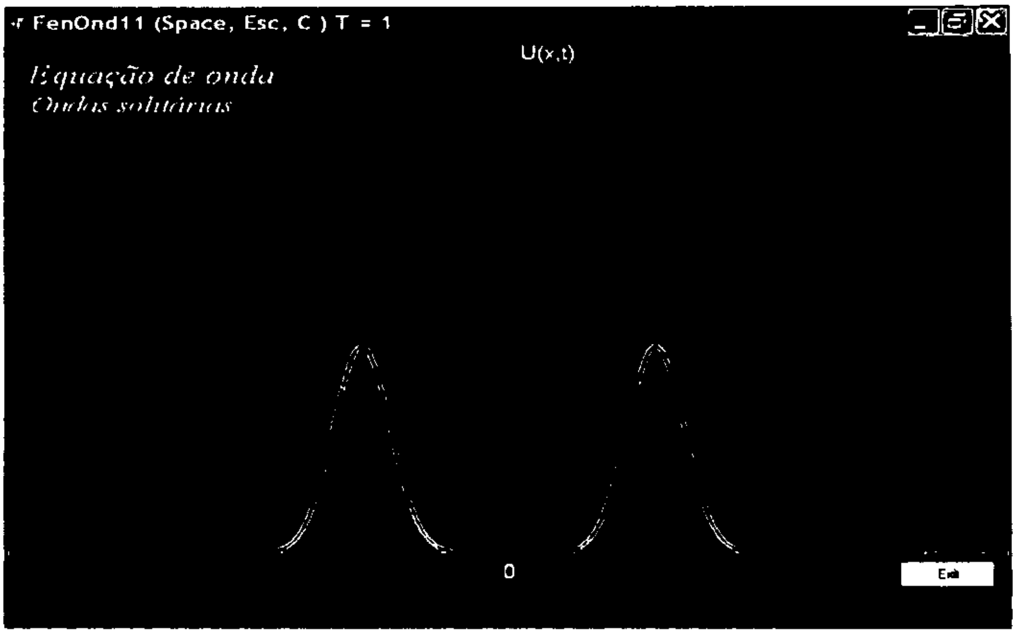


Fig.3

Tabela 3

Problema de Couchy	Solução
$U_{tt} = a^2 U_{xx}$ $U(x,0) = A\,\mathrm{sen}(kx)$ $U_t(x,0) = V\cos(kx)$	$U(x,t) = A_r \mathrm{sen}\,k(x+at) + A_i \mathrm{sen}\,k(x-at)$

Tabela 4

Constantes e parâmetros
T - *tensão* da corda
ρ - *densidade linear* da corda
k - *número de onda*
$a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ - *velocidade* de onda
$A_i = \frac{1}{2}\left(A - \frac{V}{ka}\right)$ - *amplitude* da onda incidente
$A_i = \frac{1}{2}\left(A + \frac{V}{ka}\right)$ - *amplitude* da onda reflectida

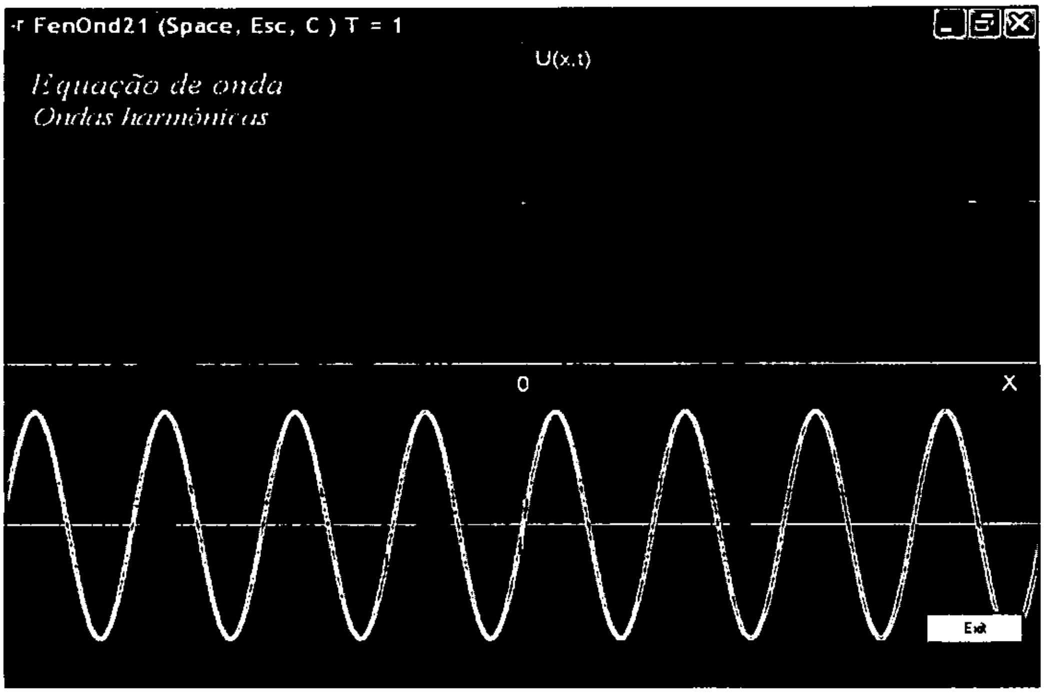

FenOnd21 (Space, Esc, C) T = 1
U(x,t)
Equação de onda
Ondas harmônicas
0
X
Exit

Fig.4

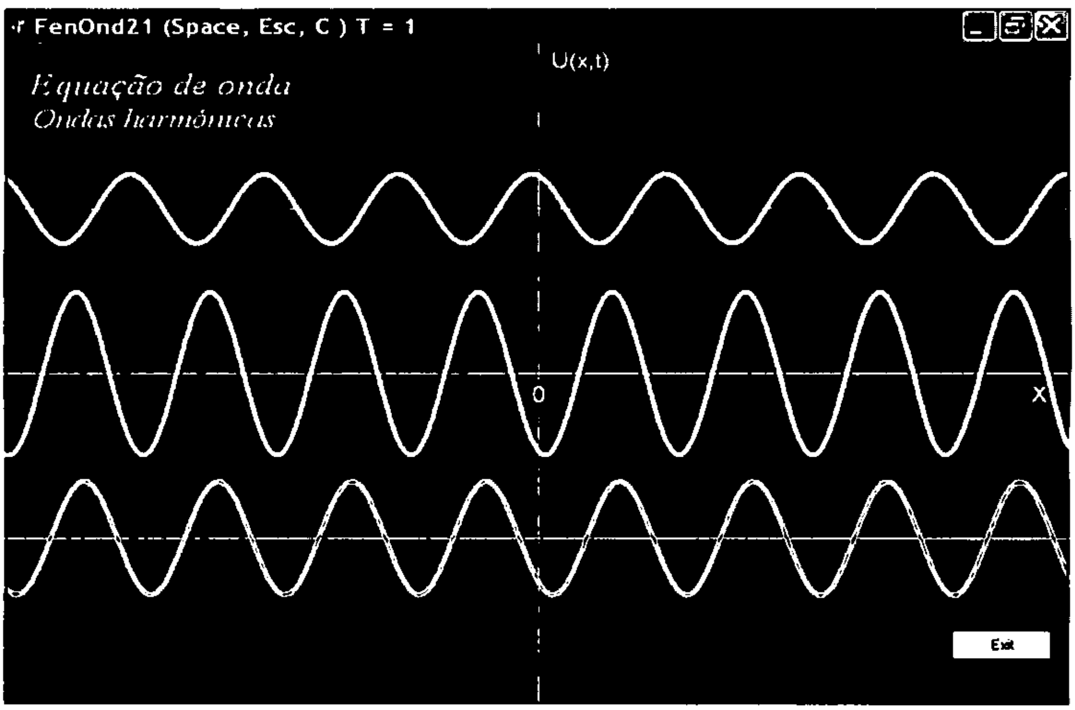

FenOnd21 (Space, Esc, C) T = 1
U(x,t)
Equação de onda
Ondas harmônicas
0
X
Exit

Fig. 5

Tabela 5

Problema de Couchy	Solução
$U_{tt} = a^2 U_{xx}$ $U(x,0) = A\mathrm{sen}(kx)$ $U_t(x,0) = 0$	$U(x,t) = \frac{A}{2}[\mathrm{sen}\, k(x+at) + \mathrm{sen}\, k(x-at)]$ $U(x,t) = A\mathrm{sen}(kx)\cos(\omega t)$

Tabela 6

Constantes e parâmetros
T - *tensão* da corda
ρ - *densidade linear* da corda
k - *número de onda*
$a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ - *velocidade* de onda
$\omega = ka$ - *frequência cíclica* da onda
$\lambda = \frac{2\pi}{k}$ - *comprimento* de onda

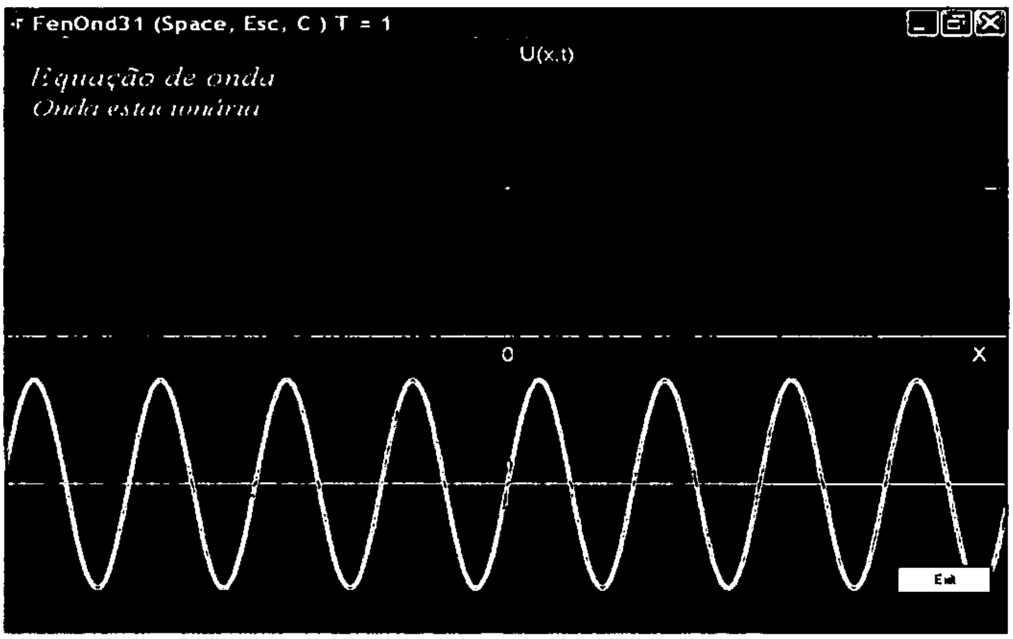


Fig.6

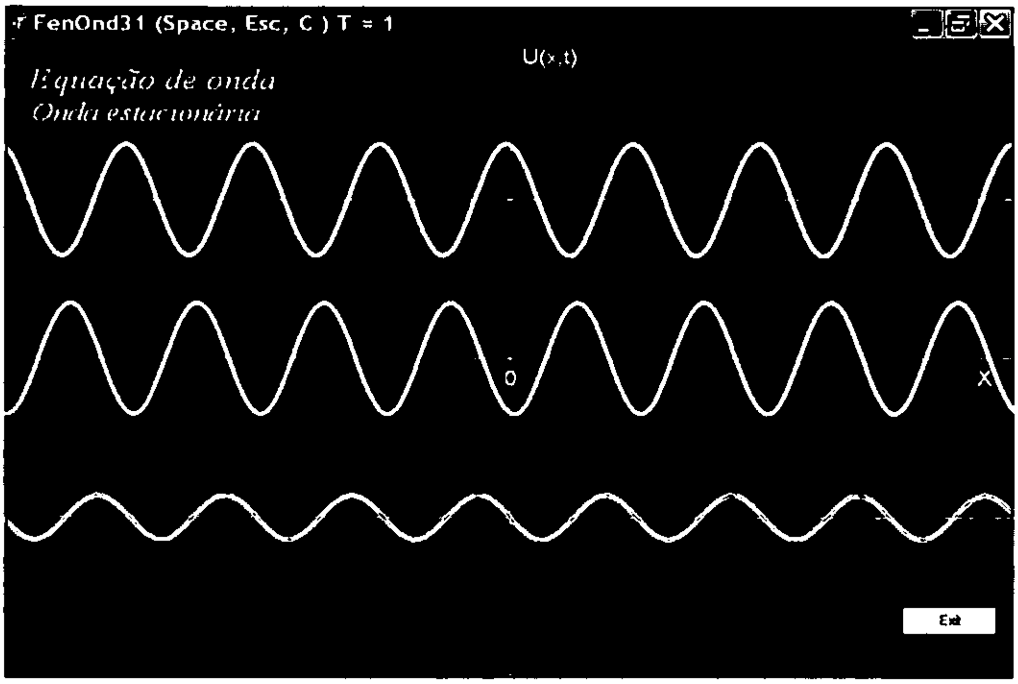

FenOnd31 (Space, Esc, C) T = 1
U(x,t)
Equação de onda
Onda estacionária
0
x
Exit

Fig.7

CAPITULO V

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

5.1 Conclusões

Neste trabalho foi feita a descrição teórica dos vários sistemas oscilantes e fenómenos ondulatórios. Usando esta informação teórica foram preparadas as condições dos problemas concretos com as fórmulas das suas soluções.

Na base das fórmulas das soluções dos problemas concretos foram elaborados os programas computacionais de ensino com finalidade de controlar as soluções de estudantes destes problemas e de demonstração da dinâmica de sistemas oscilantes e fenómenos ondulatórios.

5.2 Recomendações

No trabalho estão representados os exemplares de prova dos programas computacionais de ensino, por isso é possível considerar outras condições iniciais para mesmos problemas e programas computacionais de ensino.

É possível, também, criar os programas semelhantes considerando outros temas, tais como as oscilações forçadas, oscilações de corda fixa etc...

Finalmente, pode-se recomendar introduzir estes programas em cursos do Departamento de Física onde se encontram os sistemas oscilantes e fenómenos ondulatórios.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

[1]. **Landau, L., Lifshitz, E.,** *Mecânica.*
Mir, Moscovo, 1978.

[2]. **Resnick, R., Halliday, D.,** *Física 2.*
3ª. ed., Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1981.

[3]. **Alonso, M., Finn, E.J.,** *Física. Um Curso Universitário.*
vol. 1, Edgard Blucher, São Paulo, 1972.

[4]. **Arnold, V. I.,** *Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica.*
Mir, Moscovo, 1987.

[5]. **Yavorski, B.M., Detlaf, A.A.,** *Prontuário de Física.*
Mir, Moscovo, 1984.

[6]. **Saveliev, V.,** *Curso de Física General.*
Mir, Moscovo, 1982.

[7]. **Tijonov, A.N., Samarski, A.A.,** *Ecuaciones de la física matemática.*
Mir, Moscú, 1980.

[8]. **Tipler, Paul A.** *Física* segunda edição, volume 1b.
Guanabara Koogan S. A., Rio de Janeiro, 1984.

[9]. **Starjinski V. M.,** *Mecánica Teórica*
Mir, Moscoso 1986.

APÊNDICE

Funcionamento de programas de ensino.

Os programas computacionais de ensino têm que realizar os seguintes objectivos:

a) verificar as soluções de estudantes de problemas concretos;

b) demonstrar em dinâmica o comportamento de vários sistemas oscilantes.

Todos os programas têm mesma estrutura geral, por isso consideramos detalhadamente o funcionamento do primeiro programa deste trabalho que denomina-se OsHarm11.exe.

Depois de chamar este programa vamos ter a figura 1:

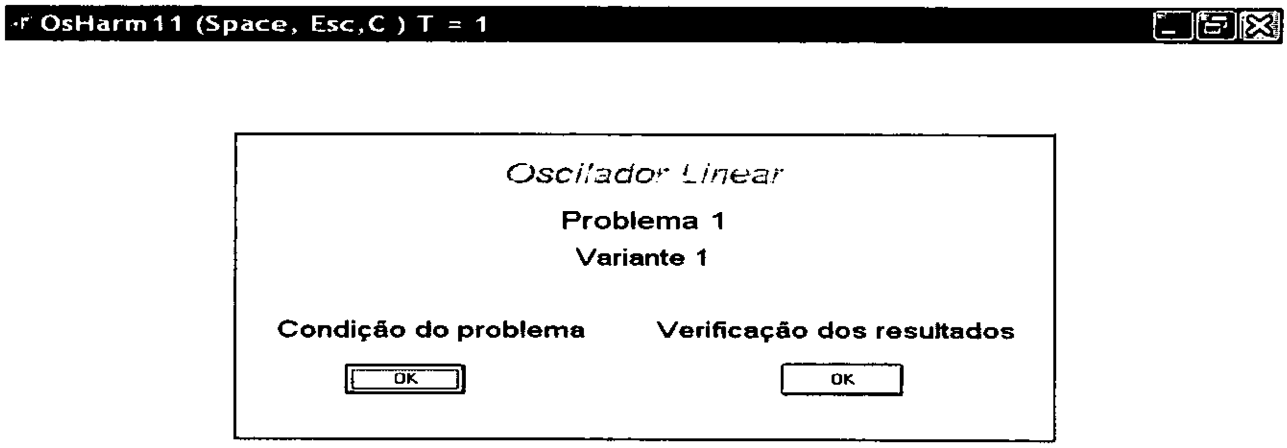


Fig. 1

Depois do click do botão "Condição do problema" aparece a figura 2:

OsHarm11 (Space, Esc,C) T = 1

Problema 1
Variante 1

A constante elástica de uma mola vale **k = 40N/m**. Um corpo de **m = 0.8kg** é prendido a extremidade da mola e afastado x_0 = **7cm** da posição de equilíbrio, ao longo de uma mesa horizontal lisa. Largando-se o corpo com a velocidade inicial v_0 = **0.8m/s** ele executará o movimento harnónico simples.
Calcular:

a) frequência das oscilações ω;
b) período das oscilações **T**;
c) amplitude das oscilações **A**.

__Nota__
Resultados numéricos tem que ser dados com a precisão até terceiro algorismo significativo. __Exemplos:__

Valor exacto	13.88	0.5672	2.385
Valor aproximado	13.9	0.567	2.39

Desvio relativo do valor exacto tem que ser menor que 1%.
__Exemplo__: Valor exacto = 600
594 < Valor calculado < 606

[Next>>]

Fig. 2

É a condição do problema a qual o estudante tem que resolver.

Depois do click do botão "Next" da figura 2 vamos voltar-se à figura 1 e depois do click do botão da "Verificação dos resultados" aparece a figura 3:

OsHarm11 (Space, Esc,C) T = 1

Resultados

Frequência (rad/s) [ ] [Click]

Fig. 3

É necessário introduzir o valor calculado para a frequência ω e click o botão "Click". São possíveis três variantes da reacção do programa.

Primeira variante, figura 4:

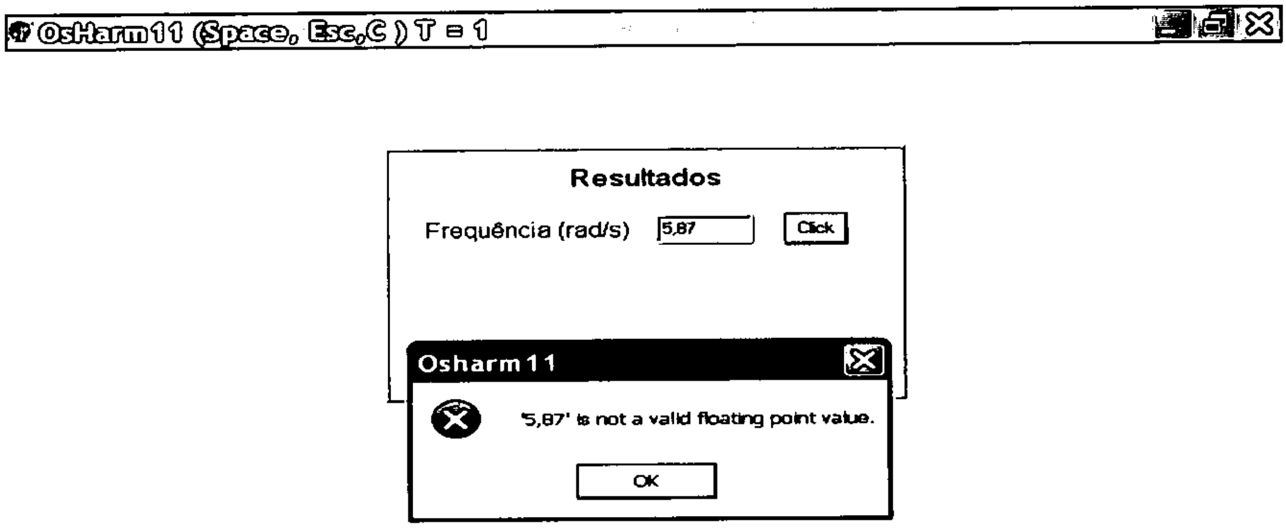


Fig. 4

É a reacção do controlo do formato incorrecto do número introduzido. A forma **5,87** não é correcta pois em *Delphi* utiliza-se um ponto em lugar da vírgula: **5.87**. Para informação vamos considerar:

a) exemplos de formatos incorrectos: 0,98   0.5 92   4.-6   7./6   0.!45   0.4:51

b) exemplos de formatos correctos: 7.07   -45.005   -0.00087   56E-06   2.21E01

Segunda variante figura 5:

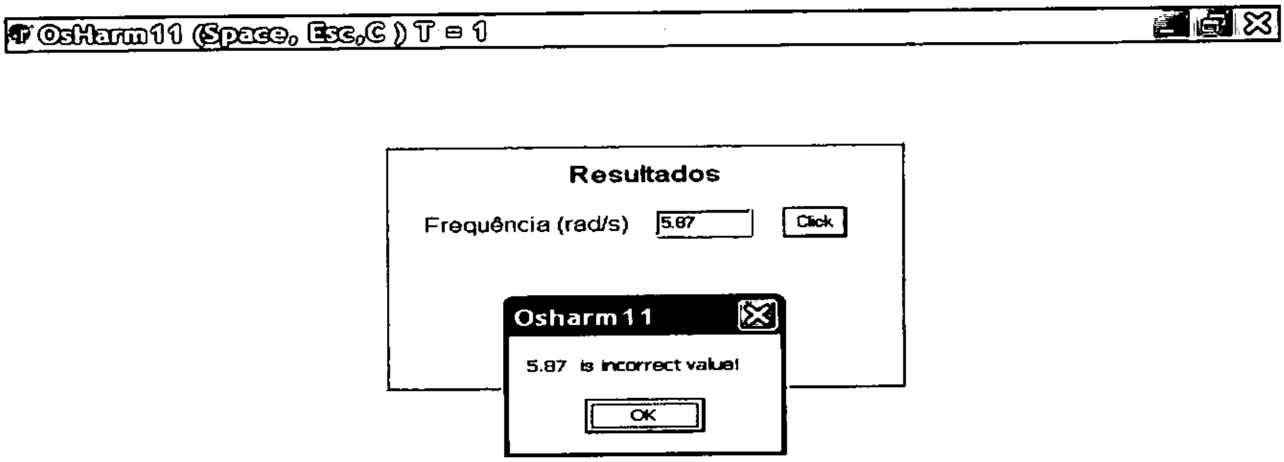


Fig. 5

É a reacção do controlo do resultado numérico incorrecto. Em condição do problema (fig. 2) existe uma informação sobre a representação correcta dos resultados numéricos:

<u>Nota</u>

Resultados numéricos têm que ser dados com a precisão até terceiro algarismo significativo. <u>Exemplos:</u>

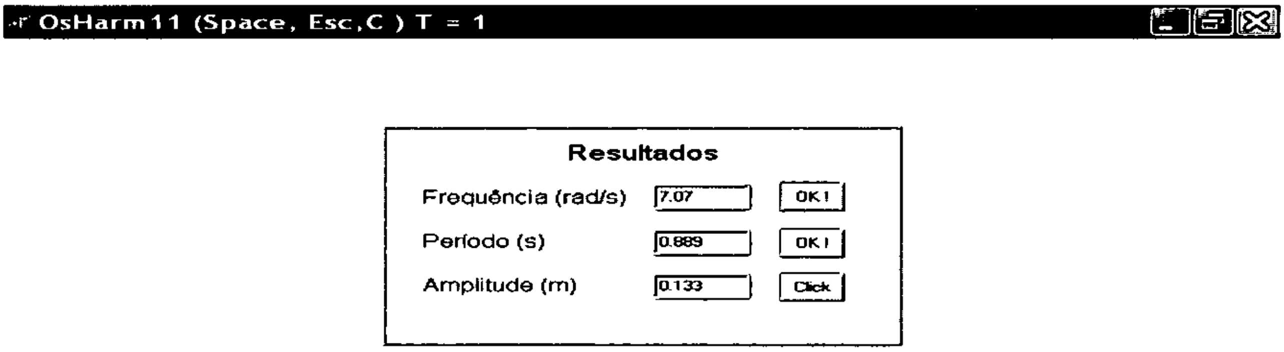
Valor exacto	13.88	0.5672	2.385
Valor aproximado	13.9	0.567	2.39

Desvio relativo do valor exacto tem que ser menor que 1%.

<u>Exemplo</u>: Valor exacto = 600

594 < Valor calculado < 606

Terceira variante figura 6:



.Fig. 6

Todos os resultados são correctos.

Depois do click do botão "Click" vamos ter a representação dinâmica do comportamento da coordenada e da velocidade do oscilador simples:

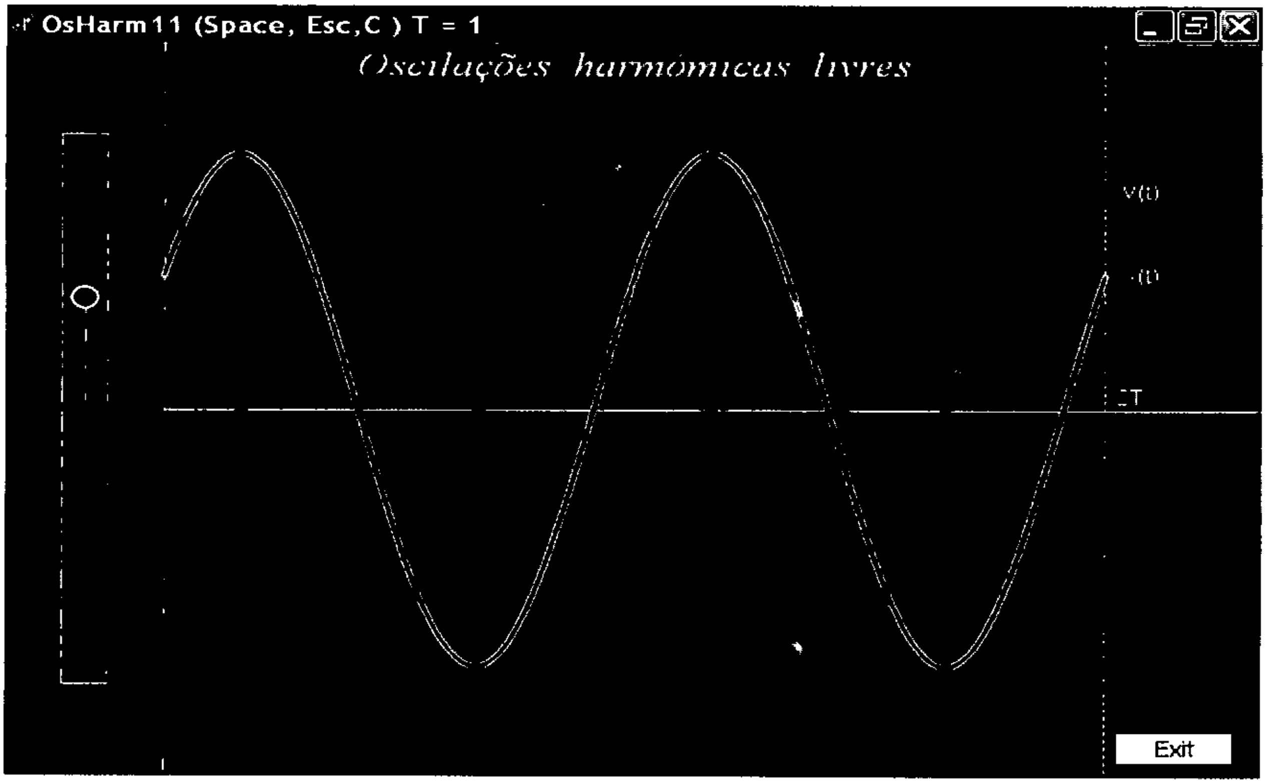


Fig. 7

Códigos do projecto OsHarm11

```
program OsHarm11;
uses
  Forms,
  MainOH11 in 'MainOH11.pas' {Form1};
{$R *.RES}
begin
  Application.Initialize;
  Application.CreateForm(TForm1, Form1);
  Application.Run;
end.


unit MainOH11;
interface
uses
  Windows, Messages, SysUtils, Classes, Graphics, Controls, Forms, Dialogs,
  StdCtrls, ExtCtrls, jpeg, ClipBrd;
type
  TForm1 = class(TForm)
    Panel1: TPanel;
    Label1: TLabel;
    Label2: TLabel;
    Label3: TLabel;
    Label4: TLabel;
    Button1: TButton;
    Label5: TLabel;
    Button2: TButton;
    Image1: TImage;
    Button3: TButton;
    Panel2: TPanel;
    Label6: TLabel;
    Label7: TLabel;
    Label8: TLabel;
    Label9: TLabel;
    Edit1: TEdit;
    Edit2: TEdit;
    Edit3: TEdit;
    Button4: TButton;
    Button5: TButton;
    Button6: TButton;
    Image2: TImage;
    Timer1: TTimer;
    Button7: TButton;
    Panel3: TPanel;
    Label10: TLabel;
    Panel4: TPanel;
    Image3: TImage;
```

```
    procedure ShowGrph;
    procedure GrphX;
    procedure GrphV;
    procedure Axes;
    procedure FormActivate(Sender: TObject);
    procedure Button1Click(Sender: TObject);
    procedure Button3Click(Sender: TObject);
    procedure Button2Click(Sender: TObject);
    procedure FormKeyDown(Sender: TObject; var Key: Word;
          Shift: TShiftState);
    procedure Button4Click(Sender: TObject);
    procedure Button5Click(Sender: TObject);
    procedure Button6Click(Sender: TObject);
    procedure Timer1Timer(Sender: TObject);
    procedure Button7Click(Sender: TObject);
    procedure FormCreate(Sender: TObject);
  private
    { Private declarations }
  public
    { Public declarations }
  end;
const
  k: real = 40;
  m: real = 0.8;
  x0: real = 0.07;
  v0: real = 0.8;
  Nxmax: integer = 600;
  Nymax: integer = 400;
var
  Form1: TForm1;
  omega,T,A: real;
  Nx,Ny,dw,dh,Tint: integer;
  ArsX,ArsV: array of integer;
implementation
{$R *.DFM}
procedure TForm1.ShowGrph;
const
  d: integer = 3;
begin
  Nx:= Nx+d;
  if Nx < Nxmax-d then
  begin
    Image2.Canvas.Pen.Width:= 5;
    Image2.Canvas.Pen.Style:= psSolid;
    Image2.Canvas.Pen.Color:= clAqua;
    Image2.Canvas.MoveTo(100+Nx,2*dh-ArsX[Nx]);
    Image2.Canvas.LineTo(100+Nx+d,2*dh-ArsX[Nx+d]);
    Image2.Canvas.MoveTo(100+Nx,2*dh-ArsV[Nx]);
    Image2.Canvas.LineTo(100+Nx+d,2*dh-ArsV[Nx+d]);
```

```
 end;
 Image2.Canvas.Pen.Width:= 5;
 Image2.Canvas.Pen.Style:= psSolid;
 Image2.Canvas.Pen.Color:= clGreen;
 Image2.Canvas.MoveTo(100+Nx-d,2*dh-ArsX[Nx-d]);
 Image2.Canvas.LineTo(100+Nx,2*dh-ArsX[Nx]);
 Image2.Canvas.Pen.Color:= clBlue;
 Image2.Canvas.MoveTo(100+Nx-d,2*dh-ArsV[Nx-d]);
 Image2.Canvas.LineTo(100+Nx,2*dh-ArsV[Nx]);

 Image2.Canvas.Pen.Width:= 1;
 Image2.Canvas.Pen.Style:= psSolid;
 Image2.Canvas.Pen.Color:= clWhite;
 Image2.Canvas.MoveTo(50,2*dh);
 Image2.Canvas.LineTo(50,2*dh-ArsX[Nx]);

 Image2.Canvas.Pen.Width:= 1;
 Image2.Canvas.Pen.Style:= psSolid;
 Image2.Canvas.Pen.Color:= clBlack;
 Image2.Canvas.Brush.Color:= clBlack;
 Image2.Canvas.Ellipse(40,2*dh-ArsX[Nx-d]-10,
            60,2*dh-ArsX[Nx-d]+10);
 Image2.Canvas.Pen.Color:= clAqua;
 Image2.Canvas.Brush.Color:= clAqua;
 Image2.Canvas.Ellipse(40,2*dh-ArsX[Nx]-10,
            60,2*dh-ArsX[Nx]+10);

 Image2.Canvas.Font.Name:= 'Arial';
 Image2.Canvas.Font.Size:= 12;
 Image2.Canvas.Font.Color:= clWhite;
 Image2.Canvas.Brush.Color:= clBlack;
 Image2.Canvas.TextOut(110+Nxmax,2*dh-ArsX[0]-10,'X(t)');
 Image2.Canvas.TextOut(110+Nxmax,2*dh-ArsV[0]-10,'V(t)');

 if Nx >= Nxmax then Nx:= 0;
end;

procedure TForm1.GrphX;
var
 i: integer;
 x,y,xmax,ymax: real;
 rNx,rNy,rNxmax,rNymax: real;
begin
 xmax:= 4*pi;
 ymax:= 2*A;
 rNxmax:= Nxmax;
 rNymax:= Nymax;
 for i:= 0 to Nxmax do
 begin
```

```
   rNx:= i;
   x:= (xmax/rNxmax)*rNx;
   y:= x0*cos(x)+(v0/omega)*sin(x);
   rNy:= (rNymax/ymax)*y;
   Ny:= Round(rNy);
   ArsX[i]:= Ny;
  end;
end;

procedure TForm1.GrphV;
var
  i: integer;
  x,y,xmax,ymax: real;
  rNx,rNy,rNxmax,rNymax: real;
begin
  xmax:= 4*pi;
  ymax:= 2*A*omega;
  rNxmax:= Nxmax;
  rNymax:= Nymax;
  for i:= 0 to Nxmax do
  begin
   rNx:= i;
   x:= (xmax/rNxmax)*rNx;
   y:= -omega*x0*sin(x)+ v0*cos(x);
   rNy:= (rNymax/ymax)*y;
   Ny:= Round(rNy);
   ArsV[i]:= Ny;
  end;
end;

procedure TForm1.Axes;
begin
  Image2.Left:= 0;
  Image2.Top:= 0;
  Image2.Width:= ClientWidth;
  Image2.Height:= ClientHeight;
  Image2.Canvas.Brush.Color:= clBlack;
  Image2.Canvas.FillRect(ClientRect);

  Panel3.AutoSize:= True;
  Panel3.Top:= 0;
  Panel3.Left:= (ClientWidth -Panel3.Width) div 2;
  Label10.Color:= Image2.Canvas.Brush.Color;
  Panel3.BevelInner:= bvNone;
  Panel3.BevelOuter:= bvNone;
  Panel3.Color:= Image2.Canvas.Brush.Color;

  Image2.Canvas.Pen.Width:= 1;
  Image2.Canvas.Pen.Style:= psSolid;
```

```
  Image2.Canvas.Pen.Color:= clWhite;
  Image2.Canvas.MoveTo(100,0);
  Image2.Canvas.LineTo(100,4*dh);
  Image2.Canvas.MoveTo(100,2*dh);
  Image2.Canvas.LineTo(4*dw,2*dh);
  Image2.Canvas.Pen.Style:= psDot;
  Image2.Canvas.MoveTo(100+Nxmax,0);
  Image2.Canvas.LineTo(100+Nxmax,4*dh);

  Image2.Canvas.Pen.Width:= 1;
  Image2.Canvas.Pen.Style:= psSolid;
  Image2.Canvas.Pen.Color:= clWhite;
  Image2.Canvas.Rectangle(35,2*dh-215,65,2*dh+215);

  Image2.Canvas.Font.Name:= 'Arial';
  Image2.Canvas.Font.Size:= 12;
  Image2.Canvas.Font.Color:= clWhite;
  Image2.Canvas.Brush.Color:= clBlack;
  Image2.Canvas.TextOut(107+Nxmax,2*dh-20,'2T');

  Image2.Visible:= True;
  Panel3.Visible:= True;
  Button7.Visible:= True;
end;

procedure TForm1.FormActivate(Sender: TObject);
var
  i: integer;
begin
  Tint:= 1;
  Timer1.Interval:= Tint;
  Caption:= 'OsHarm11 (Space, Esc,C ) T = '
        +IntToStr(Timer1.Interval);
  dw:= ClientWidth div 4;
  dh:= ClientHeight div 4;
  SetLength(ArsX,Nxmax+1);
  SetLength(ArsV,Nxmax+1);
  for i:=0 to Nxmax do ArsX[i]:= 0;
  for i:=0 to Nxmax do ArsV[i]:= 0;
  Timer1.Enabled:= False;
  Button3.Visible:= False;
  Button7.Visible:= False;
  Image1.Visible:= False;
  Image2.Visible:= False;
  Image3.Left:= 0;
  Image3.Top:= 0;
  Image3.AutoSize:= True;
  Panel4.Left:= 0;
  Panel4.Top:= 0;
```

```
  Panel4.AutoSize:= True;
  Panel4.Visible:= False;
  Panel3.Visible:= False;
  Panel2.Left:= (ClientWidth - Panel2.Width) div 2;
  Panel2.Visible:= False;
  Panel1.Left:= (ClientWidth - Panel1.Width) div 2;
  Panel1.Visible:= True;
end;

procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
begin
  Panel1.Visible:= False;
  Button3.Visible:= True;
  Image1.Visible:= True;
  Image1.AutoSize:= True;
  Image1.Top:= (ClientHeight - Image1.Height) div 2;
  Image1.Left:= (ClientWidth - Image1.Width) div 2;
  Button3.SetFocus;
end;

procedure TForm1.Button3Click(Sender: TObject);
begin
  Image1.Visible:= False;
  Button3.Visible:= False;
  Panel1.Visible:= True;
  Button2.SetFocus;
end;

procedure TForm1.Button2Click(Sender: TObject);
begin
  Panel1.Visible:= False;
  Panel2.Visible:= True;
  Edit1.SetFocus;
  omega:= sqrt(k/m);
  T:= (2*pi)/omega;
  A:= sqrt(sqr(x0)+sqr(v0/omega));
  Label8.Visible:= False;
  Edit2.Visible:= False;
  Button5.Visible:= False;
  Label9.Visible:= False;
  Edit3.Visible:= False;
  Button6.Visible:= False;
end;

procedure TForm1.FormKeyDown(Sender: TObject; var Key: Word;
  Shift: TShiftState);
begin
  if Key = ord('T')then
  begin
```

```
  Timer1.Enabled:= False;
  Tint:= Tint + 1;
  if Tint = 4 then Tint:= 1;
  case Tint of
   1: Timer1.Interval:= 1;
   2: Timer1.Interval:= 20;
   3: Timer1.Interval:= 50;
  end;
  Caption:= 'OsHarm11 (Space, Esc,C ) T = '
         +IntToStr(Timer1.Interval);
  Timer1.Enabled:= True;
 end;
 if Key = ord('C')then
 begin
  Timer1.Enabled:= False;
  Clipboard.Assign(Image2.Picture);
  ShowMessage('Save into Clipboard');
  Timer1.Enabled:= True;
 end;
 if Key = ord('G')then
 begin
  Button2Click(Sender);
  Button6.Caption:= 'OK !';
  Panel2.Visible:= False;
  Axes;
  GrphX;
  GrphV;
  Nx:= 0;
  Timer1.Interval:= 1;
  Timer1.Enabled:= True;
 end;
 if (Key = ord('A')) and (ssCtrl in Shift) then
 Panel4.Visible:= not Panel4.Visible;
 if (Key = ord('R')) and (ssCtrl in Shift) then
 begin
  Edit1.Text:= FloatToStr(omega);
  Edit2.Text:= FloatToStr(T);
  Edit3.Text:= FloatToStr(A);
 end;
 if (Key = vk_Space) and (Button6.Caption = 'OK !')
 then Timer1.Enabled:= not Timer1.Enabled;
 if Key = vk_Escape then Close;
end;

procedure TForm1.Button4Click(Sender: TObject);
var
 om1: real;
begin
 om1:= StrToFloat(Edit1.Text);
```

```
  if abs(omega - om1)<= 0.01*abs(omega) then
  begin
    Button4.Caption:= 'OK !';
    Label8.Visible:= True;
    Edit2.Visible:= True;
    Button5.Visible:= True;
    Edit2.SetFocus;
  end
  else
  begin
    ShowMessage(Edit1.Text+'  is incorrect value!');
    Edit1.SetFocus;
  end;
end;

procedure TForm1.Button5Click(Sender: TObject);
var
  Tr: real;
begin
  Tr:= StrToFloat(Edit2.Text);
  if abs(T - Tr)<= 0.01*abs(T) then
  begin
    Button5.Caption:= 'OK !';
    Label9.Visible:= True;
    Edit3.Visible:= True;
    Button6.Visible:= True;
    Edit3.SetFocus;
  end
  else
    begin
    ShowMessage(Edit2.Text+'  is incorrect value!');
    Edit2.SetFocus;
  end;
end;

procedure TForm1.Button6Click(Sender: TObject);
var
  Ar: real;
begin
  Ar:= StrToFloat(Edit3.Text);
  if abs(A - Ar)<= 0.01*abs(A) then
  begin
    Button6.Caption:= 'OK !';
    Panel2.Visible:= False;
    Axes;
    GrphX;
    GrphV;
    Nx:= 0;
    Timer1.Enabled:= True;
```

```
  end
  else
   begin
   ShowMessage(Edit3.Text+'  is incorrect value!');
   Edit3.SetFocus;
  end;
end;

procedure TForm1.Timer1Timer(Sender: TObject);
begin
  ShowGrph;
end;

procedure TForm1.Button7Click(Sender: TObject);
begin
  Close;
end;
procedure TForm1.FormCreate(Sender: TObject);
begin
  WindowState:= wsMaximized;
  KeyPreview:= True;
end;
end.
```